

Транспортная задача линейного программирования

- Имеется m поставщиков (A_1, \dots, A_m) некоторого однородного продукта в количествах a_1, \dots, a_m соответственно.
- Требуется доставить этот продукт n потребителям (B_1, \dots, B_n) в количествах b_1, \dots, b_n соответственно.
- Известна c_{ij} стоимость перевозки единицы груза от i -го поставщика к j -му потребителю.
- Составить план перевозок, удовлетворяющий потребности в продукте и имеющий минимальную стоимость.

- Обозначим x_{ij} груз, перевозимый от i -го поставщика к j -му потребителю, c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза.
- Условия задачи запишем в **матрицу планирования**.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	Bn	
A1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{1n}	a_1
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{1n}	
A2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{2n}	a_2
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{2n}	
.....
Am	c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}	c_{mn}	a_m
	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	x_{mn}	
Потребности	b_1	b_2	b_3	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

- Составим модель задачи

Стоимость всех перевозок:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

Все грузы должны быть вывезены:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i=1,2,\dots,m$$

Потребности в грузах должны быть обеспечены:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j=1,2,\dots,n$$

Модель **закрытая**, т.е. суммарные потребности равны суммарным затратам.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Теорема

- Любая транспортная задача, у которой суммарный объем запасов совпадает с суммарным объемом потребностей, имеет решение

Построение первоначального опорного плана

- Система ограничений ТЗ содержит m х n неизвестных и $m+n$ уравнений.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i=1,2,\dots,m \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j=1,2,\dots,n \quad (2)$$

- Если сложить почленно уравнения подсистемы (1) и отдельно подсистемы (2) то получим два одинаковых уравнения.
- Следовательно подсистема **линейно зависима**.
- Если одно из уравнений отбросить, то система ограничений должна содержать **$m+n-1$** линейно независимых уравнений.
- Следовательно **невырожденный опорный план** ТЗ содержит **$m+n-1$** положительных компонент (x_{ij}), а остальные равны нулю.

Если условия задачи представлены в матрице планирования, то клетки, в которых находятся отличные от нуля перевозки называются **занятыми**, а остальные – **незанятыми**.

Занятые клетки соответствуют базисным переменным и для невырожденного опорного плана их количество должно быть равно $m+n-1$.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	Bn	
A1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{1n}	a_1
	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{1n}	
A2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{2n}	a_2
	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{2n}	
.....
Am	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}	C_{mn}	a_m
	X_{m1}	X_{m2}	X_{m3}	X_{mn}	
Потребности	b_1	b_2	b_3	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

- **Опорность** плана при записи в виде таблицы означает его **ацикличность** , т.е. в таблице нельзя построить замкнутый цикл, все вершины которого лежат в занятых клетках.
- **(Циклом** называется набор клеток, в котором только две соседние клетки расположены в **одном столбце или одной строке**, причем последняя клетка находится в той же строке или столбце, что и первая).

- Всякий план ТЗ содержащий более $m+n-1$ **занятых** клеток не является опорным, т.к. ему соответствует **линейно зависящая система векторов**.
- При таком плане в таблице всегда можно построить **замкнутый цикл**.
- Если к занятым клеткам, определяющим опорный план (ациклический) добавить одну незанятую клетку, то появится **единственный цикл**.

- Построение циклов начинают с какой-либо **занятой** клетки и переходят по столбцу (или строке) к другой **занятой** клетке, в которой делают **поворот под прямым углом** и движутся по строке (столбцу) к следующей занятой клетке и т.д. , пытаясь возвратиться к первой клетке.
- Если такой возврат возможен, то получаем цикл и план не является опорным.

- Существует несколько методов построения первоначального опорного плана.

Метод северо-западного угла

- Пусть условия ТЗ заданы таблицей.

Поставщики	Потребители					Запасы
	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	10	7	4	1	4	100
А2	2	7	10	6	11	250
А3	8	5	3	2	2	200
А4	11	8	12	16	13	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

- Начинаем с первого потребителя **B1** и первого поставщика **A1**.
- Сравниваем $a_1=100$ и $b_1=200$, $a_1 < b_1$, меньший из объемов **100** записываем в левый нижний угол клетки **A₁B₁**.
- Запасы первого поставщика израсходованы, поэтому в клетках первой строки ставим черту.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10	7	4	1	4	100
	100	-	-	-	-	
A2	2	7	10	6	11	250
A3	8	5	3	2	2	200
A4	11	8	12	16	13	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

Потребности **B1** неудовлетворенны на $200-100=100$ ед.

Сравниваем этот остаток с запасами **A2**: $100 < 250$, **100** ед. записываем в A_2B_1 и удовлетворяем потребности **B1**, в оставшихся клетках первого столбца ставим черту.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10	7	4	1	4	100
	100	-	-	-	-	
A2	2	7	10	6	11	250
	100					
A3	8	5	3	2	2	200
	-					
A4	11	8	12	16	13	300
	-					
Потребности	200	200	100	100	250	850

У **A2** осталось **150 ед.** груза. Отдаем их **B2**.
 Потребности **B2 = 200**, Записываем **150** в клетку **A₂B₂** и
 т.к. запасы **A2** израсходованы прочеркиваем клетки
 второй строки.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10	7	4	1	4	100
	100	-	-	-	-	
A2	2	7	10	6	11	250
	100	150	-	-	-	
A3	8	5	3	2	2	200
	-					
A4	11	8	12	16	13	300
	-					
Потребности	200	200	100	100	250	850

- Потребности В2 не удовлетворены на 50 ед. Берем их у А3 и переходим к В3 и т.д.
- Процесс продолжается пока не закончатся запасы и потребности.

Поставщики	Потребители					Запасы
	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	10	7	4	1	4	100
	100	-	-	-	-	
А2	2	7	10	6	11	250
	100	150	-	-	-	
А3	8	5	3	2	2	200
	-	50	100	50	-	
А4	11	8	12	16	13	300
	-	-	-	50	250	
Потребности	200	200	100	100	250	850

- Начиная движение от занятой клетки A_1B_1 вернуться в нее, двигаясь только по занятым клеткам невозможно. **Следовательно план опорный.**
- План является невырожденным, т.к. содержит $m+n-1=4+5-1=8$ занятых клеток.
- Мы не учитывали стоимость перевозок, поэтому план наверное не оптимальный.
- Найдем общую стоимость перевозок:
 **$Z=100 \cdot 10+100 \cdot 2+150 \cdot 7+50 \cdot 5+100 \cdot 3+50 \cdot 2+$
 $+50 \cdot 16+235 \cdot 13=6950$ ед. стоимости.**
- Если при составлении опорного плана учитывать стоимость, то план будет ближе к оптимальному.

Метод минимальной стоимости.

- Суть метода в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую и в эту клетку (ij) помещают меньшее из чисел a_i или b_j .
- Вычеркивают столбец или строку (запасы израсходованы или запрос удовлетворен)
- Из оставшейся таблицы снова выбирают клетку с наименьшей стоимостью и т.д.
- Процесс продолжается пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Пусть условия ТЗ заданы таблицей

Поставщики	Потребители					Запасы
	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	10	7	4	1	4	100
А2	2	7	10	6	11	250
А3	8	5	3	2	2	200
А4	11	8	12	16	13	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

- Выбираем наименьшую стоимость, она помещена в клетке A_1B_4 , т.к. $a_1 = b_4 = 100$, то 100 помещаем в A_1B_4 и вычеркиваем первую строку и четвертый столбец.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10	7	4	1	4	100
	-	-	-	100		
A2	2	7	10	6	11	250
				-		
A3	8	5	3	2	2	200
				-		
A4	11	8	12	16	13	300
				-		
Потребности	200	200	100	100	250	850

- Наименьшей является стоимость в A_2B_1 и A_3B_5 .
- В A_2B_1 $200 < 250$, $\rightarrow 200$ записываем и исключаем столбец B_1 .
- В A_3B_5 $200 < 250$ записываем 200 и исключаем строку A_3 .

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10	7	4	1	4	100
	-	-	-	100		
A2	2	7	10	6	11	250
	200			-		
A3	8	5	3	2	2	200
	-	-	-	-	200	
A4	11	8	12	16	13	300
	-			-		
Потребности	200	200	100	100	250	850

- В таблице снова выбираем наименьшую стоимость и продолжим пока все запасы не будут распределены

Поставщики	Потребители					Запасы
	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	10	7	4	1	4	100
	-	-	-	100	-	
А2	2	7	10	6	11	250
	200	50	-	-	-	
А3	8	5	3	2	2	200
	-	-	-	-	200	
А4	11	8	12	16	13	300
	-	150	100	-	50	
Потребности	200	200	100	100	250	850

$$X=(x_{14}=100, x_{21}=200, x_{22}=50, x_{35}=200, x_{42}=150, x_{43}=100, x_{45}=50).$$

План вырожденный опорный, т.к. 7 занятых клеток и нет циклов.

$$Z=100 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 7 + 200 \cdot 2 + 150 \cdot 8 + 100 \cdot 12 + 50 \cdot 13 = 4300 \text{ ед.}$$

Метод двойного предпочтения.

- Если таблица большая, то перебор элементов сложен и используют этот метод.
- В каждом столбце и строке отмечают знаком γ клетку с наименьшей стоимостью. В результате некоторые клетки имеют отметку $\gamma\gamma$.
- В эти клетки помещают максимально возможные объемы перевозок и исключают соответствующие строки и столбцы.
- Затем распределяют перевозки по клеткам с γ .
- В оставшейся таблице распределение производят по наименьшей стоимости.

Пусть условия ТЗ заданы таблицей

Поставщики	Потребители					Запасы
	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	10	7	4	1	4	100
А2	2	7	10	6	11	250
А3	8	5	3	2	2	200
А4	11	8	12	16	13	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

- Отметим клетки с минимальной стоимостью по строкам

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10	7	4	γ 1	4	100
A2	γ 2	7	10	6	11	250
A3	8	5	3	γ 2	γ 2	200
A4	11	γ 8	12	16	13	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

Отметим клетки с минимальной стоимостью по столбцам

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10	7	4	1	4	100
A2	2	7	10	6	11	250
A3	8	5	3	2	2	200
A4	11	8	12	16	13	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

- Сначала заполним клетки A_2B_1 , A_1B_4 , A_3B_5 а затем A_4B_2

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10	7	4	1	4	100
	-	-	-	100	-	
A2	2	7	10	6	11	250
	200	-		-		
A3	8	5	3	2	2	200
	-	-	-	-	200	
A4	11	8	12	16	13	300
	-	200		-		
Потребности	200	200	100	100	250	850

- Далее заполним клетки по минимальной стоимости A_2B_3, A_4B_3, A_4B_5

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10	7	4	1	4	100
	-	-	-	100	-	
A2	2	7	10	6	11	250
	200	-	50	-	-	
A3	8	5	3	2	2	200
	-	-	-	-	200	
A4	11	8	12	16	13	300
	-	200	50	-	50	
Потребности	200	200	100	100	250	850

Получился вырожденный опорный план.

$$Z=100 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 10 + 200 \cdot 2 + 200 \cdot 8 + 50 \cdot 12 + 50 \cdot 13 = 4250 \text{ ед}$$

- С помощью рассмотренных методов можно получить вырожденный или невырожденный **опорный** план.
- **Оптимальный** план можно найти с помощью симплекс метода, однако, из-за большого количества переменных обычно используют более простой метод – **метод потенциалов**.

Метод потенциалов

- Теорема

- Если план X^* транспортной задачи является **оптимальным**, то ему соответствует система из $m+n$ чисел U_i^* , V_j^* удовлетворяющих условиям

$$U_i^* + V_j^* = C_{ij}$$

$$U_i^* + V_j^* \leq C_{ij}$$

Числа U_i^* и V_j^* называются **потенциалами поставщиков и потребителей** соответственно.

•Доказательство

Транспортную задачу

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} = a_i & i = 1, 2, \dots, m \\ x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = b_j & j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

можно рассматривать как двойственную некоторой исходной задаче линейного программирования

Пусть каждому ограничению вида

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} = a_i$$

в исходной задаче соответствует переменная U_i ($i=1,2,\dots,m$), а каждому ограничению вида

$$x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = b_j$$

переменная V_j ($j=1,2,\dots,n$).

Тогда двойственная задача запишется так:

$$f = \sum_{i=1}^m a_i U_i + \sum_{j=1}^n b_j V_j \rightarrow \max$$

$$U_i + V_j \leq C_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

- План X^* является оптимальным планом двойственной задачи, поэтому план $Y^* = (U^*, V^*)$ является оптимальным планом исходной задачи и согласно теореме двойственности

$$\max f = \min Z$$

$$\text{или} \quad \sum_{i=1}^m a_i U_i + \sum_{j=1}^n b_j V_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$$

$$\text{где} \quad x_{ij}^* \geq 0$$

- На основании свойств двойственных задач получаем:
- ограничения исходной задачи, соответствующие **положительным переменным оптимального плана двойственной задачи, являются равенствами, а соответствующие нулевым переменным, неравенствами, т.е.**

$$U_i^* + V_j^* = C_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij}^* > 0$$

$$U_i^* + V_j^* \leq C_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij}^* = 0$$

Из теоремы следует, что для того, чтобы опорный план был оптимальным, необходимо выполнение следующих условий:

1. Для каждой **занятой клетки** сумма потенциалов должна быть равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

2. Для каждой **незанятой клетки** сумма потенциалов должна быть меньше или равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке

$$U_i + V_j \leq C_{ij}$$

- Если хотя бы одна незанятая клетка не удовлетворяет этому условию, то план **не оптимален** и его можно улучшить, вводя в базис вектор, соответствующий клетке, для которой нарушается условие оптимальности

(в клетку надо переместить некоторое количество груза).

- Таким образом, для проверки плана на оптимальность надо построить систему потенциалов.

• Построение системы потенциалов.

Используем условие

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

Систему потенциалов можно построить только для невырожденного плана. Он должен содержать **$m+n-1$** занятых клеток и для него можно составить систему из **$m+n-1$** линейно независимых уравнений с **$n+m-1$** неизвестными.

Если уравнений меньше чем неизвестных, система неопределенная, то одному неизвестному (U_i) придают нулевое значение и все потенциалы определяются однозначно.

- Пусть известен потенциал U_i тогда

$$V_j = C_{ij} - U_i$$

Если известен потенциал V_j тогда

$$U_i = C_{ij} - V_j$$

Поставщики	Потребители					Запасы		
	В1	В2	В3	В4	В5			
	u	v						
A1			10	7	4	1	4	100
						100		
A2			2	7	10	6	11	250
			200	50				
A3			8	5	3	2	2	200
							200	
A4	$u_4=0$		11	8	12	16	13	300
				150	100		50	
Потребности			200	200	100	100	250	850

- В таблице выбираем строку с наибольшим количеством занятых клеток (A_4) и полагаем $U_4=0$.
- В A_4 три занятых клетки A_4B_2 , A_4B_3 , A_4B_5 , которые связывают потенциал U_4 с потенциалами V_2 , V_3 , V_5

• Определим эти потенциалы

$$V_2 = C_{42} - U_4 = 8 - 0 = 8$$

$$V_3 = C_{43} - U_4 = 12 - 0 = 12$$

$$V_5 = C_{45} - U_4 = 13 - 0 = 13$$

С помощью U_4 нельзя определить больше никакой потенциал, подчеркиваем U_4

Поставщики	Потребители					Запасы	
	В1	В2	В3	В4	В5		
	u		$v_2=8$	$v_3=12$		$v_5=13$	
	v						
A1		10	7	4	1	4	100
					100		
A2		2	7	10	6	11	250
		200	50				
A3		8	5	3	2	2	200
						200	
A4	<u>$u_4=0$</u>	11	8	12	16	13	300
			150	100		50	
Потребности		200	200	100	100	250	850

- Поочередно просматриваем столбцы B_2 B_3 B_5 , для которых потенциалы определены.
- В столбце B_2 две занятые клетки A_2B_2 и A_4B_2 , которые связывают V_2 с U_2 и U_4 (уже определен).

$$U_2 = C_{22} - V_2 = 7 - 8 = -1 \text{ Подчеркиваем } V_2$$

- В столбце B_3 нет занятых клеток, связывающих V_3 с неизвестными потенциалами строк, подчеркиваем V_3

Поставщики	Потребители					Запасы	
		B1	B2	B3	B4		B5
	$u \backslash v$		$v_2=8$	$v_3=12$		$v_5=13$	
A1		10	7	4	1	4	100
A2	$u_2=-1$	2	7	10	6	11	250
A3		8	5	3	2	2	200
A4	$u_4=0$	11	8	12	16	13	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

- Переходим к V_5 . В нем одна занятая клетка A_3V_5 , которая связывает V_5 с неизвестным $U_3 = C_{32} - V_5 = 2 - 13 = -11$. Подчеркиваем V_5 .
- Потенциал U_2 занятой клетки A_2V_1 связан с неизвестным потенциалом $V_1 = 2 - (-1) = 3$. Подчеркиваем U_2 и U_3 .
- Подчеркиваем V_1 т.к. в V_1 нет занятых клеток, связывающих его с неизвестным потенциалом строки.

Поставщики	Потребители					Запасы	
		B1	B2	B3	B4		B5
	$u \setminus v$	<u>$v_1=3$</u>	<u>$v_2=8$</u>	<u>$v_3=12$</u>		<u>$v_5=13$</u>	
A1		10	7	4	1	4	100
					100		
A2	<u>$u_2=-1$</u>	2	7	10	6	11	250
		200	50				
A3	<u>$u_3=-11$</u>	8	5	3	2	2	200
						200	
A4	<u>$u_4=0$</u>	11	8	12	16	13	300
			150	100		50	
Потребности		200	200	100	100	250	850

- Построение системы потенциалов прервалось. Потенциалы U_1 и V_4 остались неопределенными, поскольку план **вырожденный**.
- Добавляем **фиктивно занятую** клетку с нулевой перевозкой в столбце V_4 или строке A_1 . Целесообразно найти клетку с наименьшей стоимостью, это клетка A_3V_4 .
- Тогда, $V_4 = C_{34} - U_3 = 2 - (-11) = 13$ $U_1 = C_{14} - V_4 = 1 - 13 = -12$

Поставщики	u \ v	Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
		<u>v1=3</u>	<u>v2=8</u>	<u>v3=12</u>	<u>v4=13</u>	<u>v5=13</u>	
A1	<u>u1=-12</u>	10	7	4	1	4	100
					100		
A2	<u>u2=-1</u>	2	7	10	6	11	250
		200	50				
A3	<u>u3=-11</u>	8	5	3	2	2	200
					0	200	
A4	<u>u4=0</u>	11	8	12	16	13	300
			150	100		50	
Потребности		200	200	100	100	250	850

Система потенциалов построена, уберем знаки подчеркивания и проверим правильность системы. Для этого проверяем для всех занятых клеток выполнение равенства

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

Поставщики	Потребители					Запасы	
	u \ v	B1 v1=3	B2 v2=8	B3 v3=12	B4 v4=13		B5 v5=13
A1	u1=-12	10	7	4	1	4	100
					100		
A2	u2=-1	2	7	10	6	11	250
		200	50				
A3	u3=-11	8	5	3	2	2	200
					0	200	
A4	u4=0	11	8	12	16	13	300
			150	100		50	
Потребности		200	200	100	100	250	850

Проверка выполнения условия оптимальности для незанятых клеток

- План будет оптимальным, если для **всех незанятых** клеток выполняется условие

$$U_i + V_j \leq C_{ij}$$

Если план **не оптимальный**, то для каждой клетки, в которой не выполняется условие находим величину разности и записываем в левый нижний угол клетки

$$(U_i + V_j) - C_{ij} > 0$$

- Для строки A_1 : $-9 < 10$, $-4 < 7$. $0 < 4$, $-8 < 4$.
- Для строки A_2 : для A_2V_3 $11 > 10$ или $11 - 10 = 1$, **1** записываем в клетку. Для A_2V_4 : $12 > 6$, $12 - 6 = 6$ записываем в клетку. Для A_2V_5 $12 > 11$, $12 - 11 = 1$ записываем в клетку.
- Для строки A_3 : $-8 < 8$, $-3 < 5$, $1 < 3$
- Для строки A_4 : $3 < 11$, $13 < 16$

Поставщики	u \ v	Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
		v1=3	v2=8	v3=12	v4=13	v5=13	
A1	u1=-12	10	7	4	1	4	100
					100		
A2	u2=-1	2	7	10	6+	11	250
		200	50	1	6	1	
A3	u3=-11	8	5	3	2	2	200
					0	200	
A4	u4=0	11	8	12	16	13	300
			150	100		50	
Потребности		200	200	100	100	250	850

Выбор клетки, в которую следует послать перевозку

Загрузке подлежит клетка соответствующая $\max[(U_i+V_j)-C_{ij}]$

Таким образом, выбираем $\max(1;6;1)=6$ клетку A_2B_4

Отмечаем знаком + клетку, которую надо загрузить, она считается занятой.

Поставщики	Потребители					Запасы	
	В1	В2	В3	В4	В5		
	u \ v	$v_1=3$	$v_2=8$	$v_3=12$	$v_4=13$	$v_5=13$	
A1	$u_1=-12$	10	7	4	1	4	100
					100		
A2	$u_2=-1$	2	7	10	6+	11	250
		200	50	1	6	1	
A3	$u_3=-11$	8	5	3	2	2	200
					0	200	
A4	$u_4=0$	11	8	12	16	13	300
			150	100		50	
Потребности		200	200	100	100	250	850

Построение цикла и определение величины перераспределения груза

- В таблице $m+n-1$ занятых клеток, поэтому имеется единственный цикл, все вершины которого в занятых клетках.
- Начинаем движение от клетки с + поочередно проставляем – и +.

Поставщики	Потребители					Запасы	
		B1	B2	B3	B4		B5
	u \ v	v1=3	v2=8	v3=12	v4=13	v5=13	
A1	u1=-12	10	7	4	1	4	100
A2	u2=-1	2	7-	10	6+	11	250
A3	u3=-11	8	5	3	2-	2+	200
A4	u4=0	11	8+	12	16	13-	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

- Находим $Q_0 = \min x_{ij}$, где x_{ij} – перевозки, стоящие в вершинах цикла со знаком “-”. $Q_0 = \min(50; 50; 0) = 0$.
- Следовательно, нулевую перевозку перемещаем в клетку A_2B_4 , остальные числа при вычитании и прибавлении нуля не изменяются.

Поставщики	Потребители					Запасы	
	u \ v	B1	B2	B3	B4		B5
		v1=3	v2=8	v3=12	v4=13	v5=13	
A1	u1=-12	10	7	4	1	4	100
					100		
A2	u2=-1	2	7-	10	6+	11	250
		200	50	1	0	1	
A3	u3=-11	8	5	3	2-	2+	200
						200	
A4	u4=0	11	8+	12	16	13-	300
			150	100		50	
Потребности		200	200	100	100	250	850

Новый опорный план проверяется на оптимальность

- Строится новая система потенциалов
- Клетка A_2B_4 стала занятой и для нее должно выполняться равенство $U_2 + V_4 = C_{24} = -1 + 13 = 12 \neq 6$. Следовательно, надо U_2 либо V_4 уменьшить на 6.
- Удобнее изменить V_4 , т.к. он связан только с U_1 . $V_4 = 13 - 6 = 7$
 $U_1 = C_{14} - V_4 = 1 - 7 = -6$.

Поставщики	Потребители					Запасы	
		B1	B2	B3	B4		B5
	$u \backslash v$	$v_1=3$	$v_2=8$	$v_3=12$	$v_4=7$	$v_5=13$	
A1	$u_1=-6$	10	7	4	1	4	100
A2	$u_2=-1$	2	7-	10	6+	11	250
A3	$u_3=-11$	8	5	3	2-	2+	200
A4	$u_4=0$	11	8+	12	16	13-	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

- Проверяется выполнение условий оптимальности для каждой незанятой клетки.
- Значение V_4 уменьшилось на 6 и в B_4 не могут появиться свободные клетки не удовлетворяющие условию оптимальности. Такие клетки могут быть только в строке (столбце) потенциал которой увеличился.

U_1 увеличился на 6. Строка A_1 : $-3 < 10$; $2 < 7$; $6 > 4$; $7 > 4$. A_1B_3 и A_1B_5 не удовлетворяют условию для их находим $U_i + V_j - C_{ij}$ и записываем в левый нижний угол клеток.

Поставщики	Потребители					Запасы	
		B1	B2	B3	B4		B5
	$u \backslash v$	$v_1=3$	$v_2=8$	$v_3=12$	$v_4=7$	$v_5=13$	
A1	$u_1=-6$	10	7	4	1	4	100
				2	100	3	
A2	$u_2=-1$	2	7	10	6	11	250
		200	50	1	0	1	
A3	$u_3=-11$	8	5	3	2	2	200
						200	
A4	$u_4=0$	11	8	12	16	13	300
			150	100		50	
Потребности		200	200	100	100	250	850

- Находим $\max(2;3;1;1)=3$. A_1B_5 подлежит загрузке, отмечаем ее + и определяем цикл перераспределения. $Q_0 = \min(50;50;100)=50$.
- По циклу 50 переносим в A_1B_5

Поставщики	Потребители						Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
	u \ v	v1=3	v2=8	v3=12	v4=7	v5=13	
A1	u1=-6	10	7	4	1	4	100
				2	100-	3+	
A2	u2=-1	2	7	10	6	11	250
		200	50-	1	0+	1	
A3	u3=-11	8	5	3	2	2	200
						200	
A4	u4=0	11	8	12	16	13	300
			150+	100		50-	
Потребности		200	200	100	100	250	850

Поставщики	Потребители					Запасы	
		B1	B2	B3	B4		B5
	$u \backslash v$	$v_1=3$	$v_2=8$	$v_3=12$	$v_4=7$	$v_5=13$	
A1	$u_1=-6$	10	7	4	1	4	100
A2	$u_2=-1$	2	7	10	6	11	250
A3	$u_3=-11$	8	5	3	2	2	200
A4	$u_4=0$	11	8	12	16	13	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

План улучшился на 150 единиц стоимости (произведение груза перемещенного в свободную клетку на величину $(U_i+V_j)-C_{ij}$.

$(U_i+V_j)-C_{ij}>0$ в свободных клетках показывает, на сколько уменьшится стоимость плана, если единицу груза перераспределить в эту клетку.

- В полученном опорном плане изменяем систему потенциалов.

Поставщики	Потребители					Запасы	
		В1	В2	В3	В4		В5
	$u \backslash v$	$v_1=3$	$v_2=8$	$v_3=12$	$v_4=7$	$v_5=10$	
A1	$u_1=-6$	10	7	4	1	4	100
A2	$u_2=-1$	2	7	10	6	11	250
A3	$u_3=-8$	8	5	3	2	2	200
A4	$u_4=0$	11	8	12	16	13	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

Условию оптимальности не удовлетворяют 2 клетки A_1V_3 и A_2V_3 , груз перемещаем в A_1V_3 .

- Строим цикл перераспределения.

Поставщики	Потребители					Запасы	
		В1	В2	В3	В4		В5
	$u \backslash v$	$v_1=3$	$v_2=8$	$v_3=12$	$v_4=7$	$v_5=10$	
A1	$u_1=-6$	10	7	4	1	4	100
A2	$u_2=-1$	2	7	10	6	11	250
A3	$u_3=-8$	8	5	3	2	2	200
A4	$u_4=0$	11	8	12	16	13	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

$Q_0 = \min(50; 0; 100) = 0$. Нулевую перевозку перемещаем в A_1V_3 и получаем новый опорный план.

Поставщики	Потребители					Запасы	
		B1	B2	B3	B4		B5
	$u \backslash v$	$v_1=3$	$v_2=8$	$v_3=12$	$v_4=7$	$v_5=10$	
A1	$u_1=-6$	10	7	4	1	4	100
A2	$u_2=-1$	2	7	10	6	11	250
A3	$u_3=-8$	8	5	3	2	2	200
A4	$u_4=0$	11	8	12	16	13	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

Вносим изменения в систему потенциалов

Поставщики	Потребители					Запасы	
		B1	B2	B3	B4		B5
	$u \backslash v$	$v_1=3$	$v_2=6$	$v_3=10$	$v_4=7$	$v_5=10$	
A1	$u_1=-6$	10	7	4	1	4	100
				0	50	50	
A2	$u_2=-1$	2	7	10	6	11	250
		200			50		
A3	$u_3=-8$	8	5	3	2	2	200
						200	
A4	$u_4=2$	11	8	12	16	13	300
			200	100			
Потребности		200	200	100	100	250	850

План **оптимальный**, его стоимость равна **4150** единиц.

Открытая(несбалансированная) модель транспортной задачи

Возможны два случая открытой модели:

1. Суммарные запасы превышают суммарные потребности

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

2. Суммарные потребности превышают суммарные запасы

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

Модель для случая 1:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j=1,2,\dots,n$$

Модель для случая 2:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j \quad j=1,2,\dots,n$$

- Открытая модель решается приведением к закрытой модели.
- В случае 1 вводится фиктивный потребитель B_{n+1} , потребности которого $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$
- В случае 2 вводится фиктивный поставщик A_{m+1} , потребности которого $a_{m+1} = \sum b_j - \sum a_i$
- Стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя или фиктивного поставщика полагают равной **нулю**.
- Получается закрытая задача. При ее решении фиктивному потребителю (поставщику) направляют груз от наименее выгодных поставщиков (потребителей).

Пример

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1	6	8	12	16	100
A2	16	10	8	6	15	400
A3	4	1	9	11	13	100
A4	3	2	7	7	15	100
Потребности	50	100	150	200	250	

$$\sum_{i=1}^4 a_i = 700; \quad \sum_{j=1}^5 b_j = 750; \quad a_5 = 50.$$

Поставщики	Потребители					Запасы
	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	1	6	8	12	16	100
А2	16	10	8	6	15	400
А3	4	1	9	11	13	100
А4	3	2	7	7	15	100
А5	0	0	0	0	0	50
Потребности	50	100	150	200	250	750

- При составлении первого опорного плана методом минимальной стоимости или двойного предпочтения необходимо **наименьшую стоимость выбирать только среди реальных поставщиков и потребителей, а запасы фиктивного поставщика (или потребителя) распределять в последнюю очередь.**
- Это правило используют и при введении фиктивных клеток.

ОТВЕТ

Поставщики	Потребители						Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
	u \ v	v1=3	v2=5	v3=10	v4=8	v5=17	
A1	u1=-2	1 50	6	8 50	12	16	100
A2	u2=-2	16	10	8	6 200	15 200	400
A3	u3=-4	4	1 100	9	11	13	100
A4	u4=-3	3	2 0	7 100	7	15	100
A5	u5=-17	0	0	0	0	0 50	50
Потребности		50	100	150	200	250	750

Вопросы

1. Как формулируется транспортная задача?
2. Как составить первый опорный план в транспортной задаче?
3. В чем сущность метода потенциалов?
4. Как с помощью метода потенциалов опорный план проверяется на оптимальность?
5. Как решается проблема вырождения в транспортной задаче?
6. Как решаются транспортные задачи с нарушенным балансом между спросом и предложением?