Транспортная задача линейного программирования

- Имеется **m** поставщиков $(A_1 \ldots A_m)$ некоторого однородного продукта в количествах $a_1 \ldots a_m$ соответственно.
- Требуется доставить этот продукт **n** потребителям $(B_1 \ldots B_n)$ в количествах $b_1 \ldots b_n$ соответственно.
- Известна c_{ij} стоимость перевозки единицы груза от **i**-го поставщика к **j**-му потребителю.
- Составить план перевозок, удовлетворяющий потребности в продукте и имеющий минимальную стоимость.

- Обозначим $\mathbf{x_{ij}}$ груз, перевозимый от **i**-го поставщика к **j**-му потребителю, $\mathbf{c_{ij}}$ – стоимость перевозки единицы груза.
- Условия задачи запишем в **матрицу планирования.**

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	……	Bn	
A1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	…… ……	c_{1n} x_{1n}	a_1
A2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	…… ……	c_{2n} x_{2n}	a_2
……	……	……	……	……	……	……
Am	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	…… ……	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	b_3	……	b_n	$\sum a_i=\sum b_j$

•Составим модель задачи

Стоимость всех перевозок:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

Все грузы должны быть вывезены:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,2.....m$$

Потребности в грузах должны быть обеспечены:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \quad j = 1,2.....n$$

Модель **закрытая**, т.е. суммарные потребности равны суммарным затратам.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Теорема

- Любая транспортная задача, у которой суммарный объем запасов совпадает с суммарным объемом потребностей, имеет решение

Построение первоначального опорного плана

- Система ограничений ТЗ содержит **m x n** неизвестных и **m+n** уравнений.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i=1,2.....m \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j=1,2.....n \qquad (2)$$

- Если сложить почленно уравнения подсистемы **(1)** и отдельно подсистемы **(2)** то получим два одинаковых уравнения.
- Следовательно подсистема **линейно зависима.**
- Если одно из уравнений отбросить, то система ограничений должна содержать **m+n-1** линейно независимых уравнений.
- Следовательно **невырожденный опорный план** ТЗ содержит **m+n-1** положительных компонент **(x_{ij})**, а остальные равны нулю.

Если условия задачи представлены в матрице планирования, то клетки, в которых находятся отличные от нуля перевозки называются **занятыми**, а остальные – **незанятыми**.

Занятые клетки соответствуют базисным переменным и для **невырожденного опорного плана их количество должно быть равно m+n-1**.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	……	Bn	
A1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	…… ……	C_{1n} X_{1n}	a_1
A2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	…… ……	C_{2n} X_{2n}	a_2
……	……	……	……	……	……	……
Am	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	…… ……	C_{mn} X_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	b_3	……	b_n	$\sum a_i=\sum b_j$

- **Опорность** плана при записи в виде таблицы означает его **ацикличность** , т.е. в таблице нельзя построить замкнутый цикл, все вершины которого лежат в занятых клетках.
- **(Циклом** называется набор клеток, в котором только две соседние клетки расположены в **одном столбце или одной строке**, причем последняя клетка находится в той же строке или столбце, что и первая).

- Всякий план ТЗ содержащий более **m+n-1 занятых** клеток не является опорным, т.к. ему соответствует **линейно зависимая система векторов.**
- При таком плане в таблице всегда можно построить **замкнутый цикл**.
- Если к занятым клеткам, определяющим опорный план (ацикличный) добавить одну незанятую клетку, то появится **единственный цикл.**

- Построение циклов начинают с какой-либо **занятой** клетки и переходят по столбцу (или строке) к другой **занятой** клетке, в которой делают **поворот под прямым углом** и движутся по строке (столбцу) к следующей занятой клетке и т.д. , пытаясь возвратиться к первой клетке.
- Если такой возврат возможен, то получаем цикл и план не является опорным.

- Существует несколько методов построения первоначального опорного плана.

Метод северо-западного угла

- Пусть условия ТЗ заданы таблицей.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10	7	4	1	4	100
A2	2	7	10	6	11	250
A3	8	5	3	2	2	200
A4	11	8	12	16	13	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

- Начинаем с первого потребителя **B1** и первого поставщика **A1**.
- Сравниваем $\mathbf{a_1=100}$ и $\mathbf{b_1=200}$, $\mathbf{a_1<b_1}$, меньший из объемов **100** записываем в левый нижний угол клетки $\mathbf{A_1B_1}$.
- Запасы первого поставщика израсходованы, поэтому в клетках первой строки ставим черту.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10 100	7 -	4 -	1 -	4 -	100
A2	2	7	10	6	11	250
A3	8	5	3	2	2	200
A4	11	8	12	16	13	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

Потребности **B1** неудовлетворенны на **200-100=100 ед**.

Сравниваем этот остаток с запасами **A2**: **100<250**, **100** ед. записываем в $\mathbf{A_2B_1}$ и удовлетворяем потребности **B1**, в оставшихся клетках первого столбца ставим черту.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10	7	4	1	4	100
	100	-	-	-	-	
A2	2	7	10	6	11	250
	100					
A3	8	5	3	2	2	200
	-					
A4	11	8	12	16	13	300
	-					
Потребности	200	200	100	100	250	850

У **A2** осталось **150 ед**. груза. Отдаем их **B2**. Потребности **B2 =200**, Записываем **150** в клетку $\mathbf{A_2B_2}$ и т.к. запасы **A2** израсходованы прочеркиваем клетки второй строки.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10 100	7 -	4 -	1 -	4 -	100
A2	2 100	7 150	10 -	6 -	11 -	250
A3	8 -	5	3	2	2	200
A4	11 -	8	12	16	13	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

- Потребности B2 не удовлетворены на **50** ед. Берем их у А3 и переходим к В3 и т.д.
- Процесс продолжается пока не закончатся запасы и потребности.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10 100	7 -	4 -	1 -	4 -	100
A2	2 100	7 150	10 -	6 -	11 -	250
A3	8 -	5 50	3 100	2 50	2 -	200
A4	11 -	8 -	12 -	16 50	13 250	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

- Начиная движение от занятой клетки A_1B_1 вернуться в нее, двигаясь только по занятым клеткам невозможно. **Следовательно план опорный.**
- План является невырожденным, т.к. содержит **m+n-1=4+5-1=8** занятых клеток.
- Мы не учитывали стоимость перевозок, поэтому план наверное не оптимальный.
- Найдем общую стоимость перевозок:
- **Z=100·10+100·2+150·7+50·5+100·3+50·2+**

  +50·16+235·13=6950 ед. стоимости.
- Если при составлении опорного плана учитывать стоимость, то план будет ближе к оптимальному.

Метод минимальной стоимости.

- Суть метода в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую и в эту клетку (ij) помещают меньшее из чисел $\mathbf{a_i}$ **или** $\mathbf{b_j}$**.**
- Вычеркивают столбец или строку (запасы израсходованы или запрос удовлетворен)
- Из оставшейся таблицы снова выбирают клетку с наименьшей стоимостью и т.д.
- Процесс продолжается пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Пусть условия ТЗ заданы таблицей

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10	7	4	1	4	100
A2	2	7	10	6	11	250
A3	8	5	3	2	2	200
A4	11	8	12	16	13	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

- Выбираем наименьшую стоимость, она помещена в клетке $\mathbf{A_1B_4}$, т.к. $\mathbf{a_1=b_4=100}$, то **100** помещаем в $\mathbf{A_1B_4}$ и вычеркиваем первую строку и четвертый столбец.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10 -	7 -	4 -	1 100	4	100
A2	2	7	10	6 -	11	250
A3	8	5	3	2 -	2	200
A4	11	8	12	16 -	13	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

- Наименьшей является стоимость в **A_2B_1** и **A_3B_5**.
- **В A_2B_1 200<250**, →**200** записываем и исключаем столбец **B_1**.
- В **A_3B_5 200<250** записываем 200 и исключаем строку **A_3.**

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10	7	4	1	4	100
	-	-	-	100		
A2	2	7	10	6	11	250
	200			-		
A3	8	5	3	2	2	200
	-	-	-	-	200	
A4	11	8	12	16	13	300
	-			-		
Потребности	200	200	100	100	250	850

• В таблице снова выбираем наименьшую стоимость и продолжим пока все запасы не будут распределены

Поставщики	Потребители					Запасы
	В1	В2	В3	В4	В5	
А1	10 -	7 -	4 -	1 100	4 -	100
А2	2 200	7 50	10 -	6 -	11 -	250
А3	8 -	5 -	3 -	2 -	2 200	200
А4	11 -	8 150	12 100	16 -	13 50	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

$X=(x_{14}=100,\ x_{21}=200,\ x_{22}=50, x_{35}=200, x_{42}=150, x_{43}=100,\ x_{45}=50)$.

План вырожденный опорный, т.к. 7 занятых клеток и нет циклов.

$Z=100\cdot1+200\cdot2+50\cdot7+200\cdot2+150\cdot8+100\cdot12+50\cdot13=4300$ ед.

Метод двойного предпочтения.

- Если таблица большая, то перебор элементов сложен и используют этот метод.
- В каждом столбце и строке отмечают знаком **ү** клетку с наименьшей стоимостью. В результате некоторые клетки имеют отметку **үү.**
- В эти клетки помещают максимально возможные объемы перевозок и исключают соответствующие строки и столбцы.
- Затем распределяют перевозки по клеткам с ү.
- В оставшейся таблице распределение производят по наименьшей стоимости.

Пусть условия ТЗ заданы таблицей

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10	7	4	1	4	100
A2	2	7	10	6	11	250
A3	8	5	3	2	2	200
A4	11	8	12	16	13	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

- Отметим клетки с минимальной стоимостью по строкам

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10	7	4	γ 1	4	100
A2	γ 2	7	10	6	11	250
A3	8	5	3	γ 2	γ 2	200
A4	11	γ 8	12	16	13	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

Отметим клетки с минимальной стоимостью по столбцам

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10	7	4	γγ 1	4	100
A2	γ γ 2	7	10	6	11	250
A3	8	γ 5	γ 3	γ 2	γ γ 2	200
A4	11	γ 8	12	16	13	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

- Сначала заполним клетки A_2B_1, A_1B_4 A_3B_5 а затем A_4B_2

	Потребители					
Поставщики	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	10	7	4	γγ 1	4	100
	-	-	-	**100**	-	
A2	γ γ 2	7	10	6	11	250
	200	-		-		
A3	8	γ 5	γ 3	γ 2	γ γ 2	200
	-	-	-	-	**200**	
A4	11	γ 8	12	16	13	300
	-	**200**		-		
Потребности	200	200	100	100	250	850

- Далее заполним клетки по минимальной стоимости A_2B_3, A_4B_3 , A_4B_5

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	10 -	7 -	4 -	γγ 1 **100**	4 -	100
A2	γ γ 2 **200**	7 -	10 **50**	6 -	11 -	250
A3	8 -	γ 5 -	γ 3 -	γ 2 -	γ γ 2 **200**	200
A4	11 -	γ 8 **200**	12 **50**	16 -	13 **50**	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

Получился вырожденный опорный план.

Z=100·1+200·2+50·10+200·2+200·8+50·12+50·13=4250ед

.

- С помощью рассмотренных методов можно получить вырожденный или невырожденный **опорный** план.
- **Оптимальный** план можно найти с помощью симплекс метода, однако, из-за большого количества переменных обычно используют более простой метод – **метод потенциалов.**

Метод потенциалов

- **Теорема**
- Если план X^* транспортной задачи является **оптимальным**, то ему соответствует система из **m+n** чисел $\mathbf{U^*_I}$ $\mathbf{V^*_j}$, удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{U^*_i+V^*_j=C_{ij}}$$

$$\mathbf{U^*_i+V^*_j\le C_{ij}}$$

Числа $\mathbf{U^*_I}$ и $\mathbf{V^*_j}$ называются потенциалами соответственно поставщиков и потребителей.

•Доказательство

Транспортную задачу

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i & i = 1,2,\ldots m \\ x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = b_j & j = 1,2,\ldots n \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2,\ldots m \quad j = 1,2,\ldots n)$$

можно рассматривать как двойственную некоторой исходной задаче линейного программирования

Пусть каждому ограничению вида

$$x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} = a_i$$

в исходной задаче соответствует переменная **U**$_i$ (i=1,2,..m), а каждому ограничению вида

$$x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{mj} = b_j$$

переменная **V**$_j$ j=(1,2,…n) .

Тогда двойственная задача запишется так:

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i U_i + \sum_{j=1}^{n} b_j V_j \rightarrow \max$$

$$U_i + V_j \le C_{ij} \quad (i = 1,2,...m \quad j = 1,2,...n)$$

•План **X*** является оптимальным планом двойственной задачи, поэтому план

Y*=(U*_I, V*_j) является оптимальным планом исходной задачи и согласно теоремы двойственности

$$\max\ f = \min Z$$

$$\textit{или} \quad \sum_{i=1}^{m} a_i U_i + \sum_{j=1}^{n} b_j V_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

$$\textit{где} \quad x_{ij}^{*} \geq 0$$

- На основании свойств двойственных задач получаем:
- ограничения исходной задачи, соответствующие **положительным переменным оптимального плана двойственной задачи, являются равенствами, а соответствующие нулевым переменным, неравенствами**, т.е.

$$U_i^* + V_j^* = C_{ij} \quad для \quad x_{ij}^* > 0$$

$$U_i^* + V_j^* \le C_{ij} \quad для \quad x_{ij}^* = 0$$

Из теоремы следует, что для того, чтобы опорный план был оптимальным, необходимо выполнение следующих условий:

1. Для каждой **занятой клетки** сумма потенциалов должна быть равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

2. Для каждой **незанятой клетки** сумма потенциалов должна быть меньше или равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке

$$U_i + V_j \le C_{ij}$$

- Если хотя бы одна незанятая клетка не удовлетворяет этому условию, то план **не оптимален** и его можно улучшить, вводя в базис вектор, соответствующий клетке, для которой нарушается условие оптимальности

(в клетку надо переместить некоторое количество груза).

- Таким образом, для проверки плана на оптимальность надо построить систему потенциалов.

•**Построение системы потенциалов**.

Используем условие

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

Систему потенциалов можно построить только для невырожденного плана. Он должен содержать **m+n-1** занятых клеток и для него можно составить систему из **m+n-1** линейно независимых уравнений с **n+m-1** неизвестными.

Если уравнений меньше чем неизвестных, система неопределенная, то одному неизвестному (U_i) придают нулевое значение и все потенциалы определяются однозначно.

- Пусть известен потенциал **U_i** тогда

$$V_j = C_{ij} - U_i$$

Если известен потенциал **V_j** тогда

$$U_i = C_{ij} - V_j$$

Поставщики		Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
	u \ v						
A1		10	7	4	1 100	4	100
A2		2 200	7 50	10	6	11	250
A3		8	5	3	2	2 200	200
A4	u4=0	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

- В таблице выбираем строку с наибольшим количеством занятых клеток (**A_4**) и полагаем **$U_4=0$**.
- В **A_4** три занятых клетки **A_4B_2 A_4B_3 A_4B_5**, которые связывают потенциал **U_4** с потенциалами **V_2 , V_3, ,V_5**

- Определим эти потенциалы

$$V_2 = C_{42} - U_4 = 8 - 0 = 8$$

$$V_3 = C_{43} - U_4 = 12 - 0 = 12$$

$$V_5 = C_{45} - U_4 = 13 - 0 = 13$$

С помощью U_4 нельзя определить больше никакой потенциал, подчеркиваем U_4

Поставщики		Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
	u \ v		v2=8	v3=12		v5=13	
A1		10	7	4	1 100	4	100
A2		2 200	7 50	10	6	11	250
A3		8	5	3	2	2 200	200
A4	<u>u4=0</u>	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

- Поочередно просматриваем столбцы B_2 B_3 B_5 , для которых потенциалы определены.
- В столбце B_2 две занятые клетки A_2B_2 и A_4B_2 , которые связывают V_2 с U_2 и U_4(уже определен).

$U_2 = C_{22} - V_2 = 7 - 8 = -1$ Подчеркиваем V_2

- В столбце B_3 нет занятых клеток, связывающих V_3 с неизвестными потенциалами строк, подчеркиваем V_3

Поставщики	u \ v	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
			v2=8	v3=12		v5=13	
A1		10	7	4	1 100	4	100
A2	u2=-1	2 200	7 50	10	6	11	250
A3		8	5	3	2	2 200	200
A4	u4=0	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

- Переходим к **B_5.** В нем одна занятая клетка **A_3B_5** , которая связывает **V_5** с неизвестным **$U_3=C_{32}-V_5=2-13=-11$** Подчеркиваем **V_5**
- Потенциал **U_2** занятой клетки **A_2B_1** связан с неизвестным потенциалом **$V_1=2-(-1)=3$**. Подчеркиваем **U_2 и U_3**
- Подчеркиваем **V_1 т.к. в B_1** нет занятых клеток, связывающих его с неизвестным потенциалом строки

Поставщики	u \ v	Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
		v1=3	v2=8	v3=12		v5=13	
A1		10	7	4	1 100	4	100
A2	u2=-1	2 200	7 50	10	6	11	250
A3	u3=-11	8	5	3	2	2 200	200
A4	u4=0	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

- Построение системы потенциалов прервалось. Потенциалы **U_1** и **V_4** остались неопределенными, поскольку план **вырожденный**.
- Добавляем **фиктивно занятую** клетку с нулевой перевозкой в столбце **B_4** или строке **A_1**. Целесообразно найти клетку с наименьшей стоимостью, это клетка **A_3B_4.**
- Тогда, **$V_4=C_{34}-U_3=2-(-11)=13$ $U_1=C_{14}-V_4=1-13=-12$**

Поставщики		Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
	u \ v	v1=3	v2=8	v3=12	v4=13	v5=13	
A1	u1=-12	10	7	4	1 100	4	100
A2	u2=-1	2 200	7 50	10	6	11	250
A3	u3=-11	8	5	3	2 0	2 200	200
A4	u4=0	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

Система потенциалов построена, уберем знаки подчеркивания и проверим правильность системы. Для этого проверяем для всех занятых клеток выполнение равенства

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

Поставщики		Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
	u \ v	v1=3	v2=8	v3=12	v4=13	v5=13	
A1	u1=-12	10	7	4	1 100	4	100
A2	u2=-1	2 200	7 50	10	6	11	250
A3	u3=-11	8	5	3	2 0	2 200	200
A4	u4=0	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

Проверка выполнения условия оптимальности для незанятых клеток

- План будет оптимальным, если для **всех незанятых** клеток выполняется условие

$$U_i + V_j \le C_{ij}$$

Если план **не оптимальный**, то для каждой клетки, в которой не выполняется условие находим величину разности и записываем в левый нижний угол клетки

$$(U_i + V_j) - C_{ij} > 0$$

- Для строки A_1: -9<10, -4<7. 0<4, -8<4.
- Для строки A_2 : для A_2B_3 11> 10 или 11-10=1, 1 записываем в клетку. Для A_2B_4: 12>6, 12-6=6 записываем в клетку. Для A_2B_5 12>11, 12-11=1 записываем в клетку.
- Для строки A_3: -8<8, -3<5, 1<3
- Для строки A_4: 3<11, 13<16

Поставщики	u \ v	B1 v1=3	B2 v2=8	B3 v3=12	B4 v4=13	B5 v5=13	Запасы
A1	u1=-12	10	7	4	1 100	4	100
A2	u2=-1	2 200	7 50	10 1	6+ 6	11 1	250
A3	u3=-11	8	5	3	2 0	2 200	200
A4	u4=0	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

Выбор клетки, в которую следует послать перевозку

Загрузке подлежит клетка соответствующая **max[(U_i+V_j)-C_{ij}]**

Таким образом, выбираем max(1;6;1)=6 клетку A_2B_4

Отмечаем знаком **+** клетку, которую надо загрузить, она считается занятой.

Поставщики	u \ v	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
		Потребители					
		v1=3	v2=8	v3=12	v4=13	v5=13	
A1	u1=-12	10	7	4	1 100	4	100
A2	u2=-1	2 200	7 50	10 1	6+ 6	11 1	250
A3	u3=-11	8	5	3	2 0	2 200	200
A4	u4=0	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

Построение цикла и определение величины перераспределения груза

- В таблице m+n-1 занятых клеток, поэтому имеется единственный цикл, все вершины которого в занятых клетках.
- Начинаем движение от клетки с + поочередно проставляем – и +.

Поставщики		Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
	u \ v	v1=3	v2=8	v3=12	v4=13	v5=13	
A1	u1=-12	10	7	4	1 100	4	100
A2	u2=-1	2 200	7- 50	10 1	6+ 6	11 1	250
A3	u3=-11	8	5	3	2- 0	2+ 200	200
A4	u4=0	11	8+ 150	12 100	16	13- 50	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

- Находим $Q_0=\min x_{ij}$, где x_{ij} – перевозки, стоящие в вершинах цикла со знаком "-". $Q_0=\min(50;50;0)=0$.
- **Следовательно, нулевую перевозку перемещаем в клетку A_2B_4, остальные числа при вычитании и прибавления нуля не изменяются.**

Поставщики		Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
	u \ v	v1=3	v2=8	v3=12	v4=13	v5=13	
A1	u1=-12	10	7	4	1 100	4	100
A2	u2=-1	2 200	7- 50	10 1	6+ 0	11 1	250
A3	u3=-11	8	5	3	2-	2+ 200	200
A4	u4=0	11	8+ 150	12 100	16	13- 50	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

Новый опорный план проверяется на оптимальность

- Строится новая система потенциалов
- Клетка A_2B_4 стала занятой и для нее должно выполняться равенство $U_2+V_4=C_{24}=-1+13=12\neq 6$. Следовательно, надо U_2 либо V_4 уменьшить на **6**.
- Удобнее изменить V_4, т.к. он связан только с U_1 . $V_4=13-6=7$ $U_1=C_{14}-V_4=1-7=-6$.

Поставщики	u \ v	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
		v1=3	v2=8	v3=12	v4=7	v5=13	
A1	u1=-6	10	7	4	1 100	4	100
A2	u2=-1	2 200	7- 50	10	6+ 0	11	250
A3	u3=-11	8	5	3	2-	2+ 200	200
A4	u4=0	11	8+ 150	12 100	16	13- 50	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

- Проверяется выполнение условий оптимальности для каждой незанятой клетки.
- Значение $\mathbf{V_4}$ уменьшилось на 6 и в $\mathbf{B_4}$ не могут появиться свободные клетки не удовлетворяющие условию оптимальности. Такие клетки могут быть только в строке (столбце) потенциал которой увеличился.

$\mathbf{U_1}$ увеличился на 6. Строка $\mathbf{A_1}$: $\mathbf{-3<10;\ 2<7;\ 6>4;\ 7>4.}$ $\mathbf{A_1B_3}$ **и** $\mathbf{A_1B_5}$ не удовлетворяют условию для их находим $\mathbf{U_i+V_j-C_{ij}}$ и записываем в левый нижний угол клеток.

Поставщики		Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
	u \ v	v1=3	v2=8	v3=12	v4=7	v5=13	
A1	u1=-6	10	7	4 2	1 100	4 3	100
A2	u2=-1	2 200	7 50	10 1	6 0	11 1	250
A3	u3=-11	8	5	3	2	2 200	200
A4	u4=0	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

- Находим max(2;3;1;1)=3. **A_1B_5** подлежит загрузке, отмечаем ее + и определяем цикл перераспределения. **Q_0=min(50;50;100)=50**.
- По циклу 50 переносим в **A_1B_5**

Поставщики		Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
	u \ v	v1=3	v2=8	v3=12	v4=7	v5=13	
A1	u1=-6	10	7	4 2	1 100-	4 3+	100
A2	u2=-1	2 200	7 50-	10 1	6 0+	11 1	250
A3	u3=-11	8	5	3	2	2 200	200
A4	u4=0	11	8 150+	12 100	16	13 50-	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

Поставщики		Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
	u \ v	v1=3	v2=8	v3=12	v4=7	v5=13	
A1	u1=-6	10	7	4 2	1 50	4 50	100
A2	u2=-1	2 200	7 0	10 1	6 50	11 1	250
A3	u3=-11	8	5	3	2	2 200	200
A4	u4=0	11	8 200	12 100	16	13	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

План улучшился на 150 единиц стоимости (произведение груза перемещенного в свободную клетку на величину $\mathbf{(U_i+V_j)-C_{ij}}$.

$\mathbf{(U_i+V_j)-C_{ij}>0}$ в свободных клетках показывает, на сколько уменьшится стоимость плана, если единицу груза перераспределить в эту клетку.

- В полученном опорном плане изменяем систему потенциалов.

Поставщики		Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
	u \ v	v1=3	v2=8	v3=12	v4=7	v5=10	
A1	u1=-6	10	7	4 2	1 50	4 50	100
A2	u2=-1	2 200	7 0	10 1	6 50	11	250
A3	u3=-8	8	5	3	2	2 200	200
A4	u4=0	11	8 200	12 100	16	13	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

Условию оптимальности не удовлетворяют 2 клетки **A_1B_3 и A_2B_3, груз перемещаем в A_1B_3.**

- Строим цикл перераспределения.

Поставщики	u \ v	Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
		v1=3	v2=8	v3=12	v4=7	v5=10	
A1	u1=-6	10	7	4 2+	1 50-	4 50	100
A2	u2=-1	2 200	7 0-	10 1	6 50+	11	250
A3	u3=-8	8	5	3	2	2 200	200
A4	u4=0	11	8 200+	12 100-	16	13	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

Q_0=min (50;0;100)=0. Нулевую перевозку перемещаем в A_1B_3 и получаем новый опорный план.

Поставщики		Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
	u v	v1=3	v2=8	v3=12	v4=7	v5=10	
A1	u1=-6	10	7	4 0	1 50	4 50	100
A2	u2=-1	2 200	7	10	6 50	11	250
A3	u3=-8	8	5	3	2	2 200	200
A4	u4=0	11	8 200	12 100	16	13	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

Вносим изменения в систему потенциалов

Поставщики		Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
	u \ v	v1=3	v2=6	v3=10	v4=7	v5=10	
A1	u1=-6	10	7	4 0	1 50	4 50	100
A2	u2=-1	2 200	7	10	6 50	11	250
A3	u3=-8	8	5	3	2	2 200	200
A4	u4=2	11	8 200	12 100	16	13	300
Потребности		200	200	100	100	250	850

План **оптимальный**, его стоимость равна **4150** единиц.

Открытая(несбалансированная) модель транспортной задачи

Возможны два случая открытой модели:

1. Суммарные запасы превышают суммарные потребности

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

2. Суммарные потребности превышают суммарные запасы

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Модель для случая 1:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad i=1,2.....m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \quad j=1,2.....n$$

Модель для случая 2:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,2.....m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_i \quad j = 1,2.....n$$

- Открытая модель решается приведением к закрытой модели.
- В **случае 1** вводится **фиктивный потребитель** $\mathbf{B_{n+1}}$, потребности которого $\mathbf{b_{n+1}=\sum a_i-\sum b_j}$
- В **случае 2** вводится **фиктивный поставщик** $\mathbf{A_{m+1}}$, потребности которого $\mathbf{a_{m+1}=\sum b_j- \sum a_i}$
- Стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя или фиктивного поставщика полагают равной **нулю**.
- Получается закрытая задача. При ее решении фиктивному потребителю (поставщику) направляют груз от наименее выгодных поставщиков (потребителей).

Пример

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1	6	8	12	16	100
A2	16	10	8	6	15	400
A3	4	1	9	11	13	100
A4	3	2	7	7	15	100
Потребности	50	100	150	200	250	

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 700; \quad \sum_{j=1}^{5} b_j = 750; \quad a_5 = 50.$$

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1	6	8	12	16	100
A2	16	10	8	6	15	400
A3	4	1	9	11	13	100
A4	3	2	7	7	15	100
A5	0	0	0	0	0	50
Потребности	50	100	150	200	250	750

- При составлении первого опорного плана методом минимальной стоимости или двойного предпочтения необходимо **наименьшую стоимость выбирать только среди реальных поставщиков и потребителей, а запасы фиктивного поставщика (или потребителя) распределять в последнюю очередь.**
- Это правило используют и при введении фиктивных клеток.

Ответ

Поставщики		Потребители					Запасы
		B1	B2	B3	B4	B5	
	u \ v	v1=3	v2=5	v3=10	v4=8	v5=17	
A1	**u1=-2**	1 50	6	8 50	12	16	100
A2	**u2=-2**	16	10	8	6 200	15 200	400
A3	**u3=-4**	4	1 100	9	11	13	100
A4	**u4=-3**	3	2 0	7 100	7	15	100
A5	**u5=-17**	0	0	0	0	0 50	50
Потребности		50	100	150	200	250	750

Вопросы

1. Как формулируется транспортная задача?
2. Как составить первый опорный план в транспортной задаче?
3. В чем сущность метода потенциалов?
4. Как с помощью метода потенциалов опорный план проверяется на оптимальность?
5. Как решается проблема вырождения в транспортной задаче?
6. Как решаются транспортные задачи с нарушенным балансом между спросом и предложением?