Глава 5. Тяготение. Элементы теории поля
§ 22. Законы Кеплера.
Закон всемирного тяготения

При поддержке католической церкви в течение почти полутора тысяч лет начиная со II в. н.э. господствовала **птоломеева геоцентрическая система мира.**

В начале XVI в. польским астрономом Н. Коперником была обоснована **гелиоцентрическая система**.

И. Кеплер, обработав и уточнив результаты многочисленных наблюдений датского астронома Т. Браге, изложил **законы движения планет**:

- 1. Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце.
- 2. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.
- 3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.
- И. Ньютон, изучая движение небесных тел, на основании законов Кеплера и основных законов динамики открыл всеобщий **закон всемирного тяготения**: между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними:

$$F = G m_1 m_2 / r^2 \qquad (22.1)$$

- Эта сила называется **гравитационной** (или **силой всемирного тяготения**). Силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела.
- Коэффициент пропорциональности ***G*** называется **гравитационной постоянной**.

- Впервые экспериментальное доказательство закона всемирного тяготения для земных тел, а также числовое определение гравитационной постоянной *G* проведено английским физиком Г. Кавендишем

- Принципиальная схема опыта Кавендиша, применившего **крутильные весы**, представлена на рис. 37.

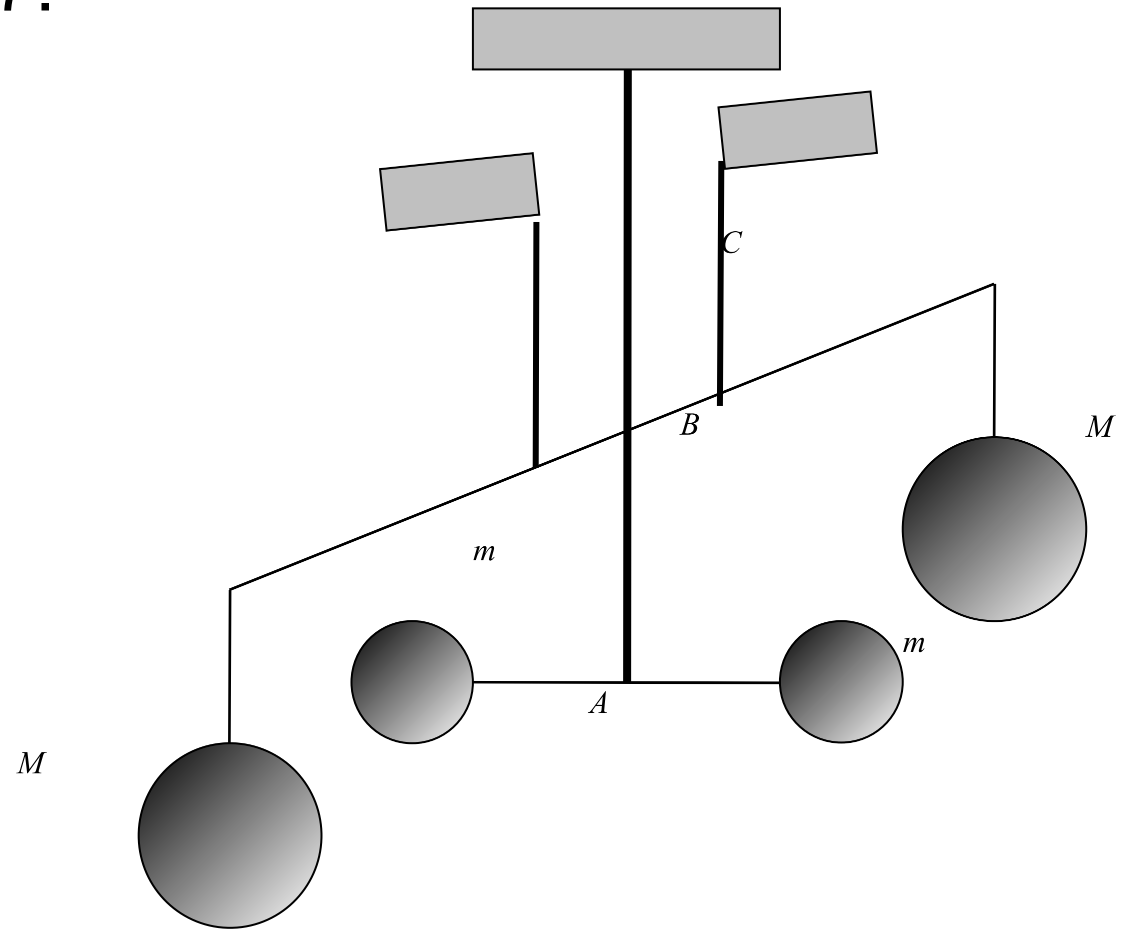


Рис. 37

§ 23. Сила тяжести и вес. Невесомость

- На любое тело, расположенное вблизи Земли, действует сила тяготения *F*, под влиянием которой, согласно второму закону Ньютона, тело начнет двигаться с ускорением свободного падения *g*. Таким образом, в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массой действует сила называемая **силой тяжести**.

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

- Согласно фундаментальному физическому закону — **обобщенному закону Галилея**, все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением.

- Если пренебречь суточным вращением Земли вокруг своей оси, то сила тяжести и сила гравитационного тяготения равны между собой:

$$P = mg = F = GmM / R^2 ,$$

- где *M* — масса Земли; *R* — расстояние между телом и центром Земли. Эта формула дана для случая, когда тело находилось на поверхности Земли.
- Пусть тело расположено на высоте *h* от поверхности Земли, R_o — радиус Земли, тогда

$$P = GmM /(R_o + h)^2 ,$$

- **Весом** тела называют силу, с которой тело вследствие тяготения к Земле действует на опору (или подвес), удерживающую тело от свободного падения.
- Вес тела проявляется только в том случае, если тело движется с ускорением, отличным от *g*, т. е. когда на тело кроме силы тяжести действуют другие силы.
- Состояние тела, при котором оно движется только под действием силы тяжести, называется состоянием **невесомости**.
- **Таким образом, *сила тяжести действует всегда,* а *вес* появляется *только* в том случае, *когда* на тело *кроме силы тяжести действуют еще другие силы***

- Если тело движется в поле тяготения Земли с ускорением $\vec{a} \neq \vec{g}$, то к этому телу приложена дополнительная сила $\vec{N}$, удовлетворяющая условию

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

- Тогда вес тела

$$\vec{P}' = -\vec{N} = \vec{P} - m\vec{a} = m\vec{g} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a})$$

т. е. если тело покоится или движется прямолинейно и равномерно, то $\vec{a} = \mathbf{0}$ *и* $\vec{P}' = m\vec{g}$

Если тело *свободно движется в поле тяготения* по любой траектории, то $\vec{a} = \vec{g}$ *и* $\vec{P}' = \mathbf{0}$, т. е. тело будет невесомым.

§ 24. Поле тяготения и его напряженность

- Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью **поля тяготения**, или **гравитационного поля**.
- Это поле порождается телами и является формой существования материи. Основное свойство поля тяготения заключается в том, что на всякое тело массой *m*, внесенное в это поле, действует сила тяготения

$$\vec{F} = m\vec{g} \qquad (24.1)$$

- Вектор $\vec{g}$ не зависит от ***m*** и называется напряженностью поля тяготения.

- **Напряженность поля тяготения** определяется силой, действующей со стороны поля на материальную точку единичной массы, и совпадает по направлению с действующей силой. Напряженность есть ***силовая характеристика*** поля тяготения.

Поле тяготения называется **однородным**, если его напряженность во всех точках одинакова, и **центральным**, если во всех точках поля векторы напряженности направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной точке (А), *неподвижной* по отношению к какой-либо инерциальной системе отсчета (рис. 38).

- Для графического изображения силового поля используются *силовые линии* (*линии напряженности*).
- Силовые линии выбираются так, что вектор напряженности поля действует по касательной к силовой линии.

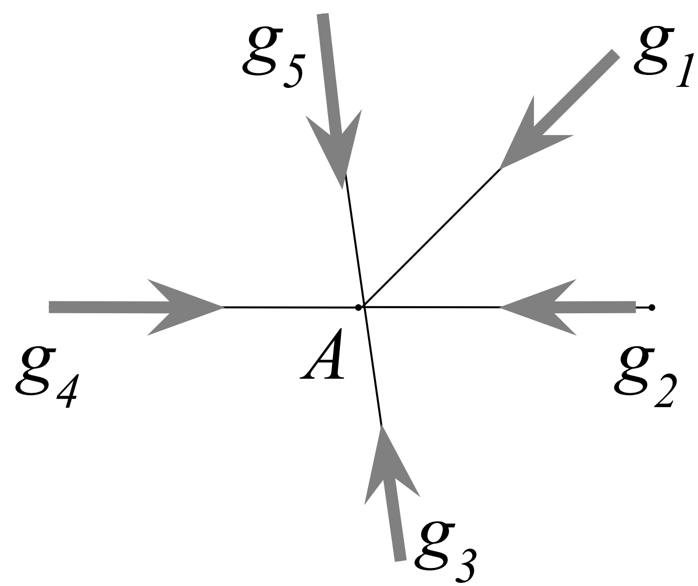


Рис. 38

§ 25. Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения

- Вычислим, какую надо затратить работу для удаления тела массой *m* от Земли. На расстоянии *R* (рис.39) на данное тело действует сила

$$F = GmM/R^2$$

- При перемещении этого тела на расстояние *dR* затрачивается работа

$$dA = -G\frac{mM}{R^2}dR \qquad (25.1)$$

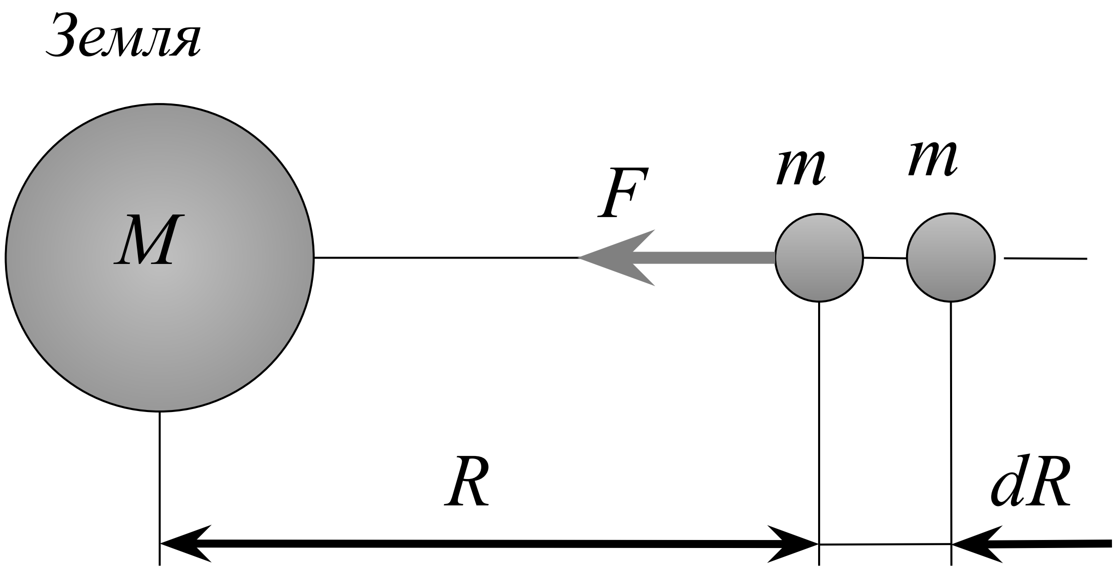


Рис. 39

- Если тело перемещать с R_1 расстояния до R_2, то затрачивается работа

$$A = \int_{R_1}^{R_2} dA = -\int_{R_1}^{R_2} G\frac{mM}{R^2}dR = m\left(\frac{GM}{R_2} - \frac{GM}{R_1}\right). \quad (25.2)$$

- Из формулы (25.2) вытекает, что затраченная работа в поле тяготения не зависит от траектории перемещения, а определяется лишь начальным и конечным положениями тела, т. е. *силы тяготения действительно консервативны*, а *поле тяготения является потенциальным* (см. § 12).
- Согласно формуле (12.2), работа, совершаемая консервативными силами, равна изменению потенциальной энергии системы, взятому со знаком минус, т. е.

$$A = -\Delta \Pi = -(\Pi_2 - \Pi_1) = \Pi_1 - \Pi_2 .$$

- Из формулы (25.2) получаем

$$\Pi_1 - \Pi_2 = -m(GM / R_1 - GM / R_2). \qquad (25.3)$$

- В формулы входит только разность потенциальных энергий в двух состояниях, поэтому для удобства принимают потенциальную энергию при $R_2 \to \infty$ равной нулю ($\lim \Pi_2 = 0 \ при \ R_2 \to \infty$).
- Тогда (25.3) запишется в виде $\Pi_1 = -GmM / R_1$.
- А так как первая точка была выбрана произвольно, то можно записать

$$\Pi = -GmM / R$$

- Величину

$$\varphi = \Pi / m,$$

- являющуюся энергетической характеристикой поля тяготения, называют потенциалом.

- **Потенциал поля тяготения** $\boldsymbol{\varphi}$ — скалярная величина, определяемая потенциальной энергией тела единичной массы в данной точке поля или работой по перемещению единичной массы из данной точки поля в бесконечность.
- Таким образом, потенциал поля тяготения, создаваемого телом массой *M*, равен

$$\boldsymbol{\varphi} = -GM/R, \qquad (25.4)$$

- где *R* — расстояние от этого тела до рассматриваемой точки.
- Из формулы (25.4) вытекает, что геометрическое место точек с одинаковым потенциалом образует сферическую поверхность (*R*=const).

- Такие поверхности, для которых потенциал постоянен, называются **эквипотенциальными**.
- Из выражений (25.1) и (25.4) следует, что элементарная работа *dA*, совершаемая силами поля при малом перемещении тела массой *m*, равна

$$dA = -m\,d\boldsymbol{\varphi}$$

- С другой стороны, $dA = Fdl$ (dl — элементарное перемещение).
- Т.е.

$$dA = mg\,dl = -m\,d\boldsymbol{\varphi},$$

$$g = -\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dl}.$$

Величина $d\boldsymbol{\varphi} / dl$ характеризует изменение потенциала на единицу длины в направлении перемещения в поле тяготения.

Можно показать, что

$$\vec{g} = -grad\,\varphi, \qquad (25.5)$$

$$grad\,\boldsymbol{\varphi} = \vec{i}\,\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial z}$$

Знак минус в формуле (25.5) указывает, что вектор напряженности $\vec{g}$ направлен в *сторону убывания* потенциала.

- В качестве частного примера, исходя из представлений теории тяготения, рассмотрим потенциальную энергию тела, находящегося на высоте *h* относительно Земли:

$$\Pi = -\frac{GmM}{R_0+h} - \left(-\frac{GmM}{R_0}\right) = \frac{GmMh}{R_0(R_0+h)},$$

- где R_0 — радиус Земли. Так как

$$P = GmM/R_0^2 \ \text{и} \ g = P/m = GM/R_0^2, \qquad (25.6)$$

- то, учитывая условие $h \ll R_o$, получим

$$\Pi = mGMh/R_0^2 = mgh.$$

§ 26. Космические скорости

- Для запуска ракет в космическое пространство надо в зависимости от поставленных целей сообщать им определенные начальные скорости, называемые космическими.
- **Первой космической** (или **круговой**) **скоростью** называют такую минимальную скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Земли по круговой орбите, т. е. превратиться в искусственный спутник Земли.

- На спутник, движущийся по круговой орбите радиусом, действует сила тяготения Земли, сообщающая ему нормальное ускорение v_1^2 / r . По второму закону Ньютона,

$$GmM / r^2 = mv_1^2 / r.$$

- Если спутник движется недалеко от поверхности Земли, тогда $r \approx R_0$ (радиус Земли) и $g = GM / R_0^2$. Поэтому у поверхности Земли

$$v_1 = \sqrt{gR_0} = 7{,}9\,км/с.$$

- Первой космической скорости недостаточно для того, чтобы тело могло выйти из сферы земного притяжения. Необходимая для этого скорость называется второй космической.

- **Второй космической** (или **параболической**) **скоростью** называют ту наименьшую скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли и превратиться в спутник Солнца, т. е. чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической.
- Для того чтобы тело (при отсутствии сопротивления среды) могло преодолеть земное притяжение и уйти в космическое пространство, необходимо, чтобы его кинетическая энергия была равна работе, совершаемой против сил тяготения:

$$\frac{mv_2^2}{2} = -\int_{R_0}^{\infty} G\frac{mM}{r^2}dr = GmM / R_0 ,$$

- Следовательно

$$v_2 = \sqrt{2gR_0} = 11{,}2\,км/с.$$

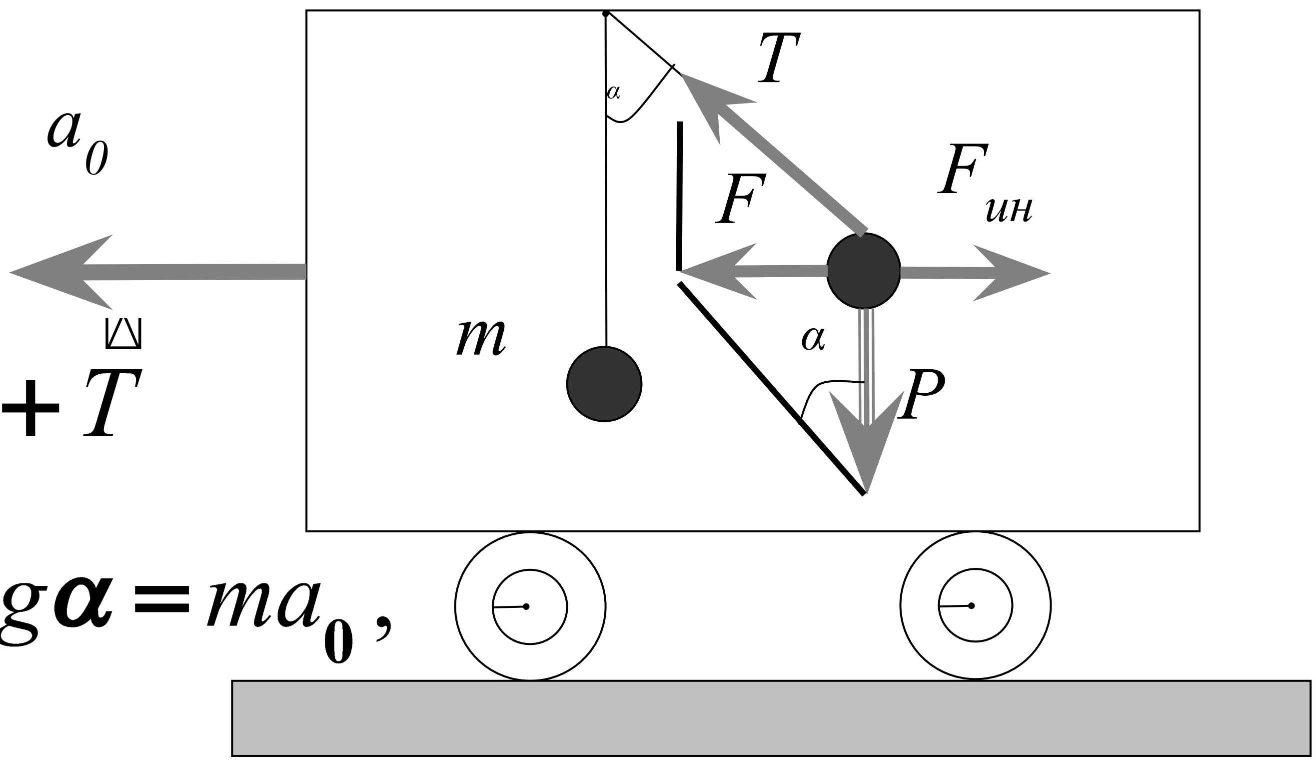
- **Третьей космической скоростью** называют скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца. Третья космическая скорость равна 16,7 км/с.
- Впервые космические скорости были достигнуты в СССР: первая — при запуске первого искусственного спутника Земли в 1957 г., вторая — при запуске ракеты в 1959 г.
- После исторического полета Ю. А. Гагарина в 1961 г. начинается бурное развитие как советской, так и зарубежной космонавтики.

§ 27. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции

- Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. Системы отсчета, движущиеся относительно инерциальной системы с ускорением, называются **неинерциальными**.
- Законы динамики можно применять и для неинерциальных систем, если кроме сил, обусловленных воздействием тел друг на друга, ввести в рассмотрение силы особого рода — так называемые **силы инерции**.
- Если учесть силы инерции, то второй закон Ньютона будет справедлив для любой системы отсчета.

- $$m\vec{a}^{/} = \vec{F} + \vec{F}_{ин} \qquad (27.1)$$
- где $\vec{a}^{/}$ - ускорение в неинерциальной системе,
- $\vec{F}_{ин}$ - сила инерции, $\vec{F} = m\vec{a}$ ($\vec{a}$ - ускорение в инерциальной системе).
- Т.е.
$$m\vec{a}^{/} = m\vec{a} + \vec{F}_{ин}.$$
- Силы инерции обусловлены ускоренным движением системы отсчета относительно измеряемой системы, поэтому в общем случае нужно учитывать следующие случаи проявления этих сил: 1) силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета; 2) силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета; 3) силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета.

- **1. Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета.**



$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$$

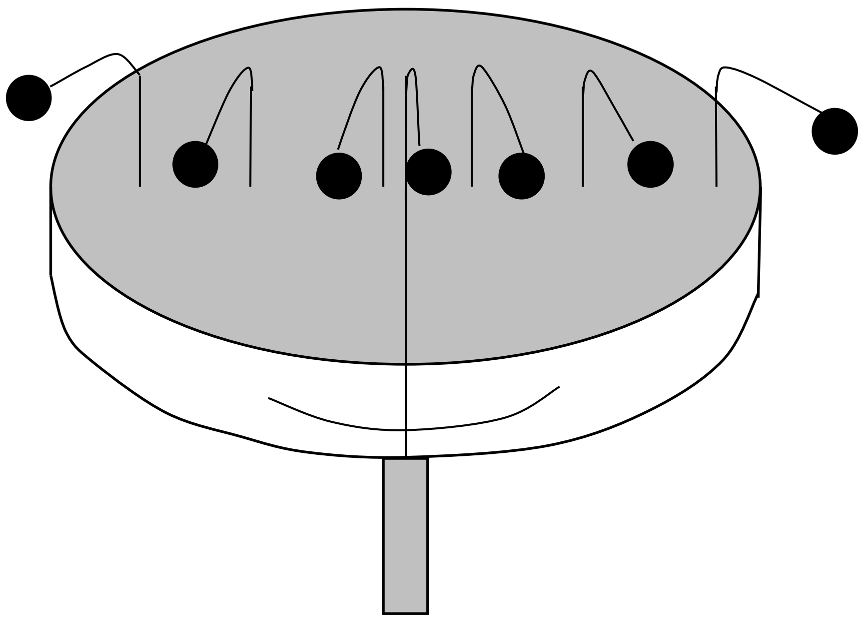
$$F = mg\,tg\boldsymbol{\alpha} = ma_{\mathbf{0}},$$

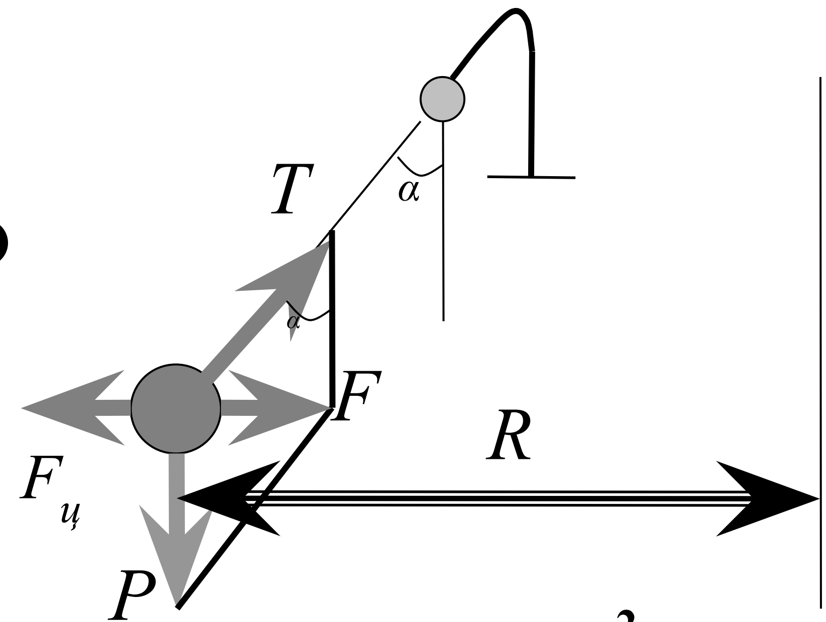
$$tg\boldsymbol{\alpha} = a_{\mathbf{0}}/g,$$

Рис. 40

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_{\mathbf{0}}. \qquad (27.2)$$

- **2. Силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета.**
- Пусть диск равномерно вращается с угловой скоростью (ω = const) вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр.





$$F = m\omega^2 R$$

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$$

$$F = mg\,tg\alpha = m\omega^2 R$$

$$F_{ц} = -m\omega^2 R.$$

Рис. 41

- **3. Силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета.**

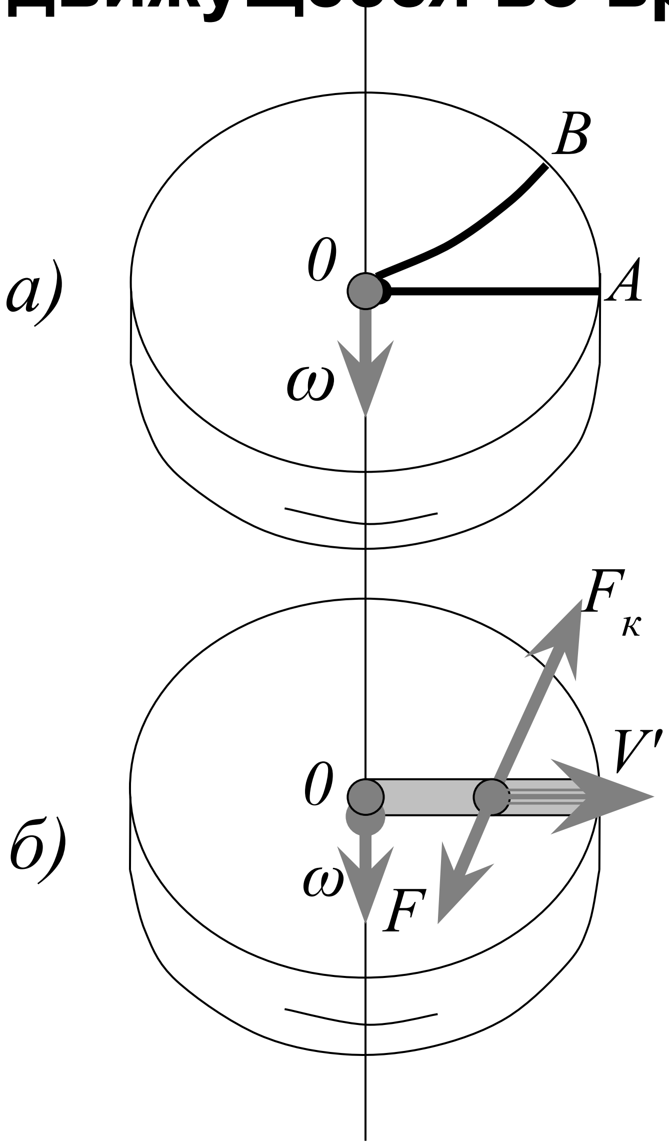


Рис. 42

$$\vec{F}_{к} = 2m\left[\vec{v}^{\,\prime}\,\vec{\omega}\right].$$

- Кариолисова   сила инерции

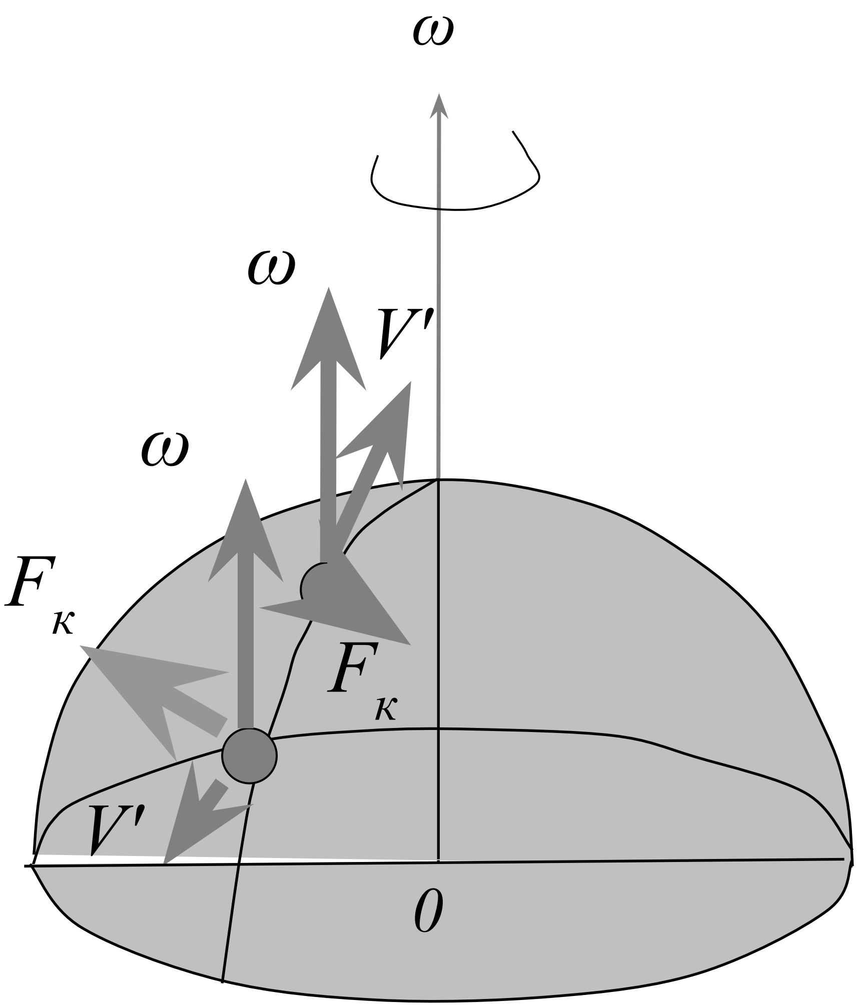


Рис. 43

Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{ц} + \vec{F}_{к},$$

- ***Силы инерции***
- *вызываются* не взаимодействием тел, а ***ускоренным движением системы отсчета***

- Для любого из тел, находящихся в неинерциальной системе отсчета, силы инерции являются внешними; следовательно, здесь нет замкнутых систем.
- Это означает, что в неинерциальных системах отсчета не выполняются законы сохранения импульса, энергии и момента импульса.

- При некоторых условиях силы инерции и силы тяготения невозможно различить.
- Никакой эксперимент, выполненный внутри лифта, не может отделить однородное поле тяготения от однородного поля сил инерции.
- Аналогия между силами тяготения и силами инерции лежит в основе **принципа эквивалентности гравитационных сил и сил инерции (принципа эквивалентности Эйнштейна):** все физические явления в поле тяготения происходят совершенно так же, как и в соответствующем поле сил инерции, если напряженности обоих полей в соответствующих точках пространства совпадают, а прочие начальные условия для рассматриваемых тел одинаковы. Этот принцип является основой **общей теории относительности.**