

# *Предел последовательности*



- *Что такое числовая последовательность?*
- *Какие бывают виды числовых последовательностей?*
- *Как задаётся числовая последовательность?*
- *Что такое предел числовой последовательности?*
- *Как находить предел числовой последовательности?*



# Найдите закономерности и покажите их с помощью стрелки:

1; 4; 7; 10; 13;

В порядке  
возрастания  
положительные  
нечетные  
числа

10; 19; 37; 73;  
145; ...

В порядке убывания  
правильные дроби  
с числителем,  
равным 1

6; 8; 16; 18; 36;  
...

В порядке возрастания  
положительные числа,  
кратные 5

$\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{5}$ ;  $\frac{1}{6}$ ;

Увеличение  
на 3

Чередовать увеличение  
на 2 и увеличение в 2 раза

1; 3; 5; 7; 9; ...

5; 10; 15; 20; 25; ...

Увеличение в 2 раза  
и уменьшение на 1

# *Что такое числовая последовательность?*

- Если каждому натуральному числу  $n$  поставлено в соответствие некоторое действительное число  $x_n$ , то говорят, что задана числовая последовательность.*

*Числовая последовательность – это функция, область определения которой есть множество  $N$  всех натуральных чисел. Множество значений этой функции – совокупность чисел  $x_n$ ,  $n \in N$ , называют множеством значений последовательности.*

# Способы задания последовательности

Словесн  
ый

Аналитическ  
ий

Рекуррентн  
ый

Рекуррентный (от лат. слова  
*resurgens* – «возвращающийся»)

## Словесный способ.

*Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул или когда закономерности между элементами последовательности нет.*

- *Пример 1. Последовательность простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ....*
- *Пример 2. Произвольный набор чисел: 1, 4, 12, 25, 26, 33, 39, ...*
- *Пример 3. Последовательность чётных чисел 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...*

# Аналитический способ.

*с помощью формулы.*

- *Пример 1. Последовательность чётных чисел:  $y = 2n$ ;*

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$$

- *Пример 2. Последовательность квадрата натуральных чисел:  $y = n^2$ ;*

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, \dots$$

- *Пример 3. Последовательность  $y = 2n$ ;*

$$2, 22, 23, 24, \dots, 2n, \dots$$

# Рекуррентный способ.

- *Указывается правило, позволяющее вычислить  $n$ -й элемент последовательности, если известны её предыдущие элементы.*
- *Пример 1.  $a_1 = a$ ,  $a_{n+1} = a_n + d$ , где  $a$  и  $d$  – заданные числа. Пусть  $a_1 = 5$ ,  $d = 0,7$ , тогда последовательность будет иметь вид: 5; 5,7; 6,4; 7,1; 7,8; 8,5; ... .*
- *Пример 2.  $b_1 = b$ ,  $b_{n+1} = b_n q$ , где  $b$  и  $q$  – заданные числа. Пусть  $b_1 = 23$ ,  $q = 1/2$ , тогда последовательность будет иметь вид: 23; 11,5; 5,75; 2,875; ... .*



# Предел числовой последовательности

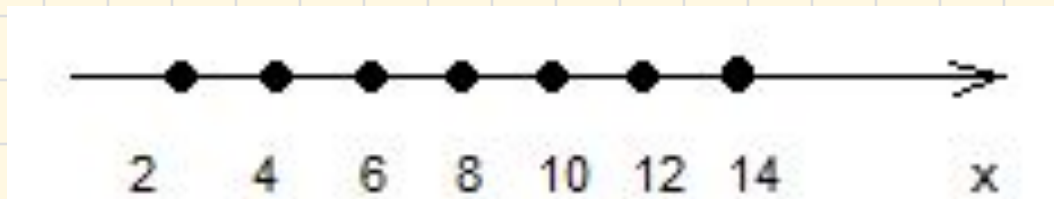
Рассмотрим две числовые последовательности:

$$(x_n) : 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots;$$

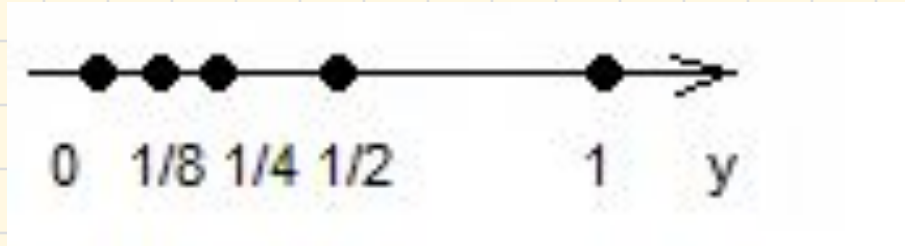
$$(y_n) : 1, \quad , \quad , \quad , \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}$$

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатных прямых.

Обратите внимание на то, как ведут себя члены последовательности.



$x_n$



$y_n$

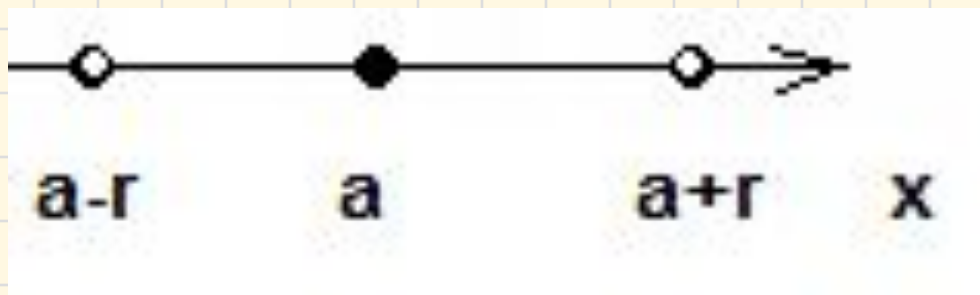
*Замечаем, что члены последовательности  $y_n$  как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности  $x_n$  таковой точки не наблюдается.*

Но, естественно, не всегда удобно изображать члены последовательности, чтобы узнать есть ли точка «сгущения» или нет, поэтому математики придумали следующее...

**Определение:** Пусть  $a$  - точка прямой, а  $r$  - положительное число.

Интервал  $(a-r, a+r)$  называют окрестностью точки  $a$ , а число  $r$  - радиусом окрестности.

Геометрически это выглядит так:



# Например

$(-0.1, 0.5)$  – окрестность точки  $0.2$ , радиус окрестности равен  $0.3$ .

Теперь можно перейти к определению точки «сгущения», которую математики назвали *«пределом последовательности»*.



**Число  $b$  называется пределом последовательности  $\{y_n\}$  если в любой заранее выбранной окрестности точки  $b$  содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.**

Пишут:  $y_n \rightarrow b$

Читают:  $y_n$  стремится к  $b$ .

Либо пишут:  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ .

Читают: предел последовательности  $y_n$  при стремлении  $n$  к бесконечности равен  $b$ .

*Последовательность, имеющая предел,  
называется сходящейся; в противном  
случае – расходящейся.*

# Рассмотрим последовательность:

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$  – гармонический ряд

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

**Если  $m \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , то**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n^m} = 0$$

**Если  $|q| < 1$ , то**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

**Если  $|q| > 1$ , то последовательность  $y_n = q^n$  расходится**

# Свойства пределов

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$

1. предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = b + c$$

2. предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = bc$$

3. предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{b}{c}$$

4. постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k x_n) = kb$$



# Примеры:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$

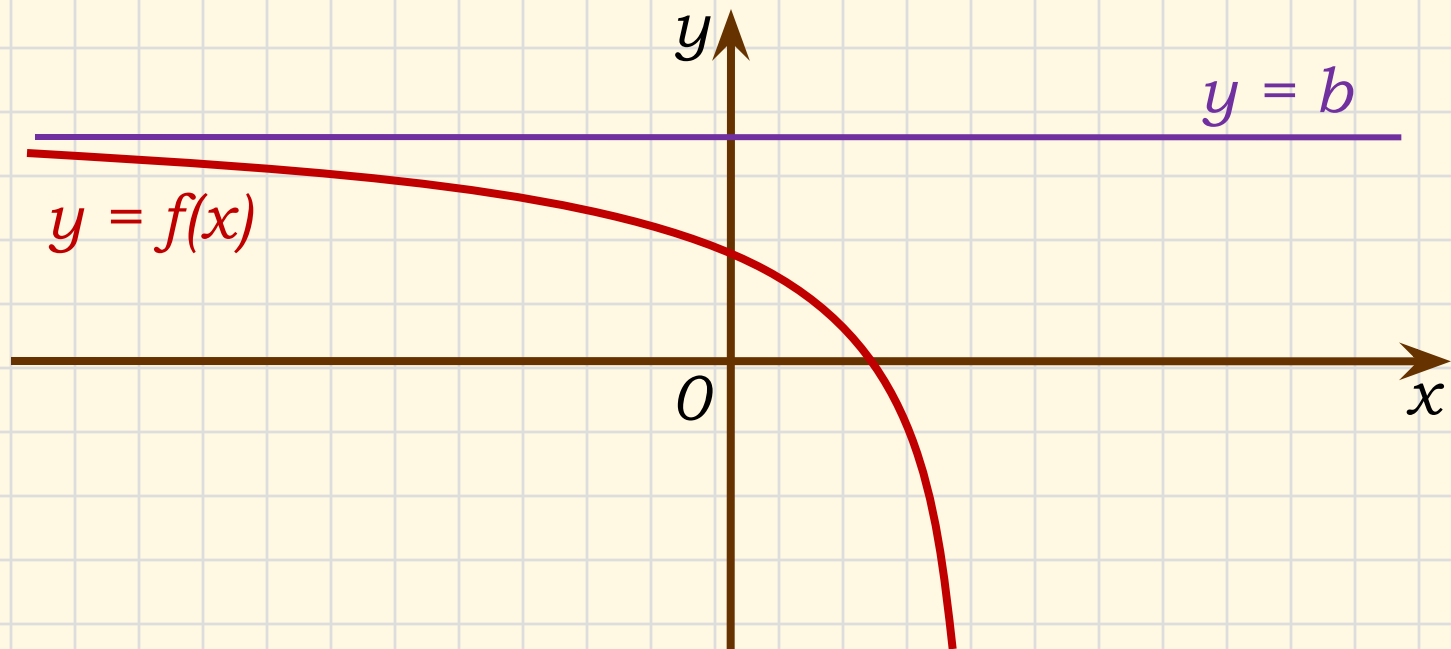
$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot \dots \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 4} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{3}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{n^2} \right)} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{n^2} \right)} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2 \end{aligned}$$

# Горизонтальная асимптота графика функции

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = b$$

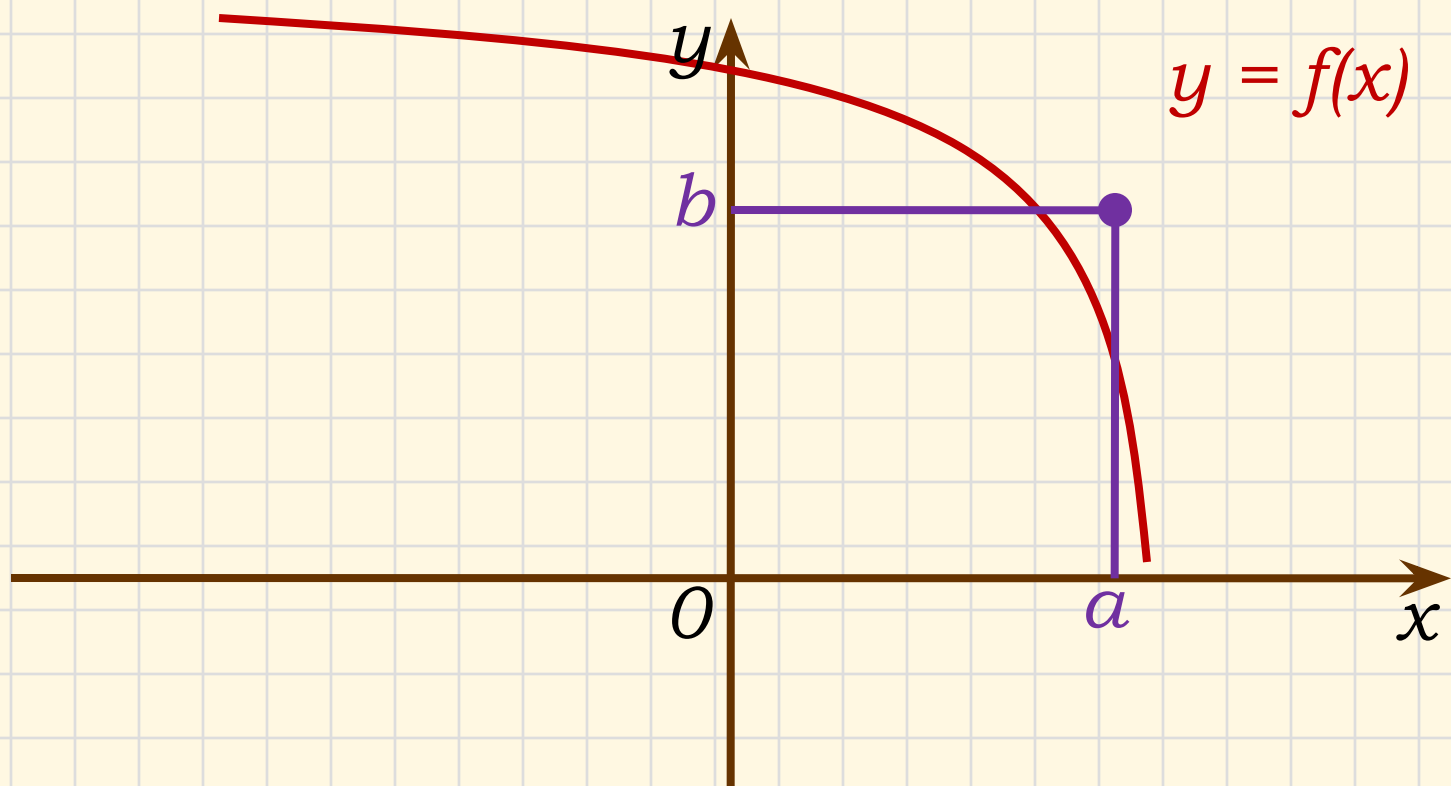
Это равенство означает, что прямая  $y = b$  является горизонтальной асимптотой графика последовательности  $y_n = f(n)$ , то есть графика функции  $y = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{N}$



# Предел функции в точке

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Функция  $y = f(x)$  стремится к пределу  $b$  при  $x \rightarrow a$ , если для каждого положительного числа  $\varepsilon$ , как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число  $\delta$ , что при всех  $x \neq a$  из области определения функции, удовлетворяющих неравенству  $|x - a| < \delta$ , имеет место неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .



# Непрерывность функции в точке

Функцию  $y = f(x)$  называют непрерывной в точке  $x = a$ , если выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

## Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x} + 4} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2} + 4} = \frac{0}{\sqrt{2} + 4} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{4(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{4} = \\ = \frac{-3 - 3}{4} = -\frac{6}{4} = -1,5$$

# Понятие непрерывности функции

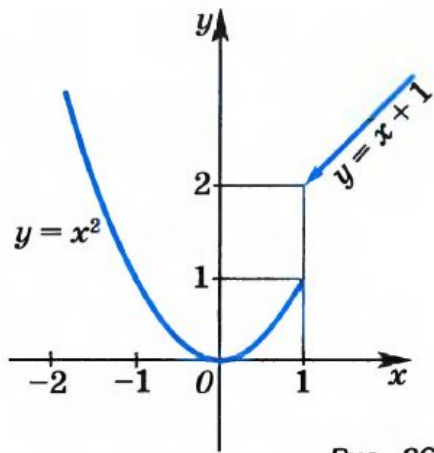


Рис. 36

*На рисунке изображен график функции, состоящий из двух «кусков». Каждый из них может быть нарисован без отрыва от бумаги. Однако эти «куски» не соединены непрерывно в точке  $x = 1$ .*

*Поэтому все значения  $x$ , кроме  $x = 1$ , называют точками непрерывности функции  $y = f(x)$ , а точку  $x = 1$  – точкой разрыва этой функции.*

Вычислить:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - x + x^3}{2 + 2x - x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 7}{6x^2 - x + 5}$$



$$4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$