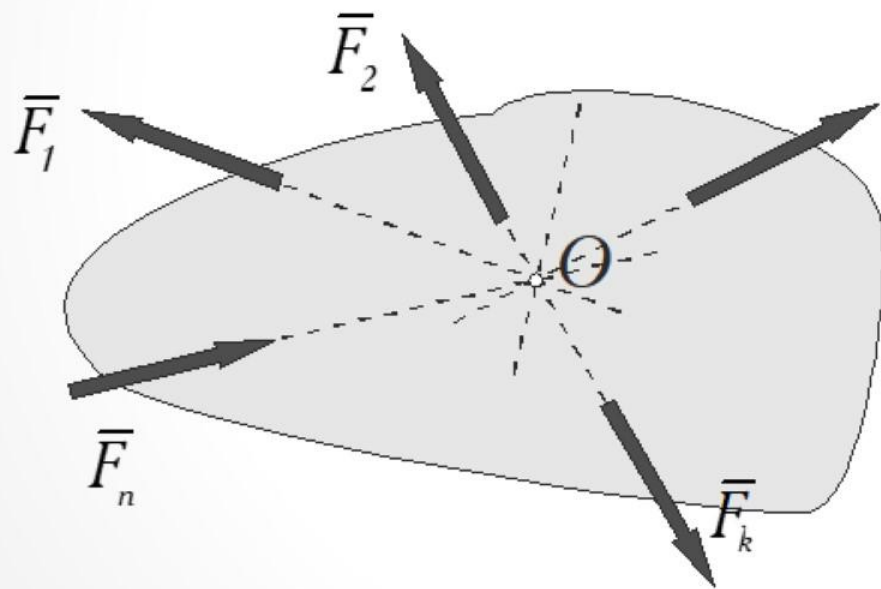


Простейшие системы сил. Момент силы

Лекция 2

Система сходящихся сил

Силы называются сходящимися, если линии их действия пересекаются в одной точке.



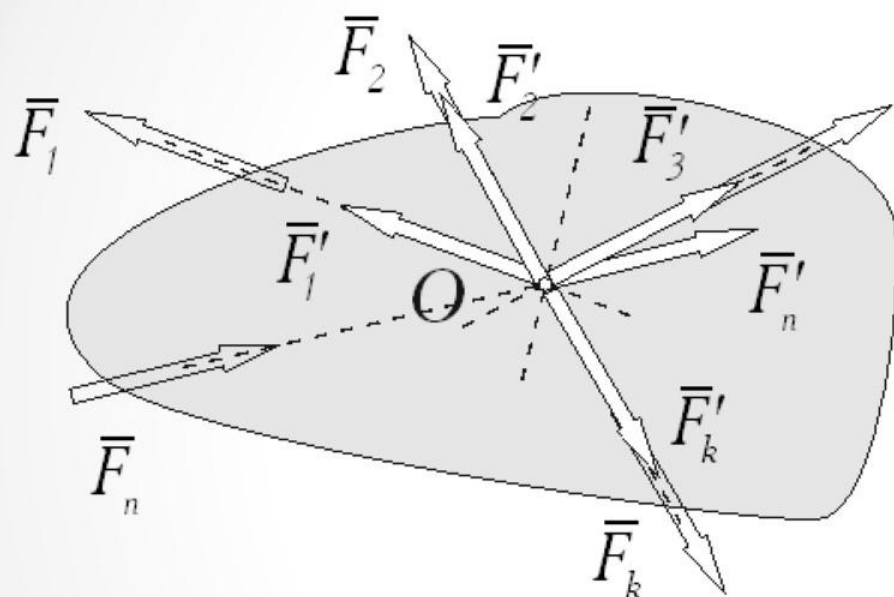
$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_k, \dots, \bar{F}_n)$$

$$\bar{F}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

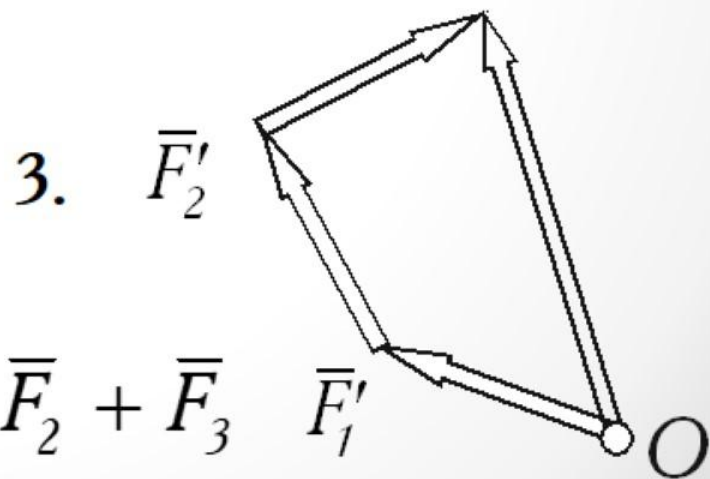
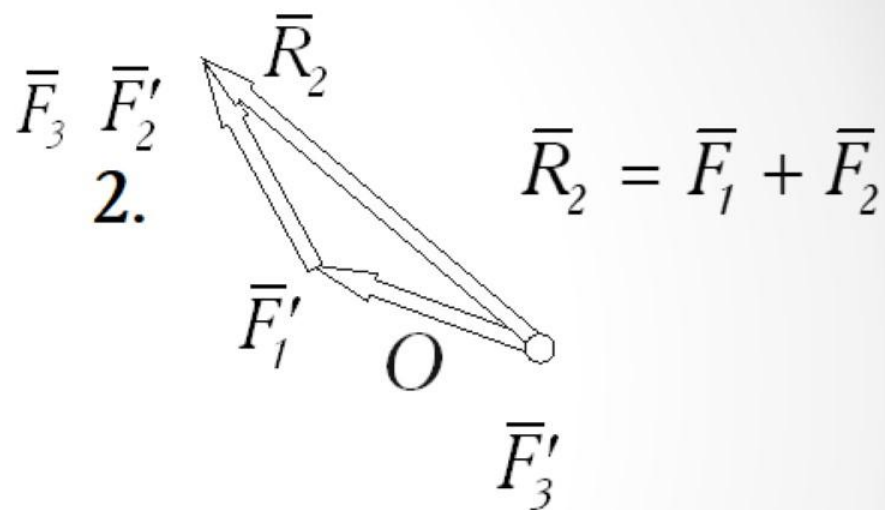
$$\{\bar{F}_k\}$$

Система сходящихся сил

Приведение к простейшему виду



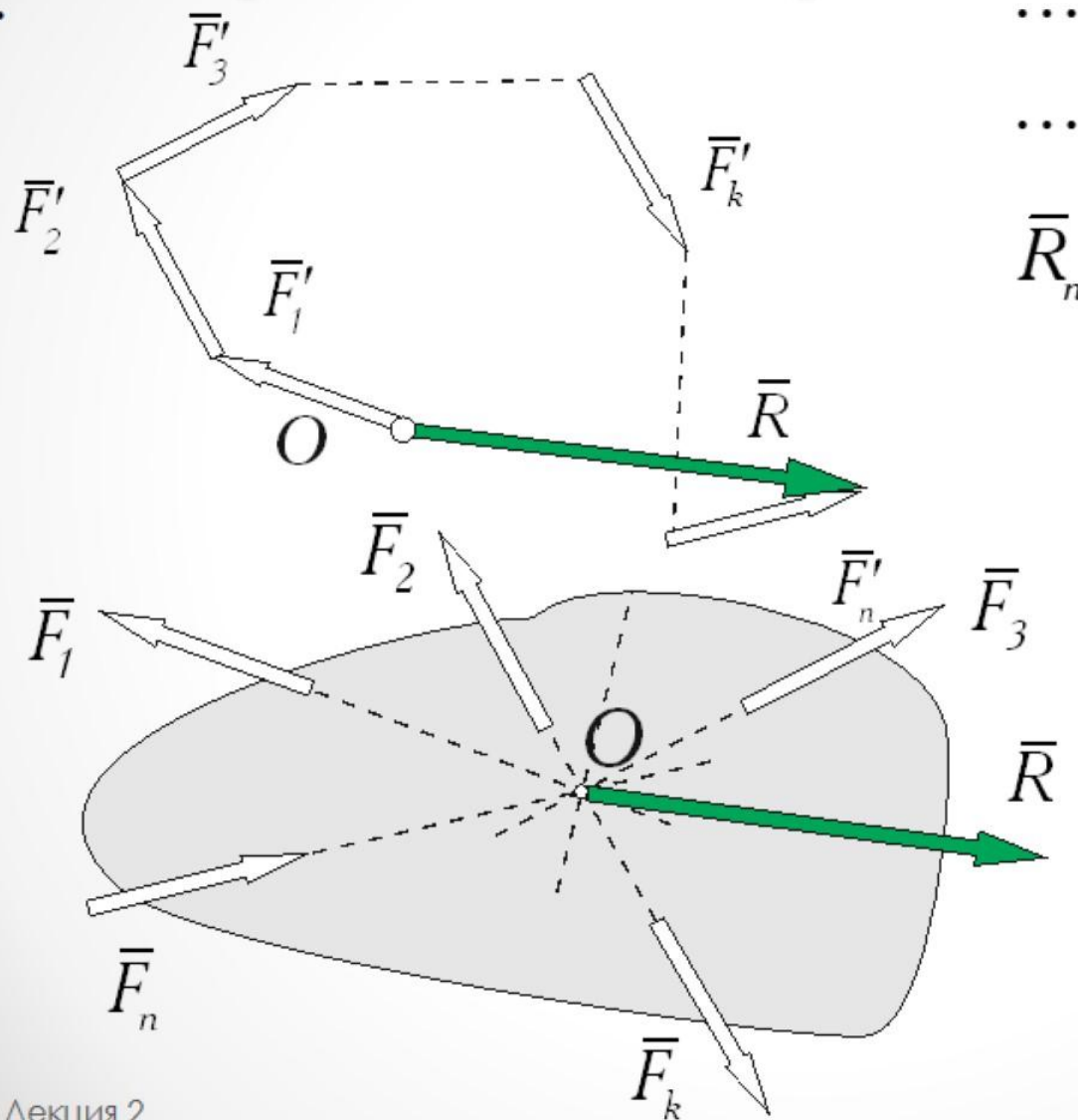
1. $\{\bar{F}_k\} \sim \{\bar{F}'_k\}$



Система сходящихся сил

Приведение к простейшему виду

N.



$$\bar{R}_n = \bar{R}_{n-1} + \bar{F}_n = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$$

$$\{\bar{F}_k\} \sim \bar{R}$$

Система сходящихся сил

Приведение к простейшему виду

Главным вектором системы сил называется геометрическая сумма всех векторов, входящих в систему

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$$

Система сходящихся сил имеет равнодействующую, по величине и направлению равную главному вектору этой системы. Линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действий сил системы.

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \quad \left\{ \begin{array}{l} R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} \\ R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} \\ R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} \end{array} \right.$$

Система сходящихся сил

Условия и уравнения равновесия

Для того, чтобы система сходящихся сил находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы был равен нулю.

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0$$

Пространственная
система сил

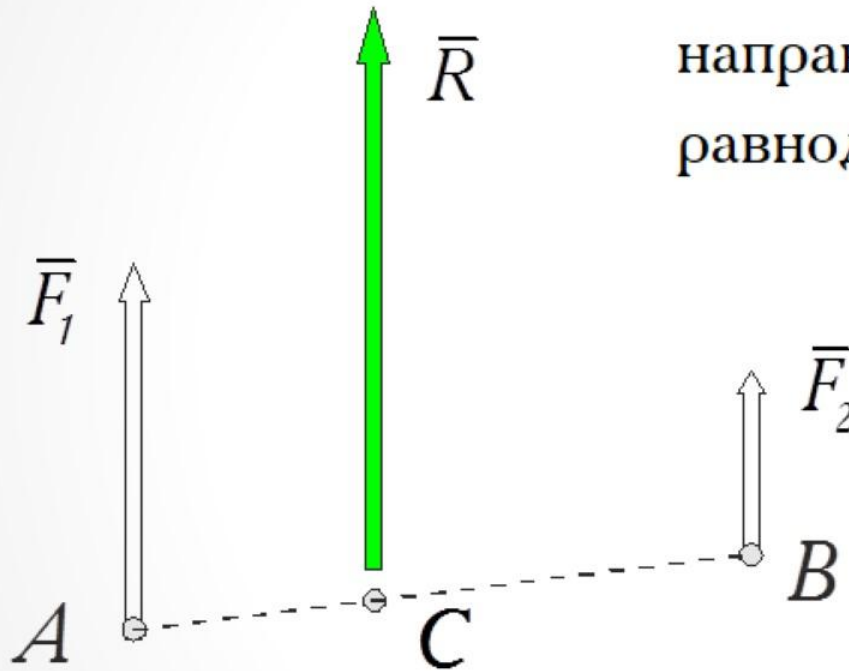
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0 \end{cases}$$

Плоская
система сил

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \end{cases}$$

Система двух параллельных сил

Система двух параллельных сил, направленных в одну сторону имеет равнодействующую.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$R = F_1 + F_2$$

$$\vec{R} \uparrow \uparrow \vec{F}_1, \vec{F}_2$$

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1}$$

$$F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC$$

Система двух параллельных сил

Система двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны, имеет равнодействующую, если эти силы не равны по величине



$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1}$$

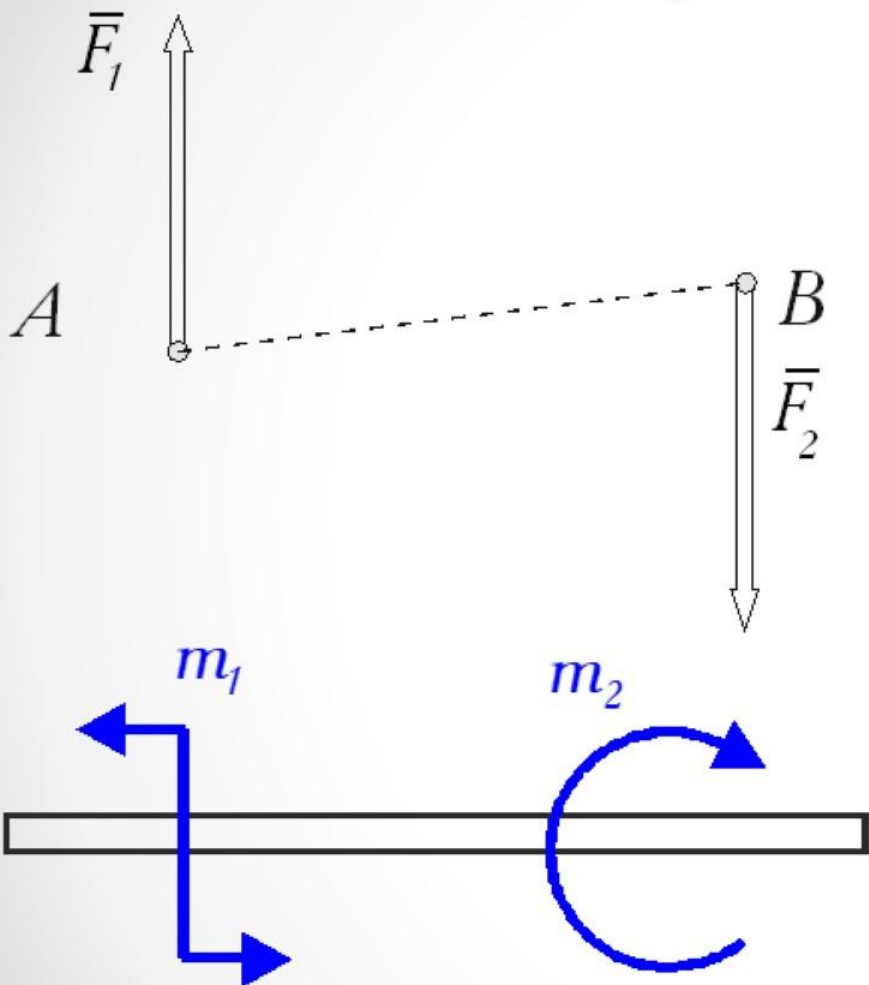
$$F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$R = F_1 - F_2$$

$$\vec{R} \uparrow \uparrow \vec{F}_1$$

Система двух параллельных сил



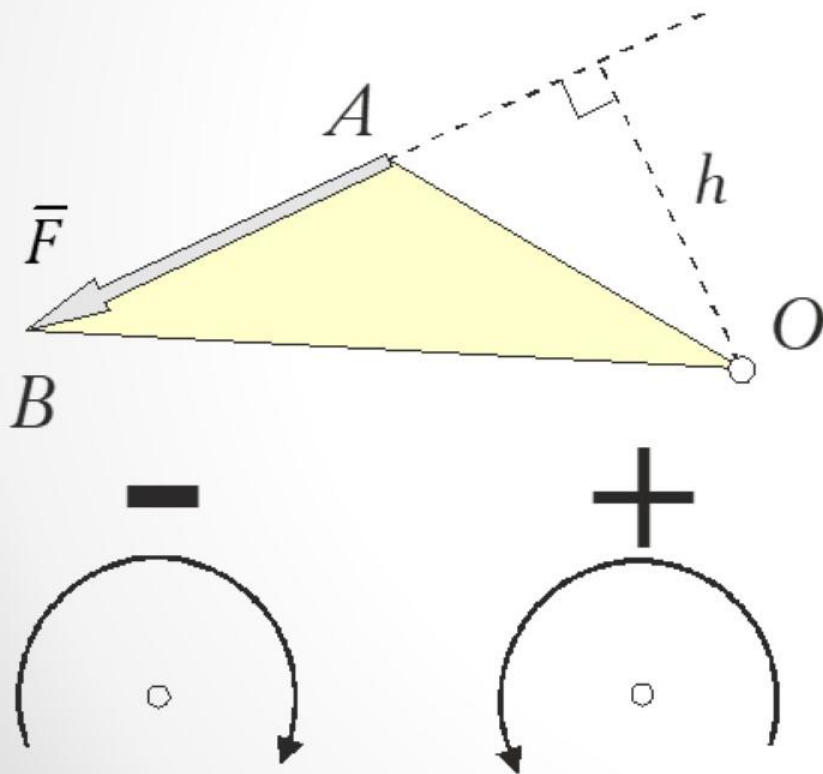
Парой сил называется система двух параллельных сил, имеющих равную величину, противоположное направление и параллельные линии действия.

Пара сил не имеет равнодействующей (ее нельзя заменить одной силой). Действие пары сил на твердое тело характеризуется моментом этой пары.

Момент силы

Момент силы относительно точки в плоскости есть скалярная величина, равная произведению модуля силы на ее плечо относительно выбранной точки.

$$m_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h$$



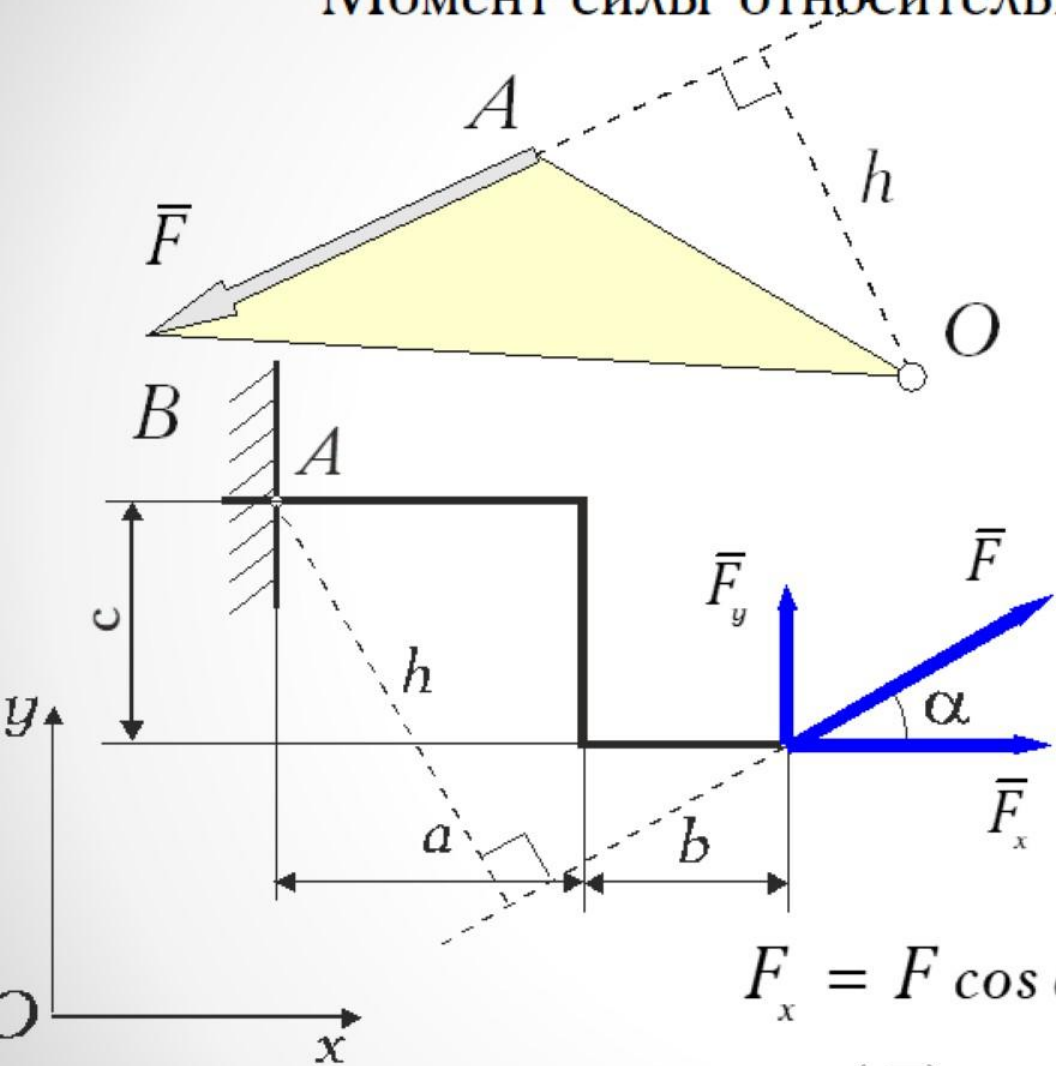
Плечо силы — кратчайшее расстояние от **линии действия силы** до той точки, относительно которой определяется момент.

Момент силы определяется не точкой приложения силы, а линией ее действия.

Момент силы

Момент силы относительно точки в плоскости

$$m_O(\bar{F}) = 2S_{\Delta OAB}$$



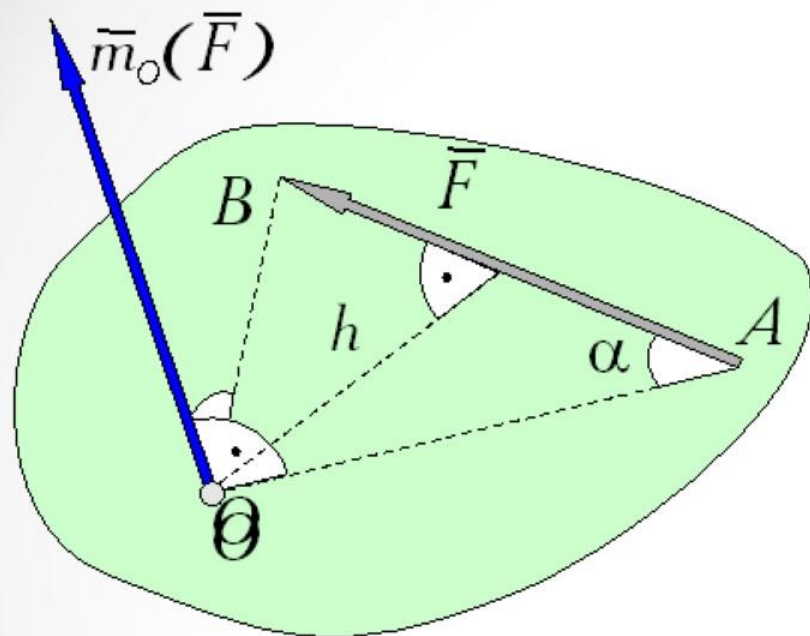
$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y$$

$$m_O(\bar{F}) = m_O(\bar{F}_x) + m_O(\bar{F}_y)$$

$$F_x = F \cos \alpha, \quad F_y = F \sin \alpha$$

$$m_A(\bar{F}) = F \cos \alpha \cdot c + F \sin \alpha \cdot (a + b)$$

Момент силы



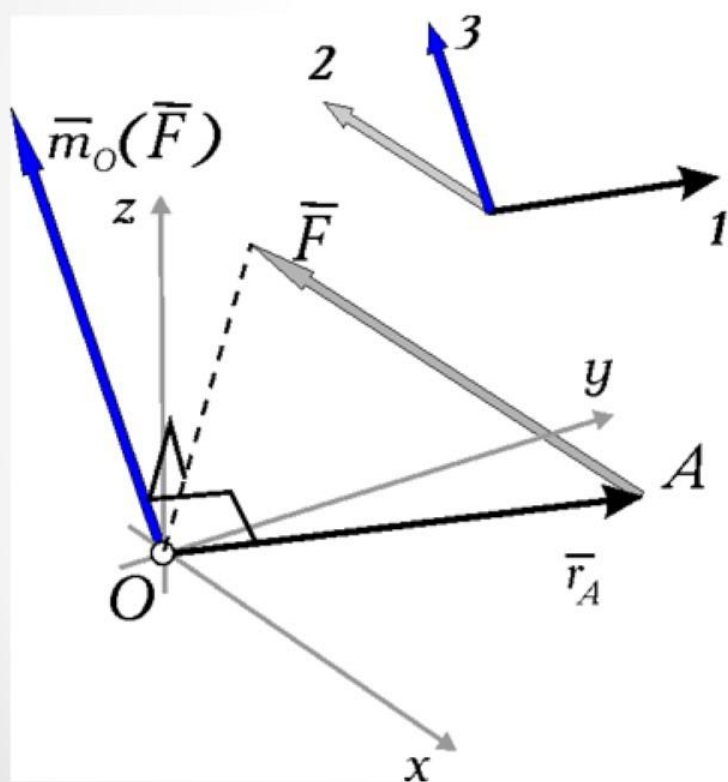
$$m_O(\vec{F}) = F \cdot h$$

$$\vec{m}_O(\vec{F}) \perp OA, \vec{m}_O(\vec{F}) \perp OB$$

$$m_O(\vec{F}) = 2S_{\triangle OAB}$$

Момент силы относительно точки в пространстве есть вектор, равный произведению модуля вектора силы на его плечо. Этот вектор направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектор силы и точка, относительно которой определяется момент. Вектор момента направлен так, что, глядя навстречу ему, мы будем видеть, что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки.

Момент силы относительно точки в пространстве



1. $m_O(\vec{F}) = 2S_{\triangle OAB} = r_A \cdot F \cdot \sin \alpha$
2. $\vec{m}_O \perp \vec{r}_A, \vec{m}_O \perp \vec{F}$
3. $(\vec{r}_A, \vec{F}, \vec{m}_O)$

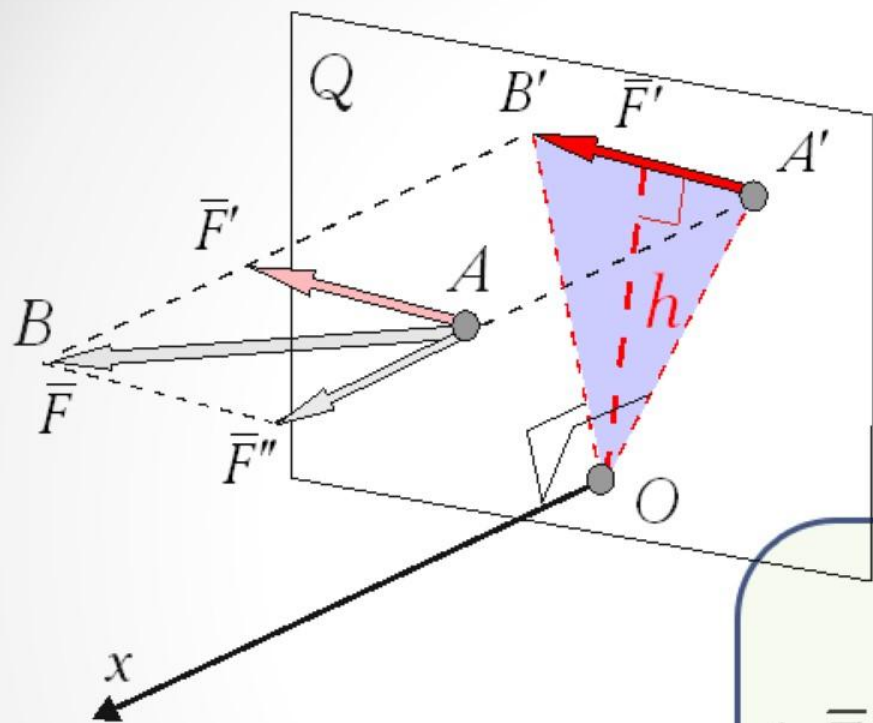
$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$m_{Ox} = y_A F_z - z_A F_y$$

$$m_{Oy} = z_A F_x - x_A F_z$$

$$m_{Oz} = x_A F_y - y_A F_x$$

Момент силы относительно оси



$$пл. Q \perp Ox$$

$$m_x(\bar{F}) = F' \cdot h$$

$$m_x(\bar{F}) = 2S_{\Delta OA'B'}$$

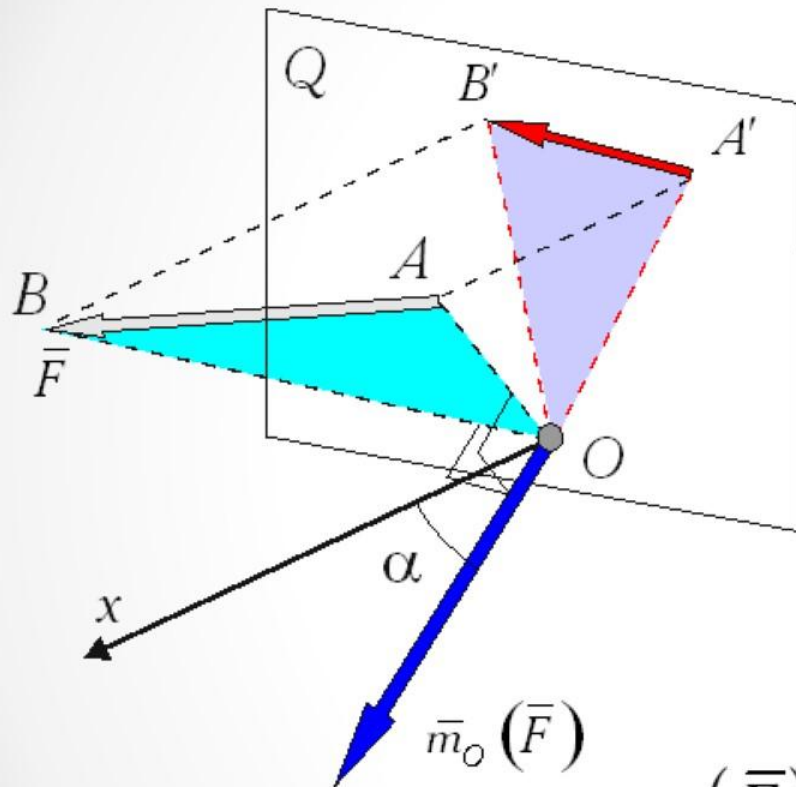
$$m_x(\bar{F}) = ?$$

$$1. \bar{F} \parallel Ox, \bar{F} \cap Ox \Rightarrow m_x = 0$$

$$2. \bar{F} \perp Ox \Rightarrow h = ?$$

$$3. \bar{F} \nabla Ox \Rightarrow \bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y + \bar{F}_z$$

Моменты силы относительно точки и оси



$$m_x(\vec{F}) = 2S_{\Delta OA'B'}$$

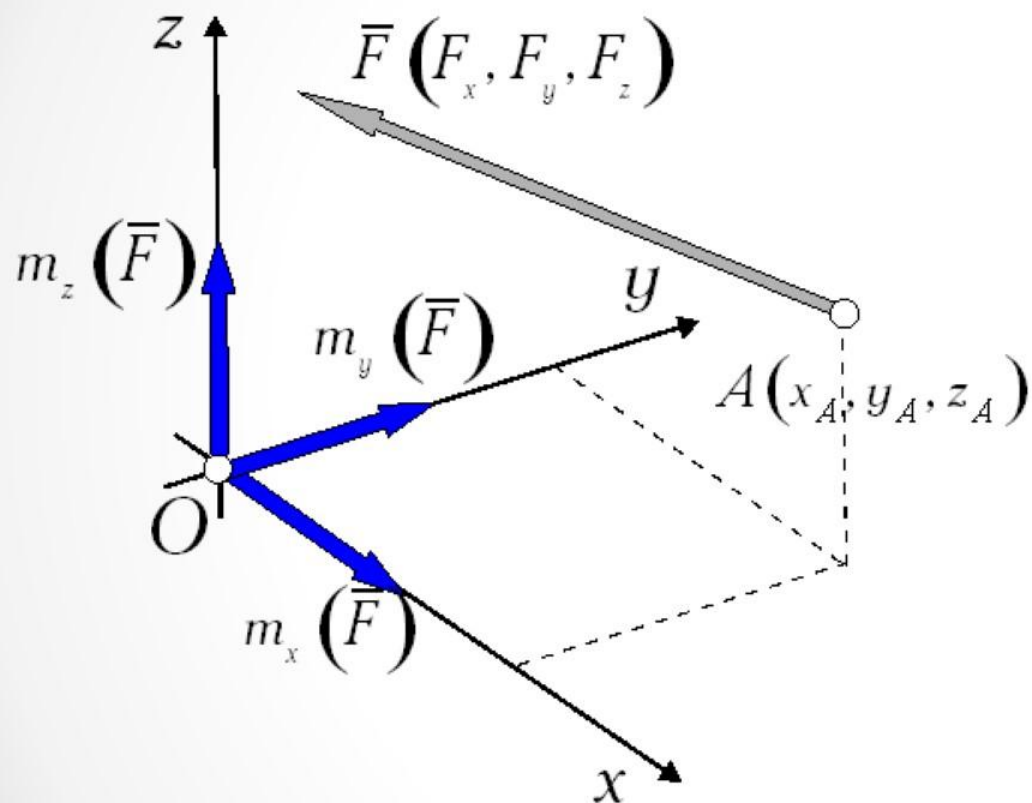
$$m_O(\vec{F}) = 2S_{\Delta OAB}$$

$$\vec{m}_O(\vec{F}) \perp OA, \vec{m}_O(\vec{F}) \perp OB$$

$$S_{\Delta OA'B'} = S_{\Delta OAB} \cos \alpha$$

$$m_x(\vec{F}) = m_O(\vec{F}) \cos \alpha = n\rho_{Ox} [m_O(\vec{F})]$$

Моменты силы относительно координатных осей

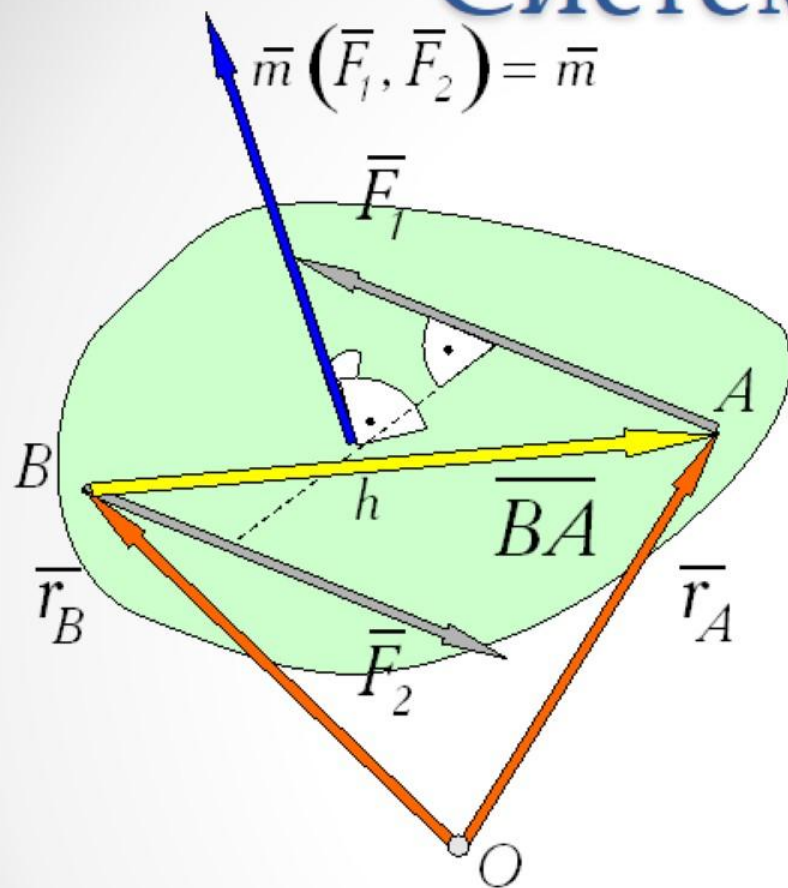


$$m_x(\vec{F}) = y_A F_z - z_A F_y$$

$$m_y(\vec{F}) = z_A F_x - x_A F_z$$

$$m_z(\vec{F}) = x_A F_y - y_A F_x$$

Система пар сил



Момент пары сил

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_O(\bar{F}_1) + \bar{m}_O(\bar{F}_2) &= \\
 &= \bar{r}_A \times \bar{F}_1 + \bar{r}_B \times \bar{F}_2 = \\
 &= (\bar{r}_A - \bar{r}_B) \times \bar{F}_1 = \\
 &= \overline{BA} \times \bar{F}_1 = \overline{AB} \times \bar{F}_2 = \\
 &= \bar{m}(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = \bar{m}
 \end{aligned}$$

Действие пары сил на твердое тело полностью определяется вектором момента этой пары.

Система пар сил

Две пары сил эквивалентны друг другу, если они имеют одинаковые моменты.

Сложение пар сил

$$(\bar{m}_1, \bar{m}_2) \sim \bar{m}, \quad \bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2$$

$$(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n) \sim \bar{m}, \quad \bar{m} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k$$

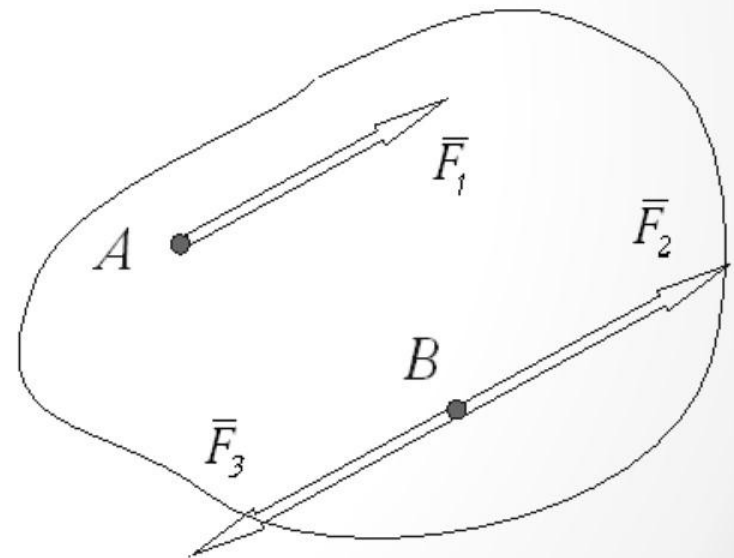
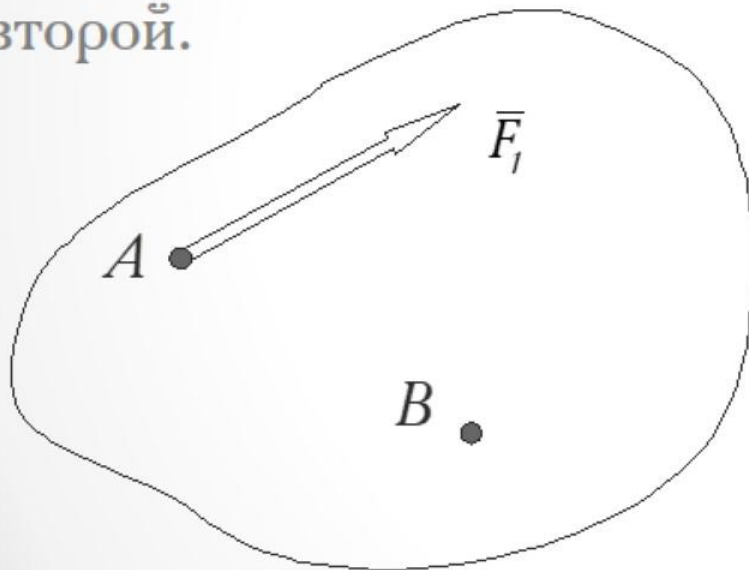
Условие и уравнения
равновесия системы пар сил

$$\bar{m} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n m_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n m_{ky} = 0 \\ \sum_{k=1}^n m_{kz} = 0 \end{array} \right.$$

Лемма о параллельном переносе силы

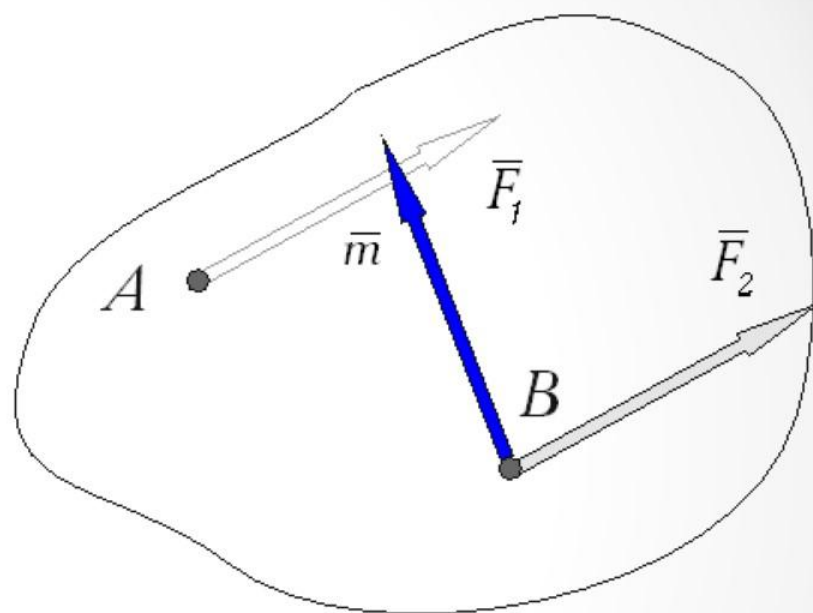
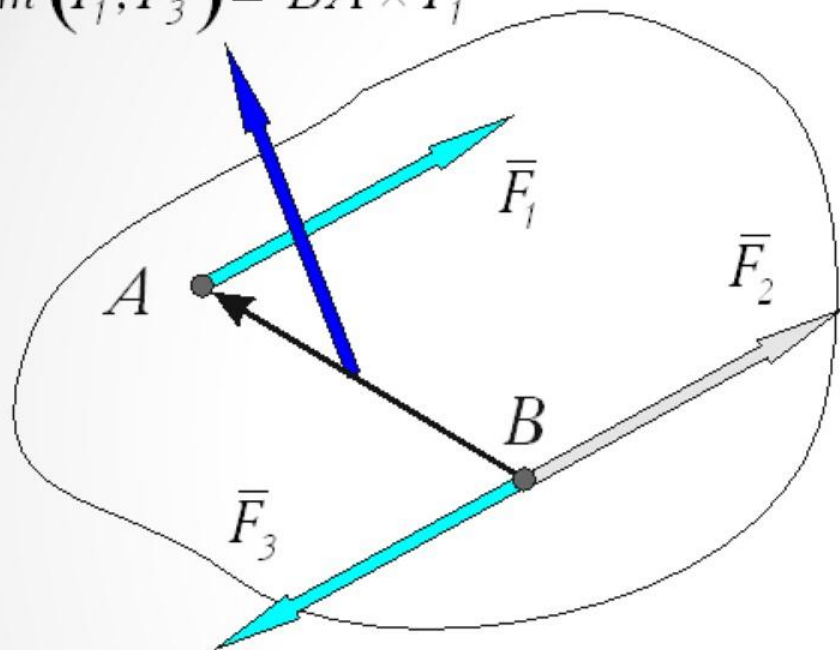
- Действие силы на твердое тело не изменится, если ее перенести параллельно самой себе в любую другую точку тела, добавив при этом пару сил, момент которой равен моменту силы, приложенной в первой точке относительно второй.



$$\vec{F}_2 = \vec{F}_1, \vec{F}_3 = -\vec{F}_2 \quad \longrightarrow \quad \vec{F}_1 \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$$

Лемма о параллельном переносе силы

$$\bar{m}(\bar{F}_1, \bar{F}_3) = \overline{BA} \times \bar{F}_1$$



$$(\bar{F}_1, \bar{F}_3) \sim \bar{m}$$

$$\bar{F}_1 = (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3) \sim (\bar{F}_2, \bar{m})$$

$$\bar{m} = \bar{m}(\bar{F}_1, \bar{F}_3) = \overline{BA} \times \bar{F}_1$$

Основная теорема статике

(теорема Пуансо)

Система сил, приложенных к твердому телу, в любом центре может быть приведена к одной силе и одной паре сил. Сила по величине и направлению равна главному вектору системы сил, а момент пары сил — главному моменту системы сил, относительно выбранного центра.

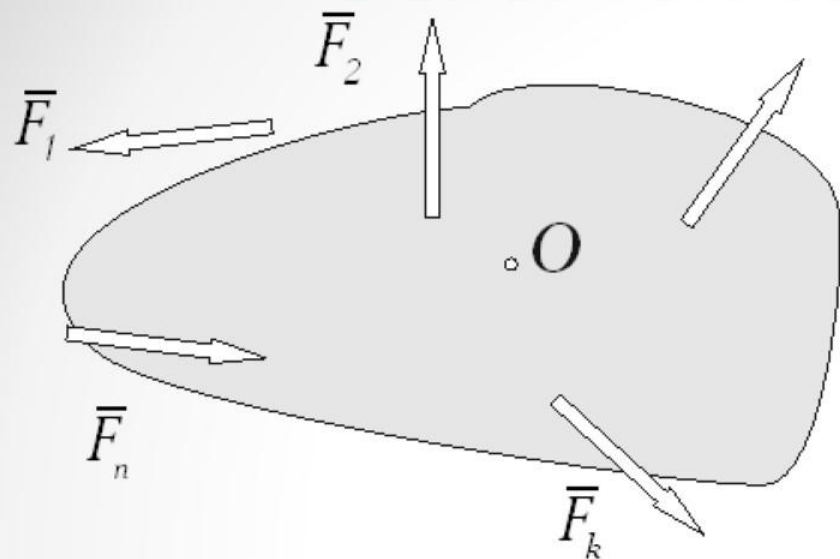
Главный вектор
системы сил

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$$

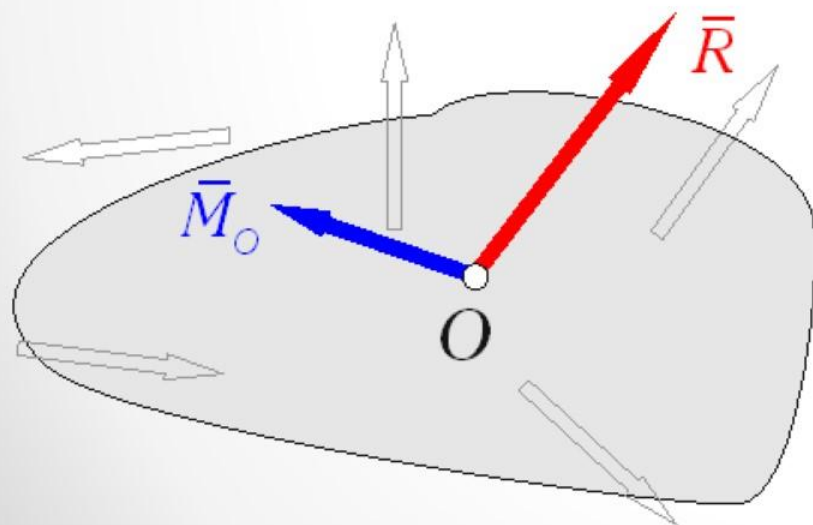
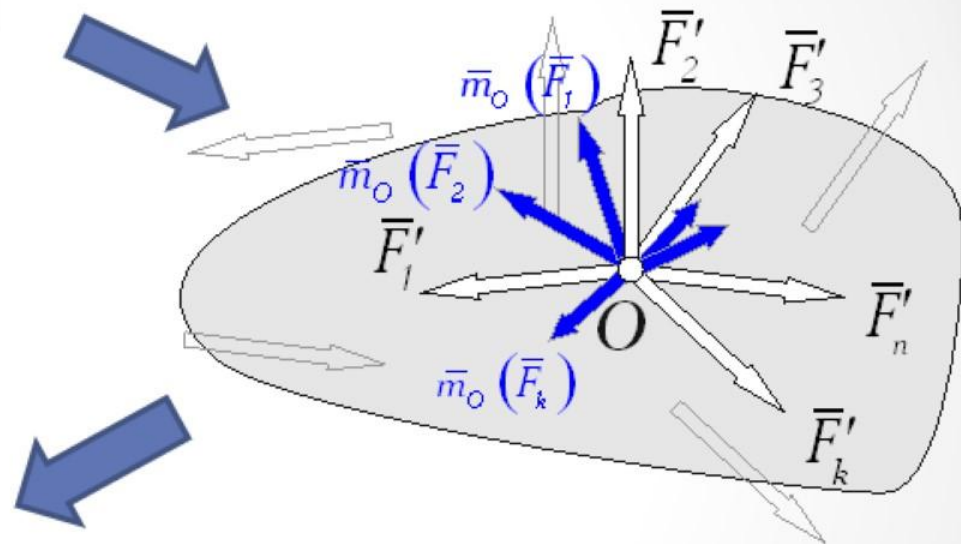
Главный момент системы сил
относительно центра O

$$\bar{M}_O = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k$$

Основная теорема статики



$$\bar{F}_k \sim (\bar{F}'_k, \bar{m}_k), \quad \bar{m}_k = \bar{m}_O(\bar{F}_k)$$



$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}'_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$$

$$\bar{M}_O = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\bar{F}_k)$$

Статические инварианты системы сил

Главный вектор системы сил $\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$ $\bar{R}(\bar{r}_O) = const$

Главный вектор системы сил не зависит от выбора центра приведения — это первый *статический инвариант системы сил*.

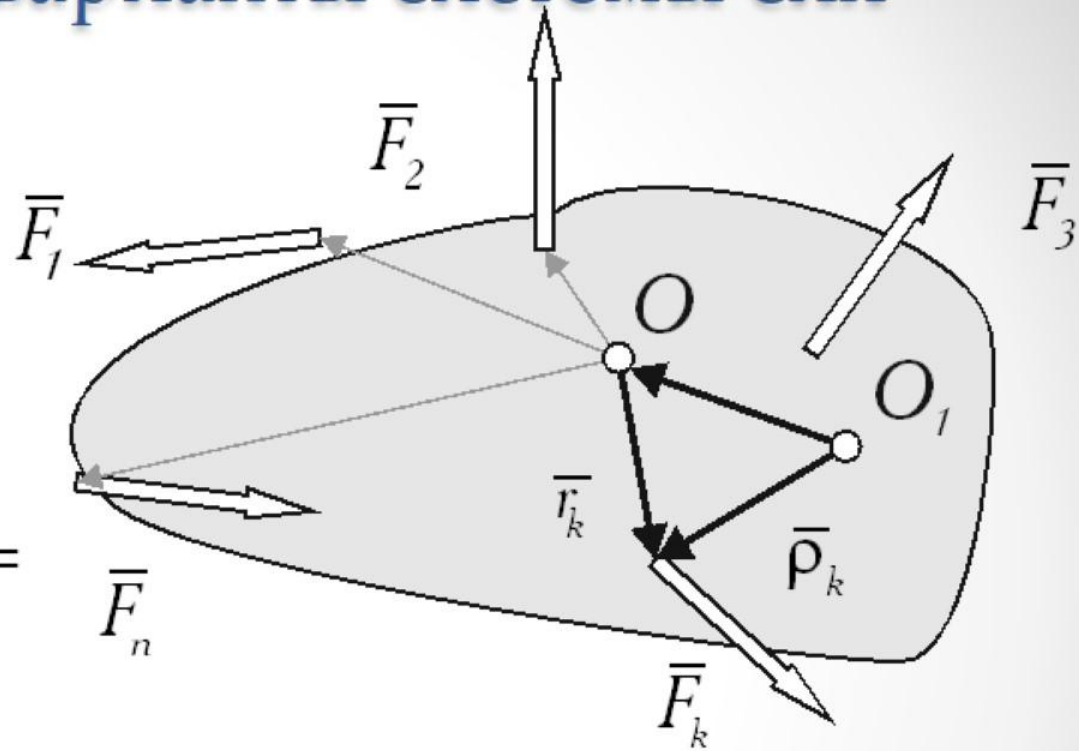
Главный момент системы сил относительно центра O $\bar{M}_O = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\bar{F}_k)$

При смене моментной точки в общем случае изменятся моменты отдельных сил, а вместе с ними главный момент системы сил

$$\frac{\partial \bar{M}_O}{\partial \bar{r}_O} \neq 0, \quad \bar{M}_O = f(\bar{r}_O) = var$$

Статические инварианты системы сил

$$\begin{aligned}\bar{M}_{O_1} &= \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k = \\ &= \sum_{k=1}^n (\overline{O_1 O} + \bar{r}_k) \times \bar{F}_k = \\ &= \overline{O_1 O} \times \sum_{k=1}^n \bar{F}_k + \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k = \\ &= \bar{M}_O + \overline{O_1 O} \times \bar{R}\end{aligned}$$



При смене центра приведения главный момент системы сил изменяется на величину, равную моменту главного вектора этой системы, приложенного в первом центре приведения, относительно второго центра.

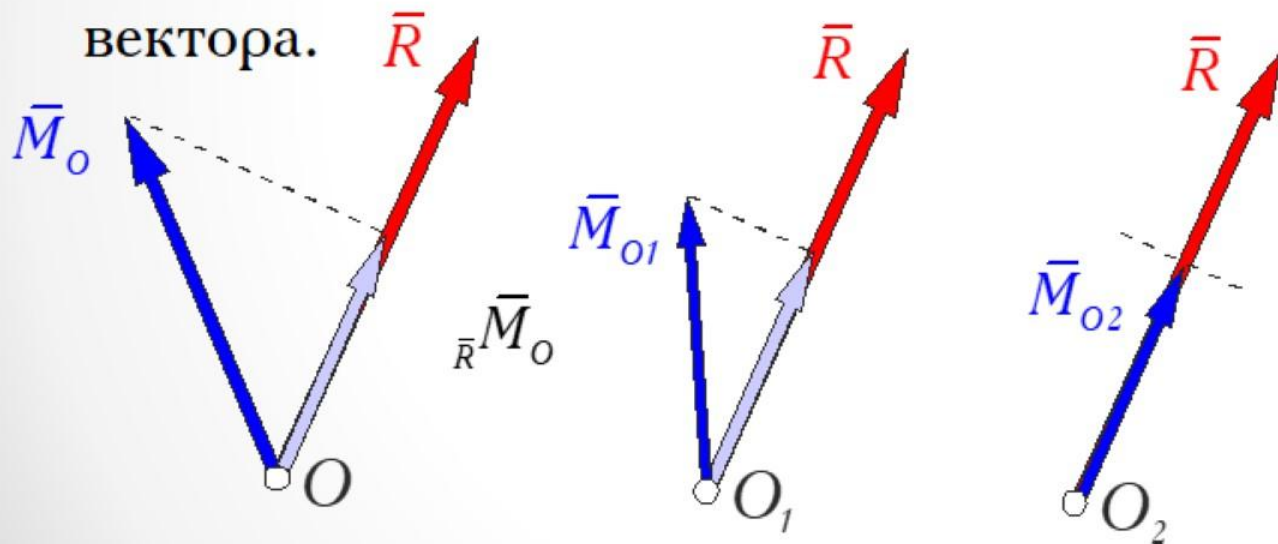
Статические инварианты системы сил

$$\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O + \overline{O_1O} \times \bar{R} \mid \cdot \bar{R}$$

$$\frac{\bar{M}_O \cdot \bar{R}}{R} = n\rho_{\bar{R}}\bar{M}_O$$

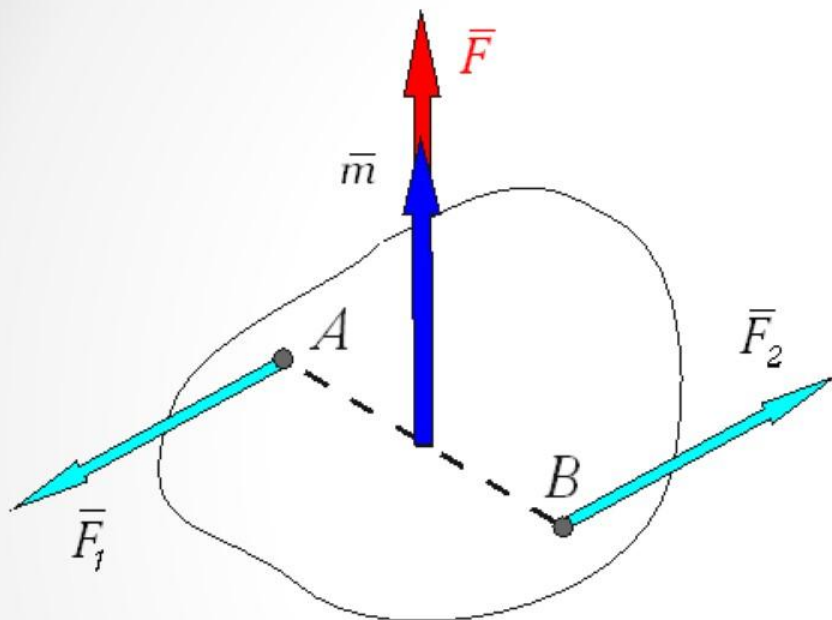
$$\bar{M}_{O_1} \cdot \bar{R} = \bar{M}_O \cdot \bar{R} = const$$

Второй статический инвариант системы сил — проекция главного момента на направление главного вектора.



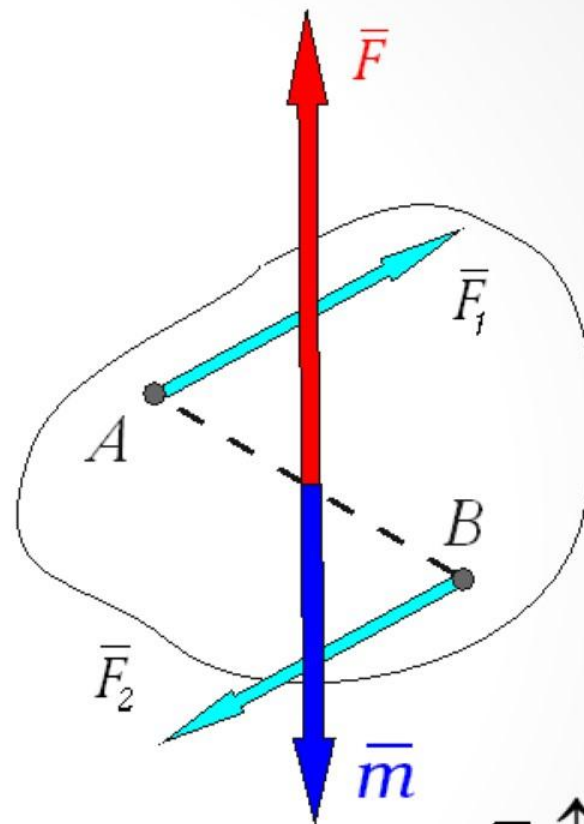
$$\bar{M}_{O_2} = n\rho_{\bar{R}}\bar{M}_O = \min \bar{M}_{O_j}$$

Динамический винт



$\bar{m} \uparrow \uparrow \bar{F}$

Правый винт



$\bar{m} \uparrow \downarrow \bar{F}$

Левый винт