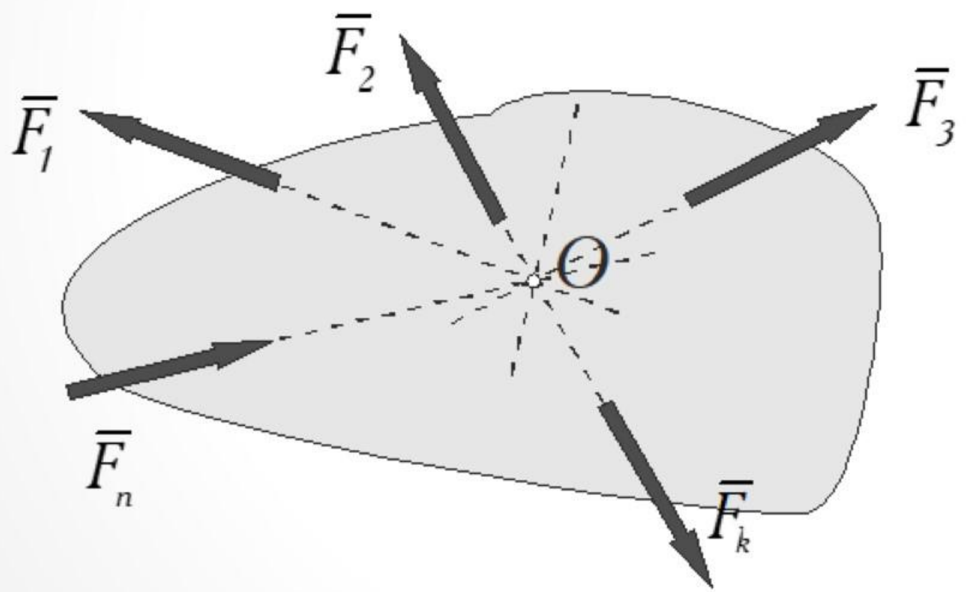
Простейшие системы сил. Момент силы

Лекция 2

Система сходящихся сил

Силы называются сходящимися, если линии их действия пересекаются в одной точке.

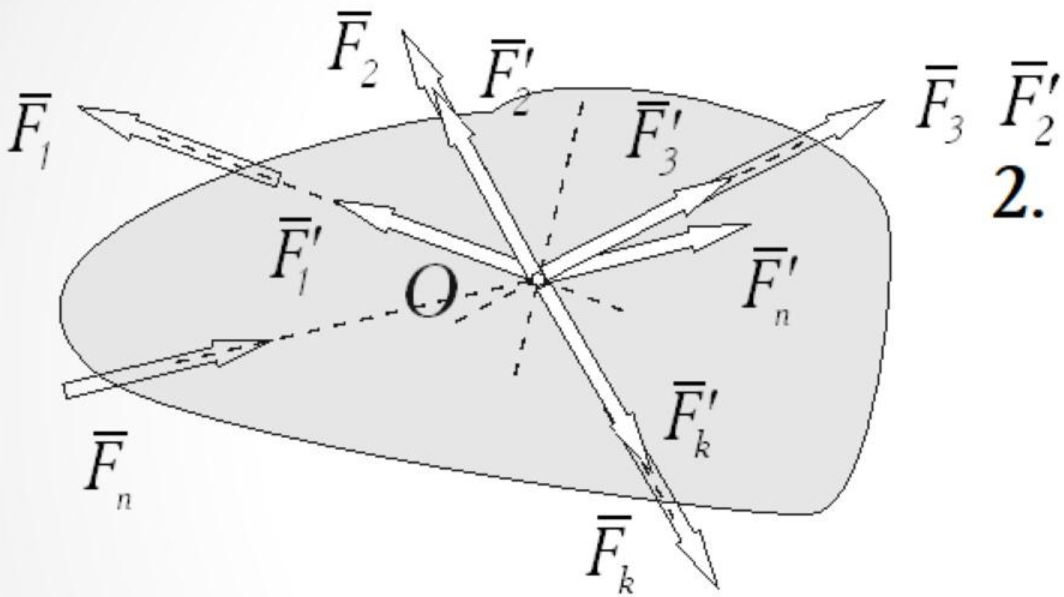


$$\left(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_k, \ldots, \bar{F}_n\right)$$

$$\bar{F}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

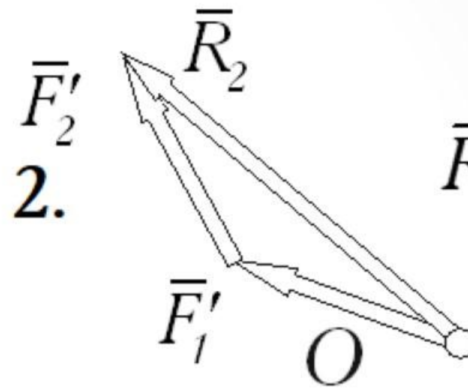
$$\left\{\bar{F}_k\right\}$$

Система сходящихся сил
Приведение к простейшему виду



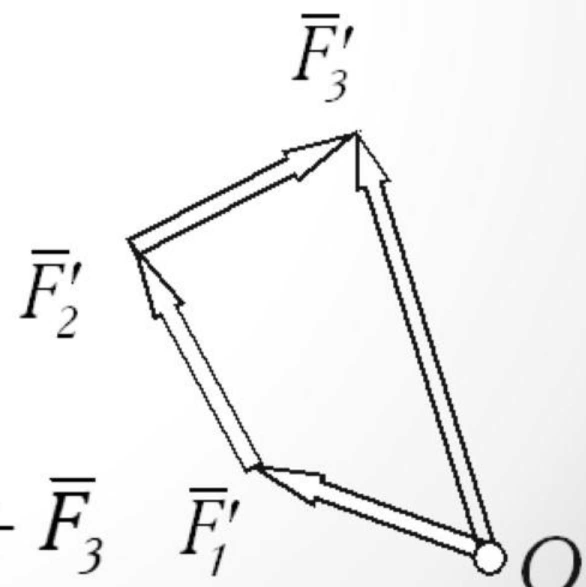
1. $\left\{\bar{F}_k\right\} \sim \left\{\bar{F}_k'\right\}$

2.



$$\bar{R}_2 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

3.



$$\bar{R}_3 = \bar{R}_2 + \bar{F}_3 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$$

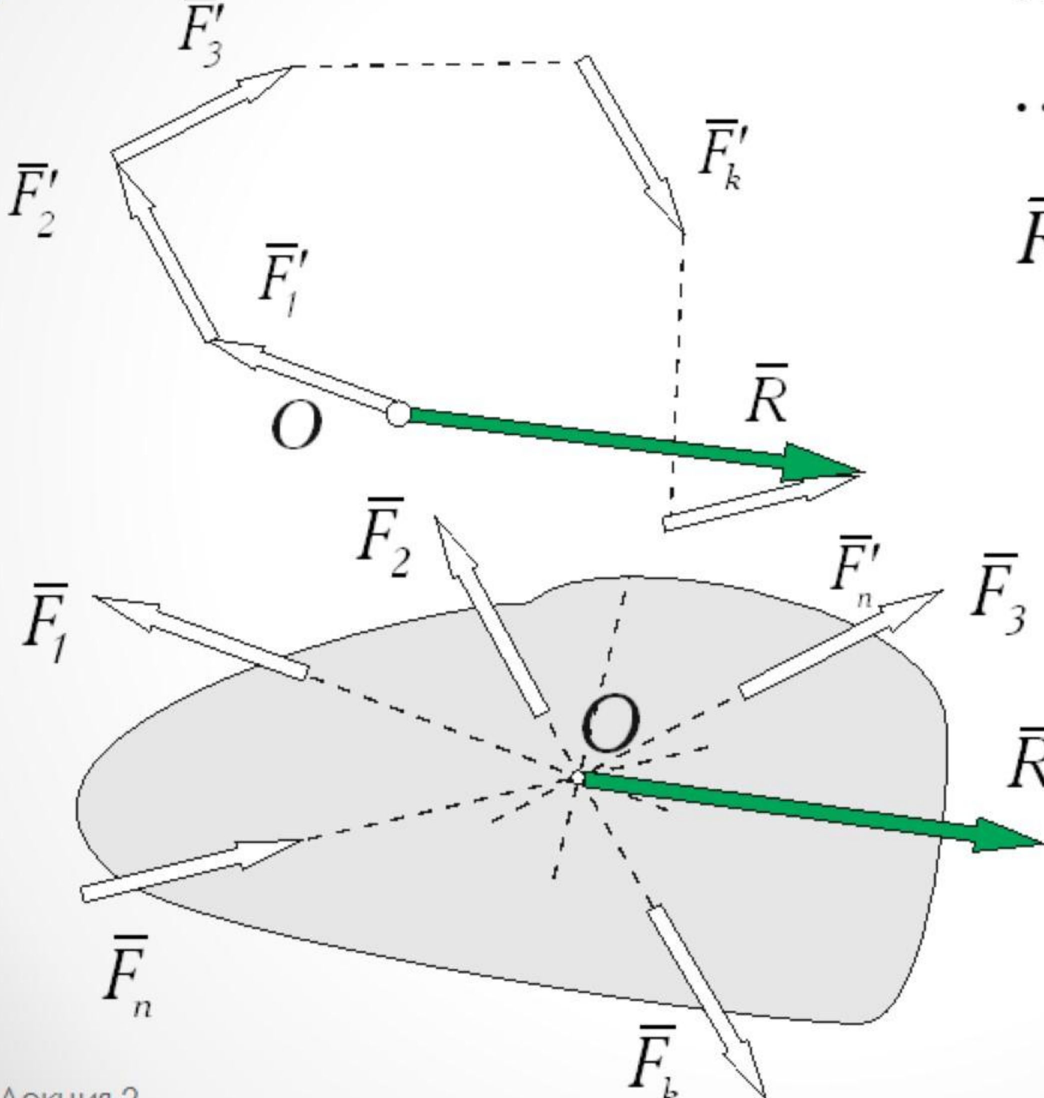
Система сходящихся сил
Приведение к простейшему виду

N.

…

…

$$\overline{R}_n = \overline{R}_{n-1} + \overline{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$$



$$\left\{\overline{F}_k\right\} \sim \overline{R}$$

Система сходящихся сил
Приведение к простейшему виду

Главным вектором системы сил называется геометрическая сумма всех векторов, входящих в систему

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k$$

Система сходящихся сил имеет равнодействующую, по величине и направлению равную главному вектору этой системы. Линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действий сил системы.

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \qquad \begin{cases} R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \\ R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \\ R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \end{cases}$$

Система сходящихся сил
Условия и уравнения равновесия

Для того, чтобы система сходящихся сил находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы был равен нулю.

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = 0$$

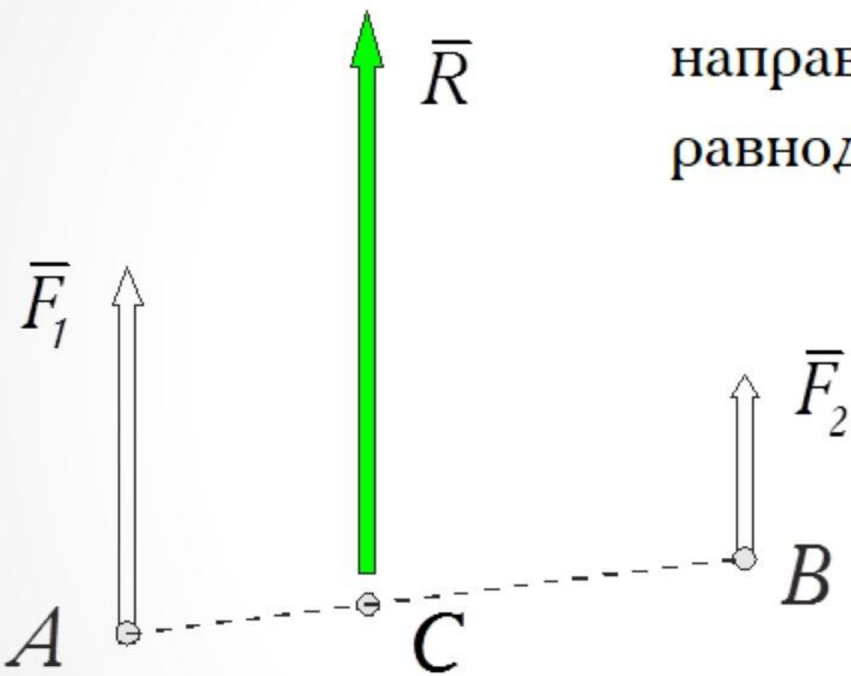
Пространственная система сил

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \end{cases}$$

Плоская система сил

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \end{cases}$$

Система двух параллельных сил



Система двух параллельных сил, направленных в одну сторону имеет равнодействующую.

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

$$R = F_1 + F_2$$

$$\overline{R} \uparrow\uparrow \overline{F}_1, \overline{F}_2$$

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1}$$

$$F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC$$

Система двух параллельных сил

Система двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны, имеет равнодействующую, если эти силы не равны по величине

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

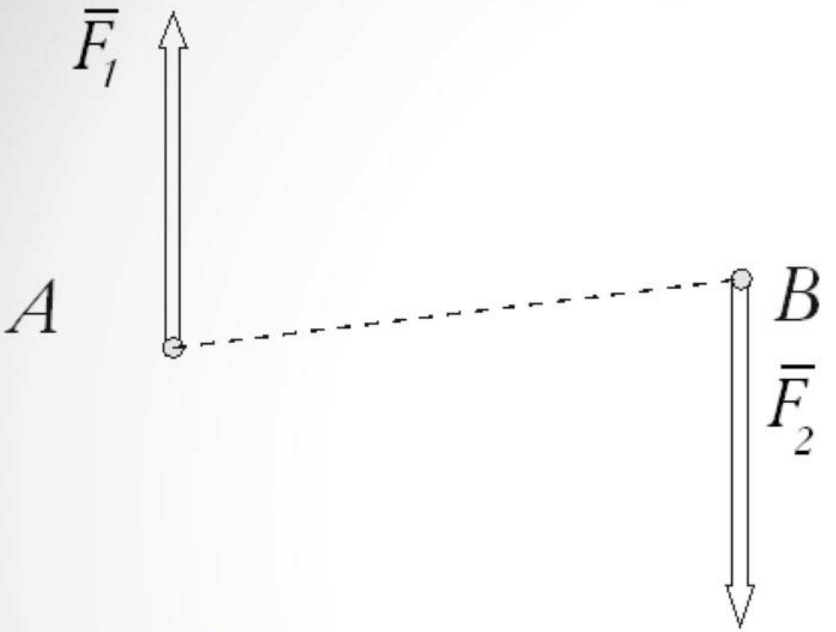
$$R = F_1 - F_2$$

$$\bar{R} \uparrow\uparrow \bar{F}_1$$

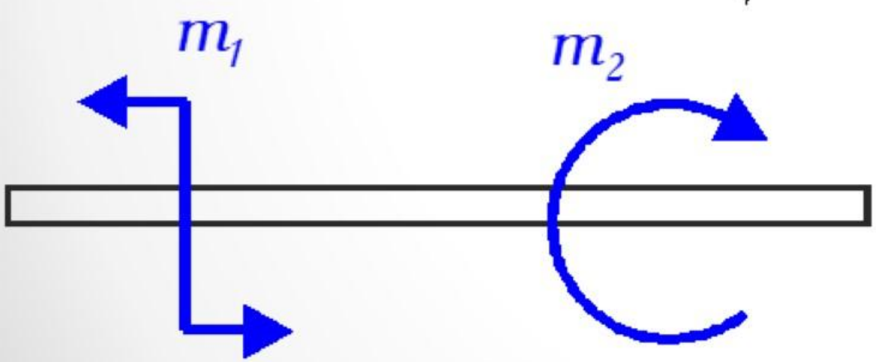
$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1}$$

$$F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC$$

Система двух параллельных сил



Парой сил называется система двух параллельных сил, имеющих равную величину, противоположное направление и параллельные линии действия.

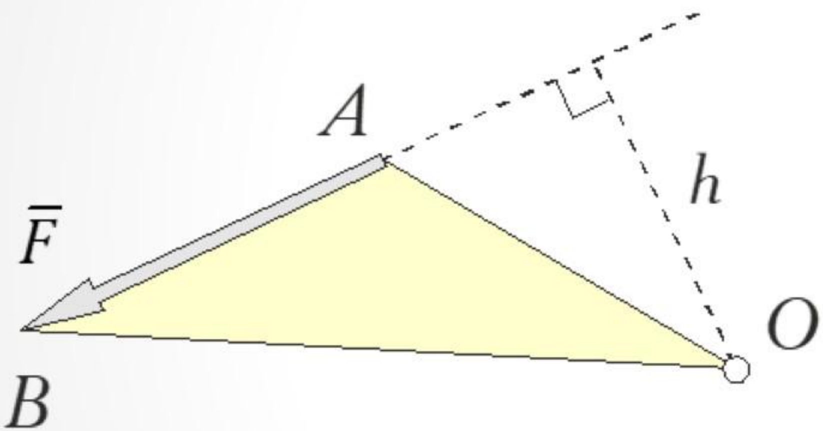


Пара сил не имеет равнодействующей (ее нельзя заменить одной силой). Действие пары сил на твердое тело характеризуется моментом этой пары.

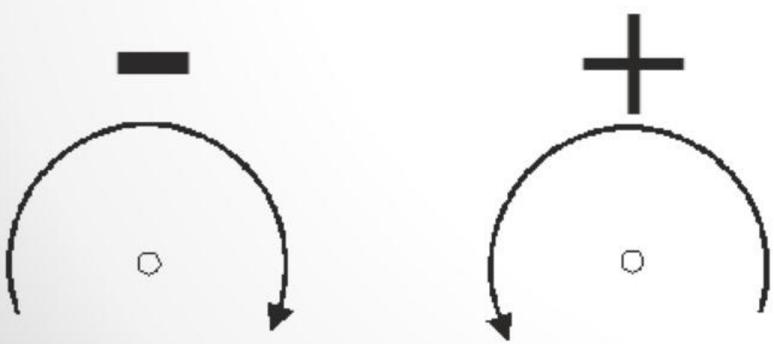
Момент силы

Момент силы относительно точки в плоскости есть скалярная величина, равная произведению модуля силы на ее плечо относительно выбранной точки.

$$m_O\left(\bar{F}\right) = \pm F \cdot h$$



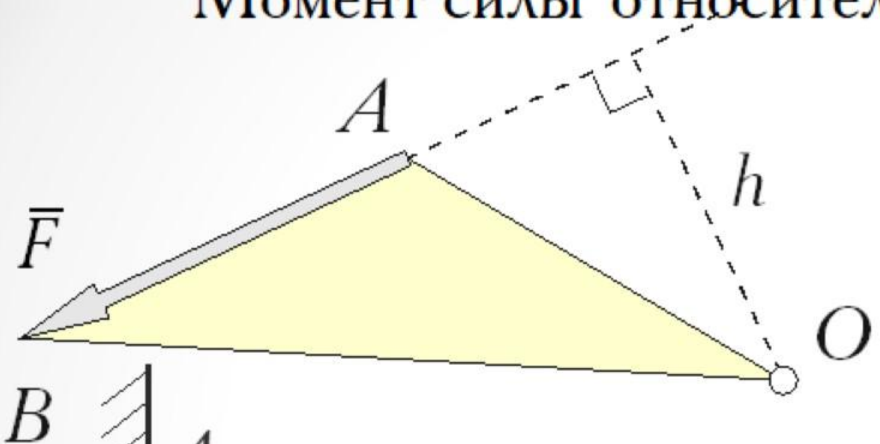
Плечо силы – кратчайшее расстояние от **линии действия силы** до той точки, относительно которой определяется момент.



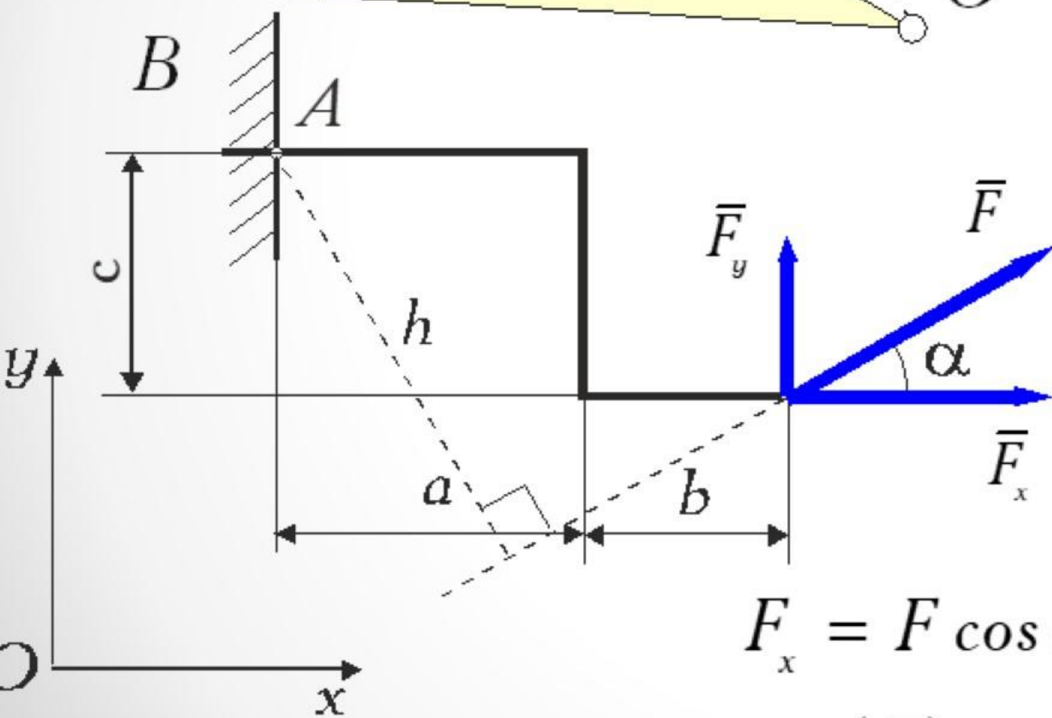
Момент силы определяется не точкой приложения силы, а линией ее действия.

Момент силы

Момент силы относительно точки в плоскости



$$m_O\left(\bar{F}\right) = 2S_{\Delta OAB}$$



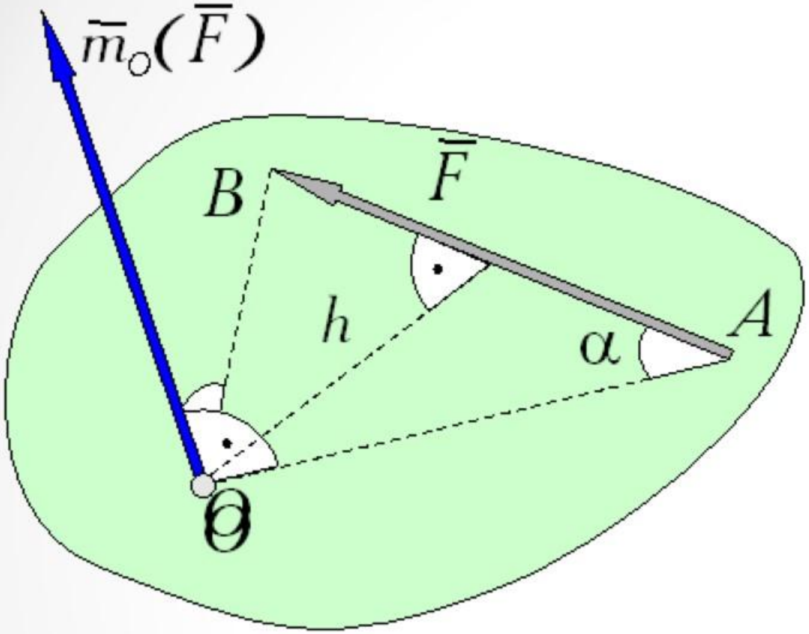
$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y$$

$$m_O\left(\bar{F}\right) = m_O\left(\bar{F}_x\right) + m_O\left(\bar{F}_y\right)$$

$$F_x = F\cos\alpha, \quad F_y = F\sin\alpha$$

$$m_A\left(\bar{F}\right) = F\cos\alpha \cdot c + F\sin\alpha \cdot \left(a+b\right)$$

Момент силы



Момент силы относительно точки в пространстве есть вектор, равный произведению модуля вектора силы на его плечо. Этот вектор направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектор силы и точка, относительно которой определяется момент. Вектор момента направлен так, что, глядя навстречу ему, мы будем видеть, что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки.

$$m_O\left(\overline{F}\right) = F \cdot h$$

$$\overline{m}_O\left(\overline{F}\right) \perp OA,\ \overline{m}_O\left(\overline{F}\right) \perp OB$$

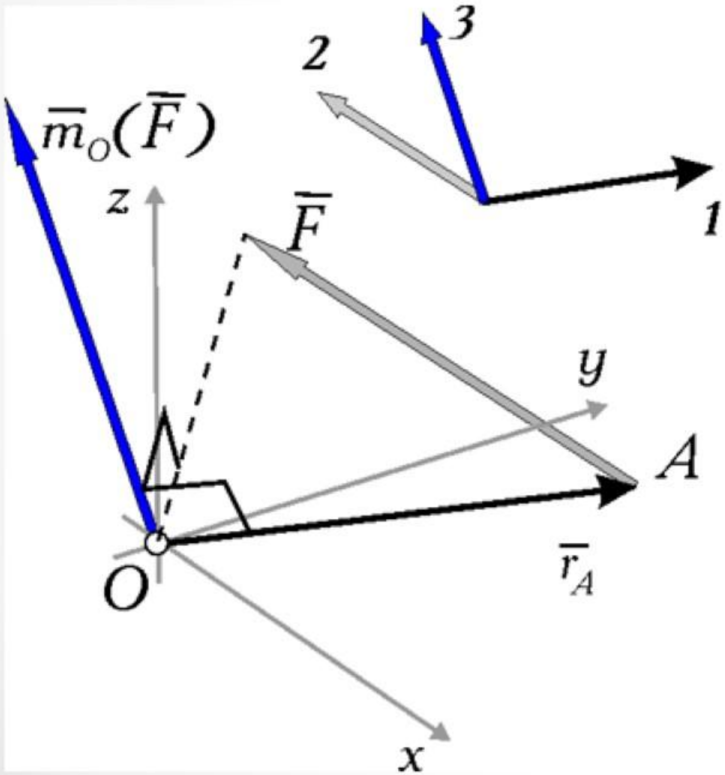
$$m_O\left(\overline{F}\right) = 2S_{\vartriangle OAB}$$

Момент силы относительно точки в пространстве

$$1.\, m_O\left(\bar{F}\right) = 2S_{\triangle OAB} = r_A \cdot F \cdot \sin\alpha$$

$$2.\, \bar{m}_O \perp \bar{r}_A,\ \ \bar{m}_O \perp \bar{F}$$

$$3.\left(\bar{r}_A, \bar{F}, \bar{m}_O\right)$$



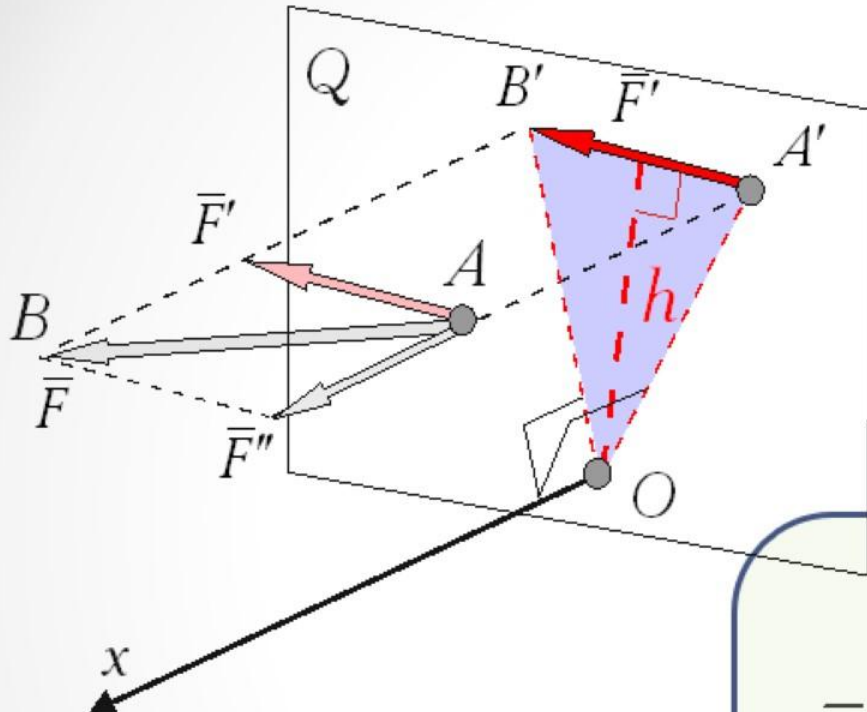
$$\bar{m}_O\left(\bar{F}\right) = \bar{r}_A \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$m_{Ox} = y_A F_z - z_A F_y$$

$$m_{Oy} = z_A F_x - x_A F_z$$

$$m_{Oz} = x_A F_y - y_A F_x$$

Момент силы относительно оси



$$пл.Q \perp Ox$$

$$m_x\left(\bar{F}\right) = F' \cdot h$$

$$m_x\left(\bar{F}\right) = 2S_{\Delta OA'B'}$$

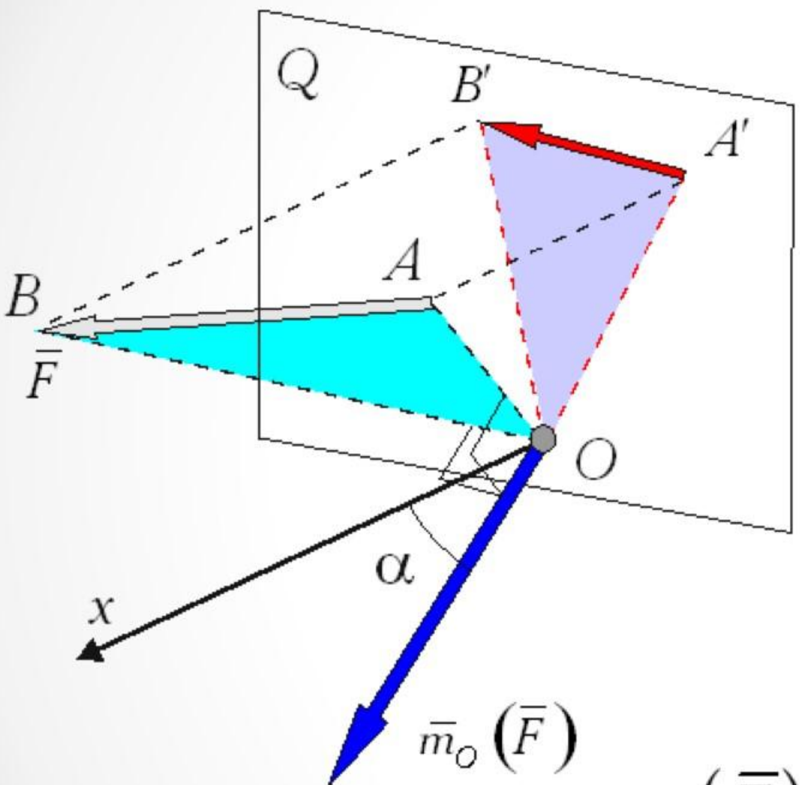
$$m_x\left(\bar{F}\right) = ?$$

$1. \bar{F} \parallel Ox,\ \ \bar{F} \cap Ox \Rightarrow m_x = 0$

$2. \bar{F} \perp Ox \Rightarrow\ h = ?$

$3.\ \bar{F} \dot{-} Ox \Rightarrow \bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y + \bar{F}_z$

Моменты силы относительно точки и оси



$$m_x(\bar{F}) = 2S_{\triangle OA'B'}$$

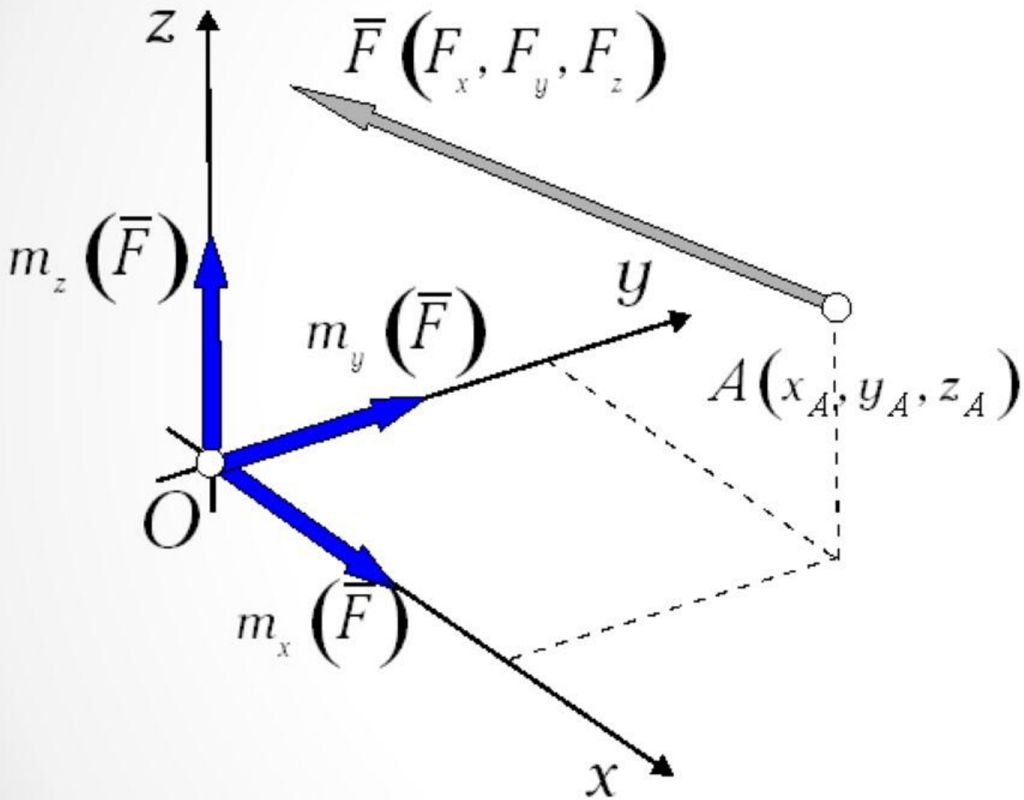
$$m_O(\bar{F}) = 2S_{\triangle OAB}$$

$$\bar{m}_O(\bar{F}) \perp OA, \;\; \bar{m}_O(\bar{F}) \perp OB$$

$$S_{\triangle OA'B'} = S_{\triangle OAB}\cos\alpha$$

$$m_x(\bar{F}) = m_O(\bar{F})\cos\alpha = np_{Ox}\left[m_O(\bar{F})\right]$$

Моменты силы относительно координатных осей

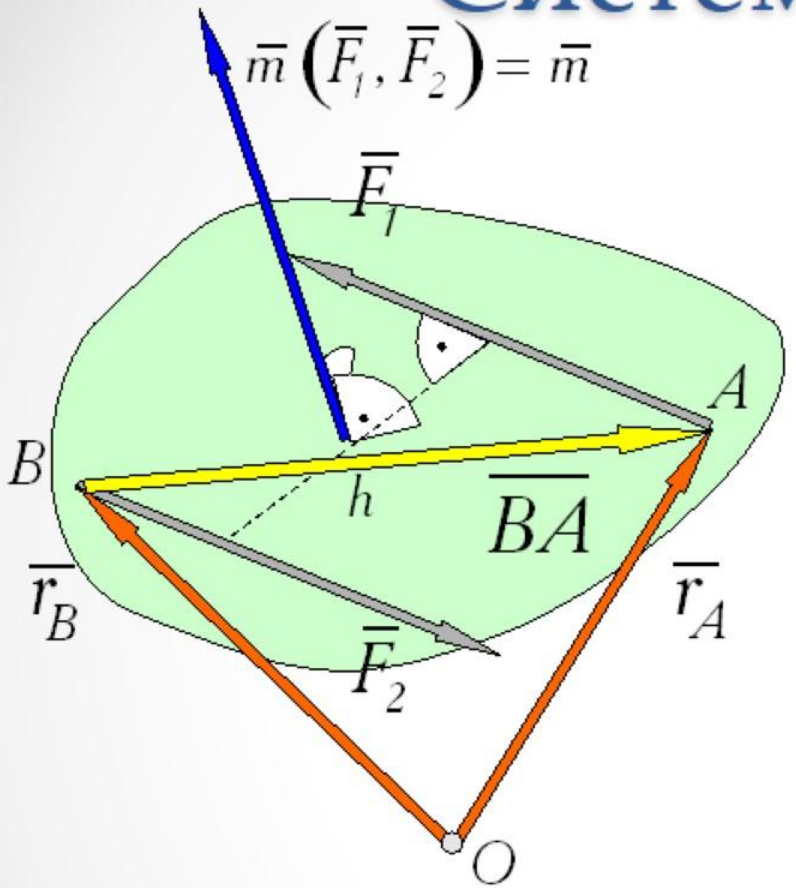


$$m_x\left(\overline{F}\right) = y_A F_z - z_A F_y$$

$$m_y\left(\overline{F}\right) = z_A F_x - x_A F_z$$

$$m_z\left(\overline{F}\right) = x_A F_y - y_A F_x$$

Система пар сил



Момент пары сил

$$\bar{m}_O\left(\bar{F}_1\right) + \bar{m}_O\left(\bar{F}_2\right) =$$

$$= \bar{r}_A \times \bar{F}_1 + \bar{r}_B \times \bar{F}_2 =$$

$$= \left(\bar{r}_A - \bar{r}_B\right) \times \bar{F}_1 =$$

$$= \overline{BA} \times \bar{F}_1 = \overline{AB} \times \bar{F}_2 =$$

$$= \bar{m}\left(\bar{F}_1, \bar{F}_2\right) = \bar{m}$$

Действие пары сил на твердое тело полностью определяется вектором момента этой пары.

Система пар сил

Две пары сил эквивалентны друг другу, если они имеют одинаковые моменты.

Сложение пар сил

$$\left(\bar{m}_1, \bar{m}_2\right) \sim \bar{m}, \quad \bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2$$

$$\left(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \ldots, \bar{m}_n\right) \sim \bar{m}, \quad \bar{m} = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_k$$

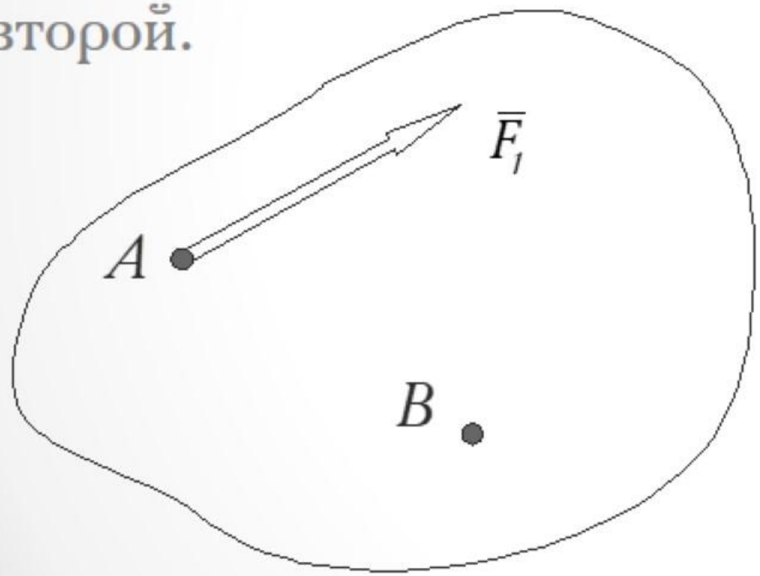
Условие и уравнения равновесия системы пар сил

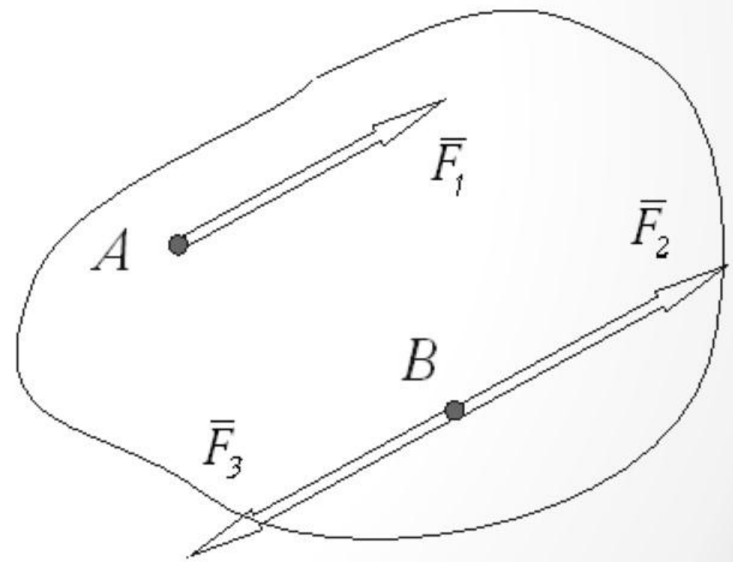
$$\bar{m} = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_k = 0$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} m_{kx} = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} m_{ky} = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} m_{kz} = 0 \end{cases}$$

Лемма о параллельном переносе силы

- Действие силы на твердое тело не изменится, если ее перенести параллельно самой себе в любую другую точку тела, добавив при этом пару сил, момент которой равен моменту силы, приложенной в первой точке относительно второй.

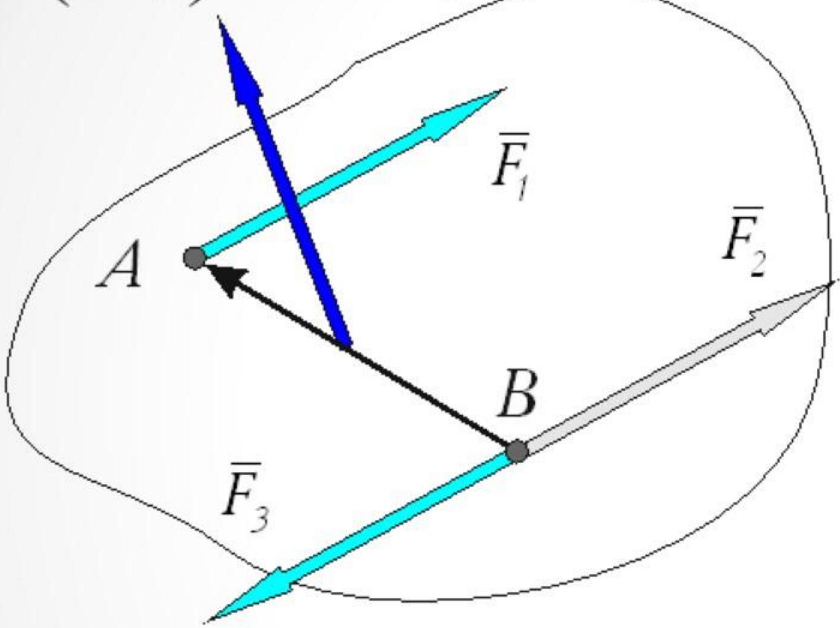


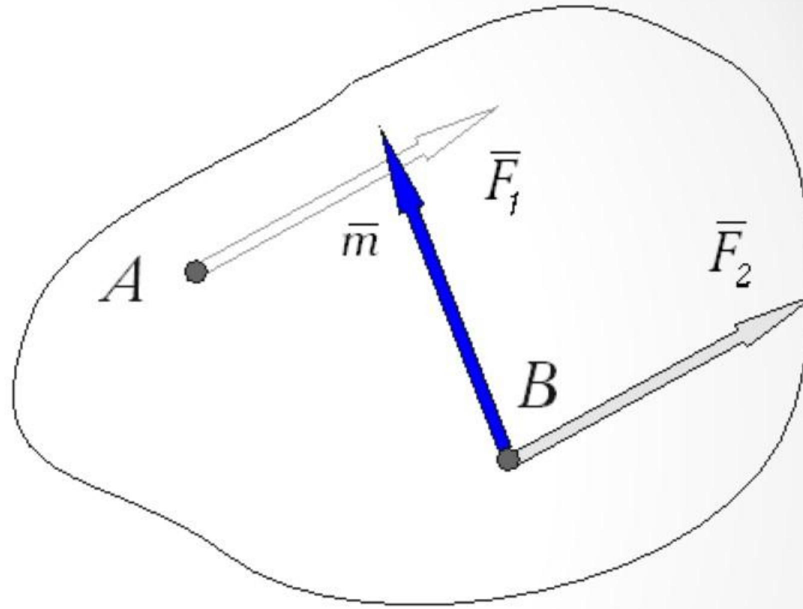


$$\overline{F}_2 = \overline{F}_1,\ \overline{F}_3 = -\overline{F}_2 \quad \Rightarrow \quad \overline{F}_1 \sim \left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\right)$$

Лемма о параллельном переносе силы

$$\bar{m}\left(\bar{F}_1, \bar{F}_3\right) = \overline{BA} \times \bar{F}_1$$





$$\left(\bar{F}_1, \bar{F}_3\right) \sim \bar{m}$$

$$\bar{m} = \bar{m}\left(\bar{F}_1, \bar{F}_3\right) = \overline{BA} \times \bar{F}_1$$

$$\bar{F}_1 = \left(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3\right) \sim \left(\bar{F}_2, \bar{m}\right)$$

Основная теорема статики (теорема Пуансо)

Система сил, приложенных к твердому телу, в любом центре может быть приведена к одной силе и одной паре сил. Сила по величине и направлению равна главному вектору системы сил, а момент пары сил — главному моменту системы сил, относительно выбранного центра.

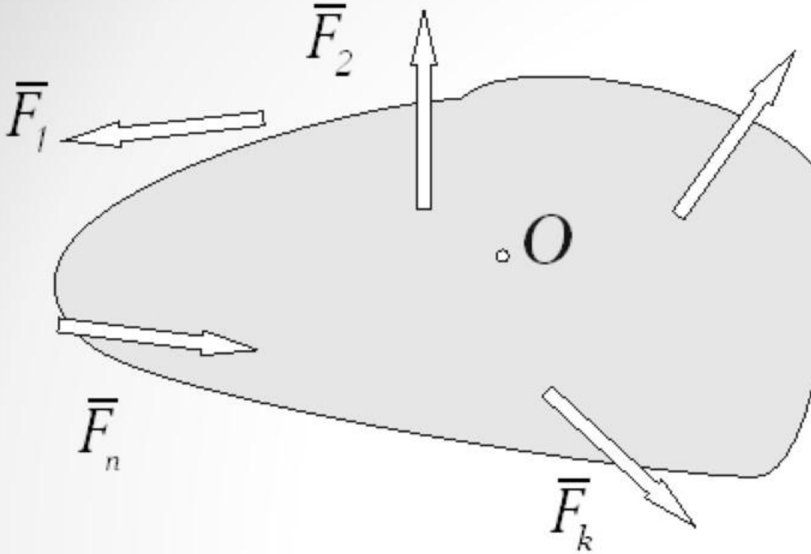
Главный вектор системы сил

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$$

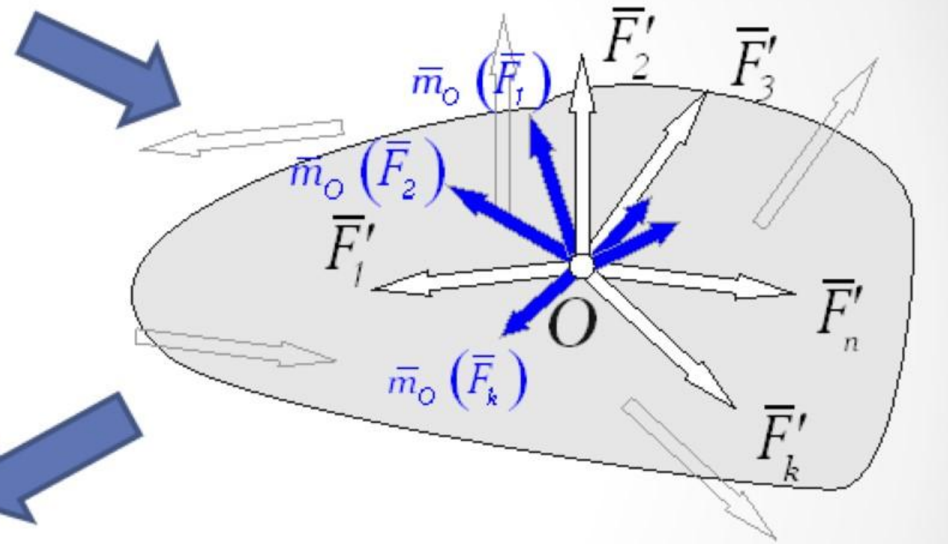
Главный момент системы сил относительно центра O

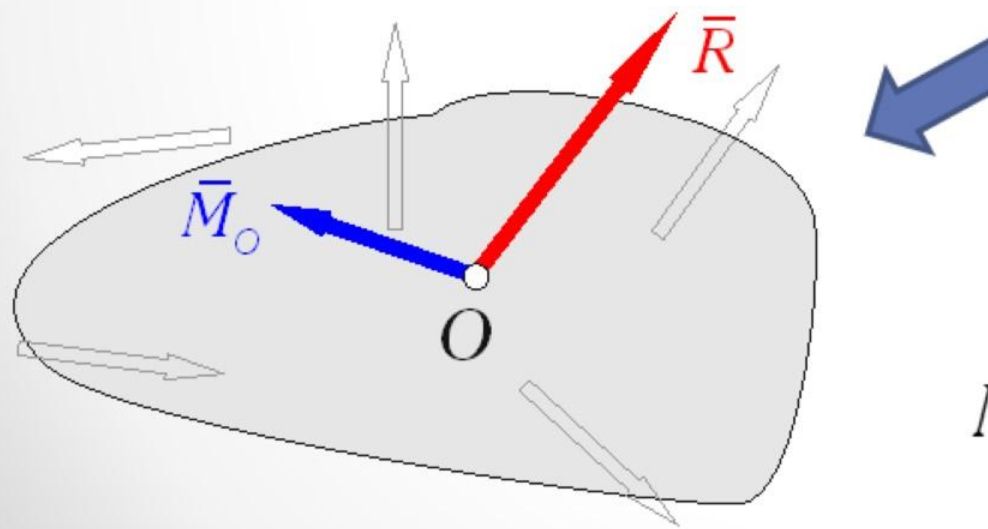
$$\overline{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O\left(\overline{F}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k$$

Основная теорема статики



$$\bar F_k \sim \left(\bar F'_k, \bar m_k\right), \quad \bar m_k = \bar m_O\left(\bar F_k\right)$$





$$\bar R = \sum_{k=1}^{n} \bar F'_k = \sum_{k=1}^{n} \bar F_k$$

$$\bar M_O = \sum_{k=1}^{n} \bar m_k = \sum_{k=1}^{n} \bar m_O\left(\bar F_k\right)$$

Статические инварианты системы сил

Главный вектор системы сил $\qquad \bar{R} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \qquad \bar{R}(\bar{r}_O) = const$

Главный вектор системы сил не зависит от выбора центра приведения – это первый ***статический инвариант системы сил.***

Главный момент системы сил относительно центра O $\qquad \bar{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\bar{F}_k)$

При смене моментной точки в общем случае изменятся моменты отдельных сил, а вместе с ними главный момент системы сил

$$\frac{\partial \bar{M}_O}{\partial \bar{r}_O} \neq 0, \ \bar{M}_O = f(\bar{r}_O) = var$$

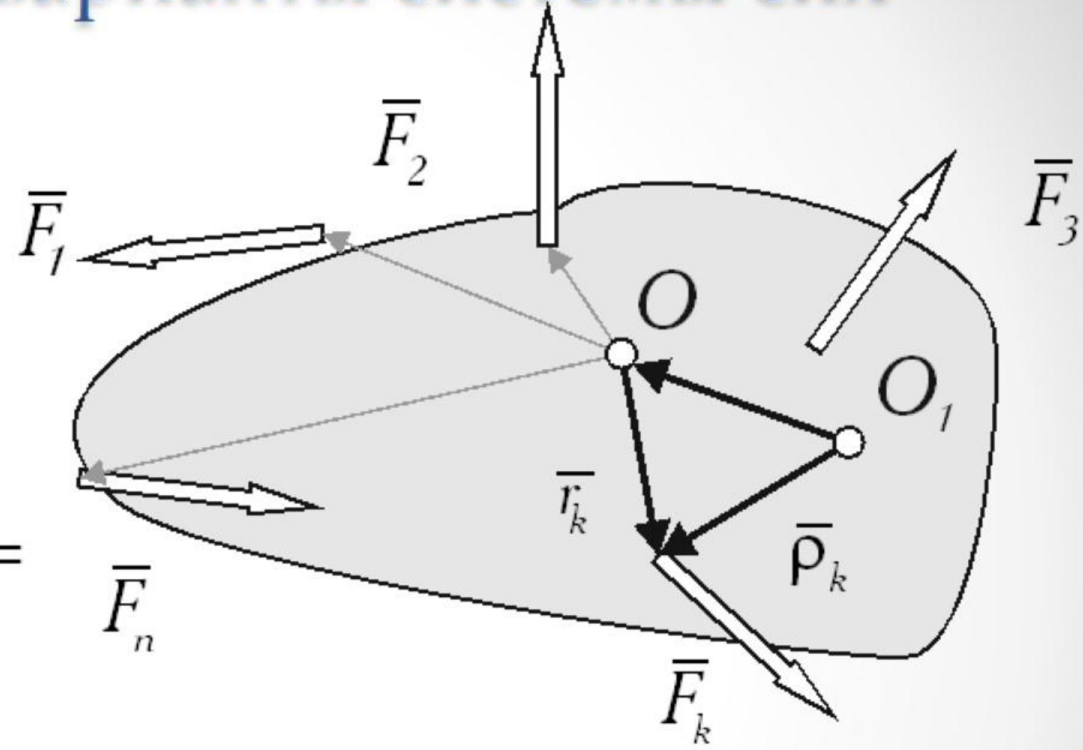
Статические инварианты системы сил

$$\bar{M}_{O1} = \sum_{k=1}^{n} \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{O_1O} + \bar{r}_k \right) \times \bar{F}_k =$$

$$= \overline{O_1O} \times \sum_{k=1}^{n} \bar{F} + \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times \bar{F}_k =$$

$$= \bar{M}_O + \overline{O_1O} \times \bar{R}$$



При смене центра приведения главный момент системы сил изменяется на величину, равную моменту главного вектора этой системы, приложенного в первом центре приведения, относительно второго центра.

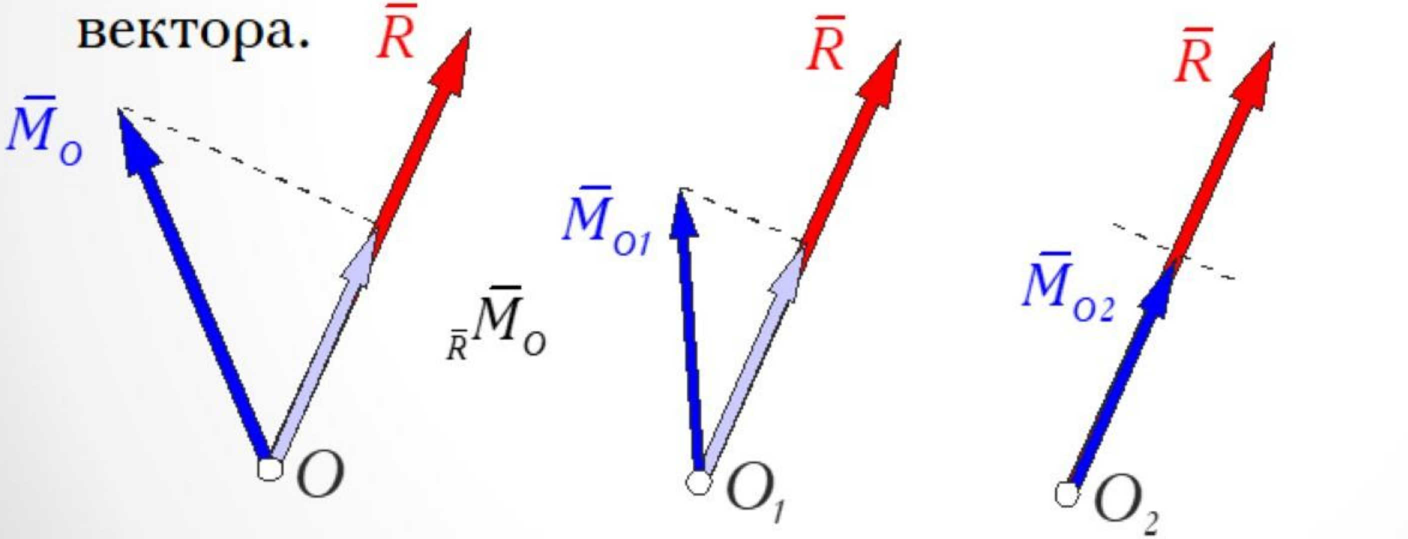
Статические инварианты системы сил

$$\bar{M}_{O1} = \bar{M}_O + \overline{O_1O} \times \bar{R} \Big| \cdot \bar{R}$$

$$\bar{M}_{O1} \cdot \bar{R} = \bar{M}_O \cdot \bar{R} = const$$

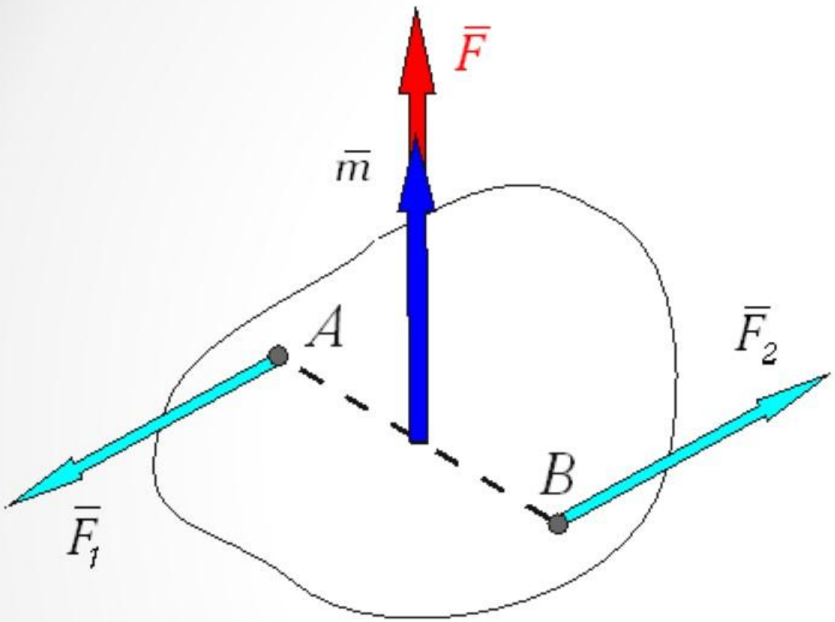
$$\frac{\bar{M}_O \cdot \bar{R}}{R} = np_{\bar{R}}\bar{M}_O$$

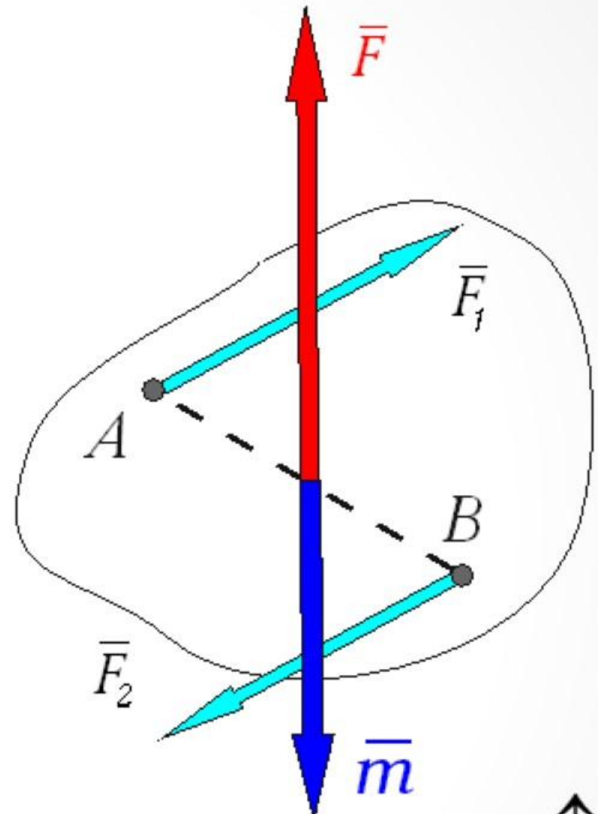
Второй ***статический инвариант системы сил*** – проекция главного момента на направление главного вектора.



$$\bar{M}_{O2} = np_{\bar{R}}\bar{M}_O = min\,\bar{M}_{OJ}$$

Динамический винт





$\bar{m} \uparrow\uparrow \bar{F}$

$\bar{m} \uparrow\downarrow \bar{F}$

Правый винт

Левый винт