

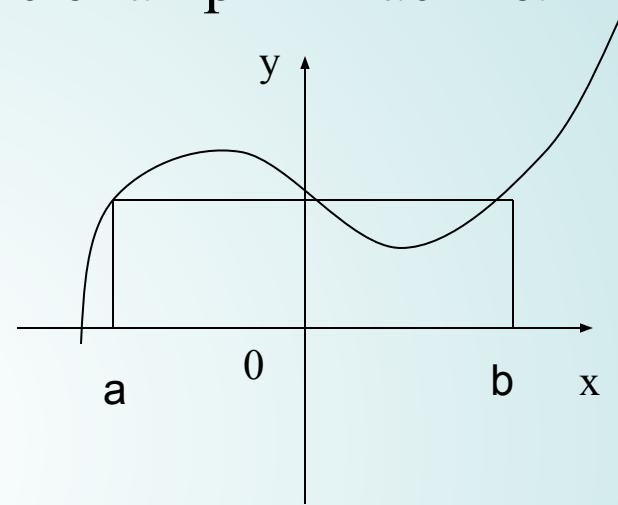
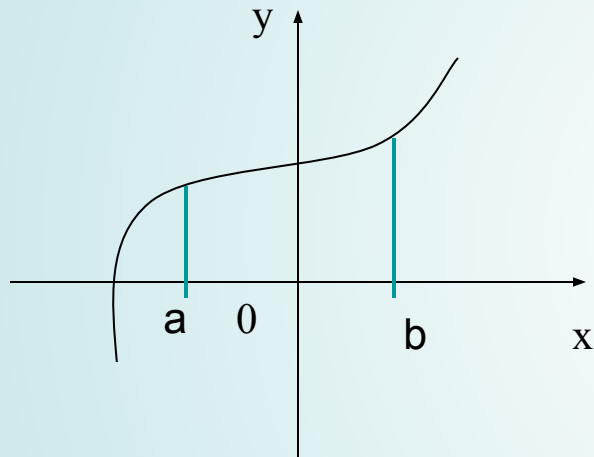
Лекция



Обратные тригонометрические функции

I. Понятие обратной функции

Функция $y = f(x)$, определенная на промежутке X , называется **обратимой**, если любое свое значение она принимает только в одной точке промежутка X .



Функция $y = f(x)$ не обратима на $[a; b]$

Функция $y = f(x)$ обратима на $[a; b]$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на промежутке X , то она обратима на этом промежутке.

Доказательство.

Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на X , тогда по определению возрастающей функции

$$\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

т.о. различным значениям аргумента соответствуют различные значения функции, т.е. функция обратима.

Пусть обратимая функция $y = f(x)$ определена на промежутке X , а областью значений ее является промежуток Y . Поставим в соответствие каждому $y \in Y$ то единственное значение $x \in X$, при котором $y = f(x)$. Тогда получим функцию, которая обозначается

$$x = f^{-1}(y)$$

и называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$.

Обычно для обратной функции делают переход к привычным обозначениям, т.е. аргумент обозначают буквой x , а значение функции y .

Поэтому вместо $x = f^{-1}(y)$ пишут $y = f^{-1}(x)$

Замечание. Графики взаимнообратных функций симметричны относительно прямой $y = x$

Алгоритм получения обратной функции

- 1) Убедиться в том, что функция $y = f(x)$ обратима на X .
- 2) Из уравнения $y = f(x)$ выразить x через y .
- 3) В полученном равенстве поменять местами x и y .

Свойства обратной функции

- 1) $D(f) = E(f^{-1}); \quad E(f) = D(f^{-1})$
- 2) Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на $D(f)$, то и функция $y = f^{-1}(x)$ возрастает (убывает) на $D(f^{-1})$;
- 3) $f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in D(f)$

Лекция



Обратные тригонометрические функции

Тест 10 минут

Критерии

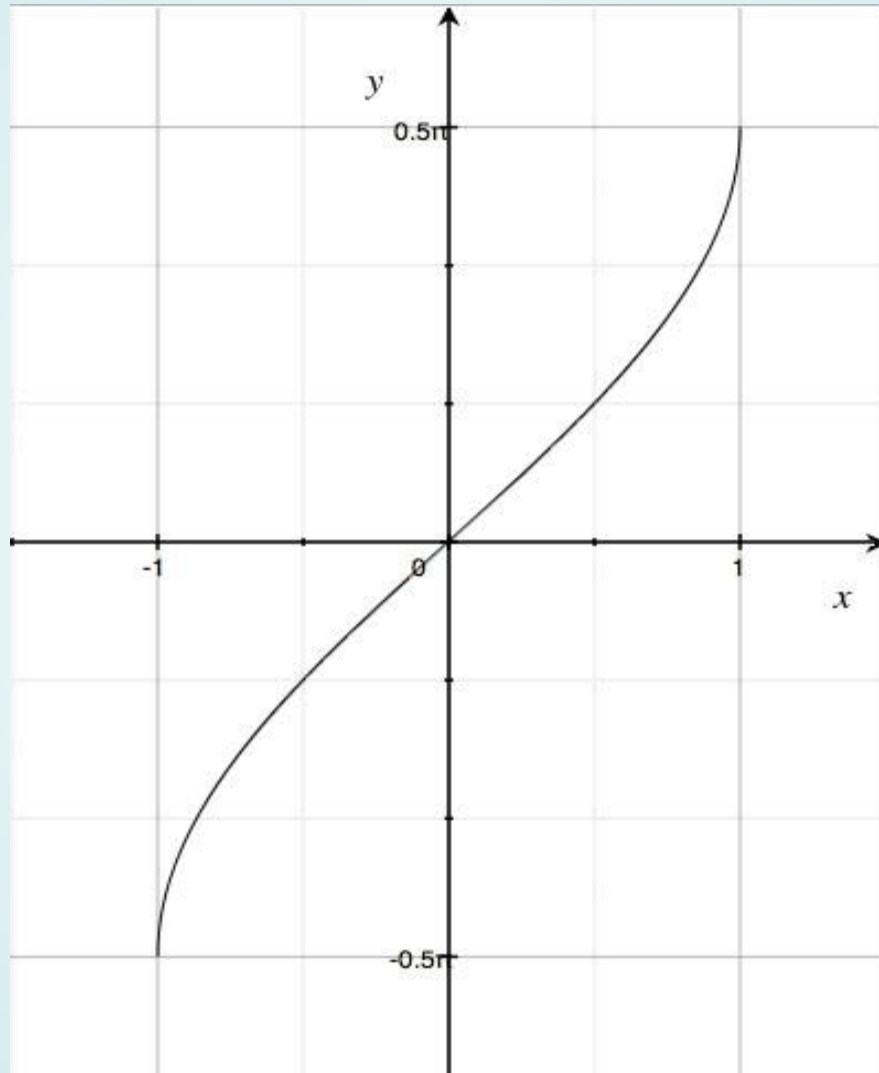
Оценка «5» - 5 баллов

Оценка «4» - 4 балла

Оценка «3» - 3 балла

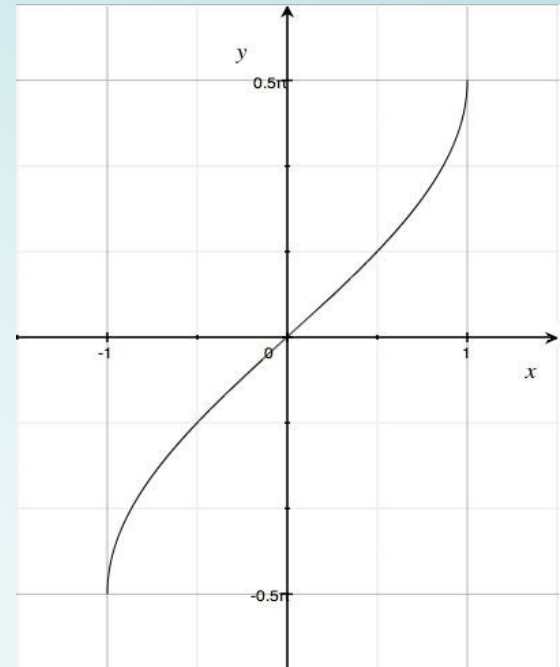
Оценка «2» - 2 и менее баллов

$$y = \arcsin x$$

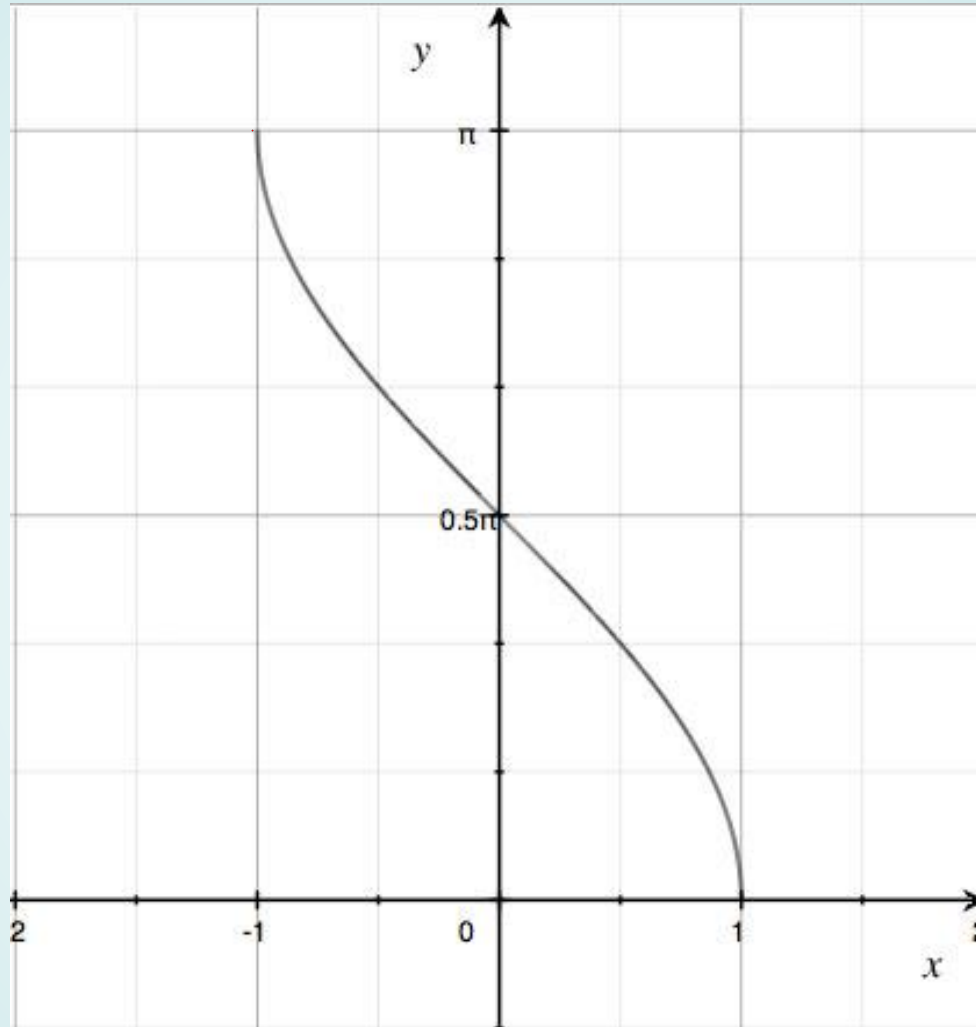


$y = \arcsin x$

- 1) Область определения $D(y) = [-1; 1]$
- 2) Область значений $E(y) = [-\pi/2; \pi/2]$
- 3) Функция нечетная $\arcsin x = -\arcsin(-x)$;
- 4) Функция не является периодической ;
- 5) Функция возрастает на $D(y)$;
- 6) Точки пересечения с осями: $x=0, y=0$;
- 7) Промежутки знакопостоянства $\arcsin x > 0$ при $x \in (0; 1]$
 $\arcsin x < 0$ при $x \in [-1; 0)$
- 8) Наибольшее значение $y = \frac{\pi}{2}$ при $x = 1$,
наименьшее значение $y = -\frac{\pi}{2}$ при $x = -1$;
- 9) Ассимптот нет ;

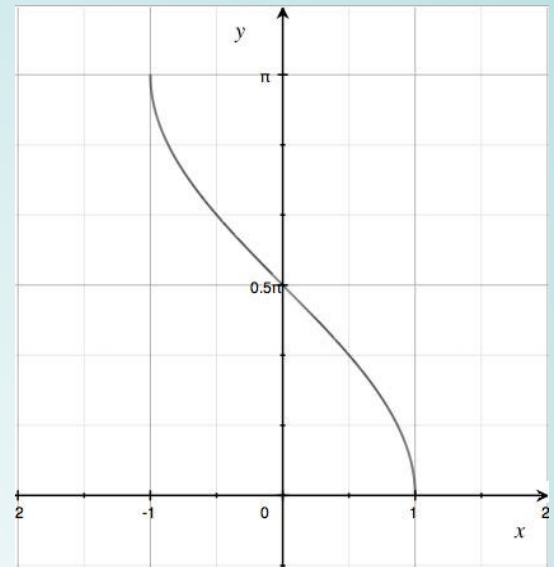


$$y = \arccos x$$

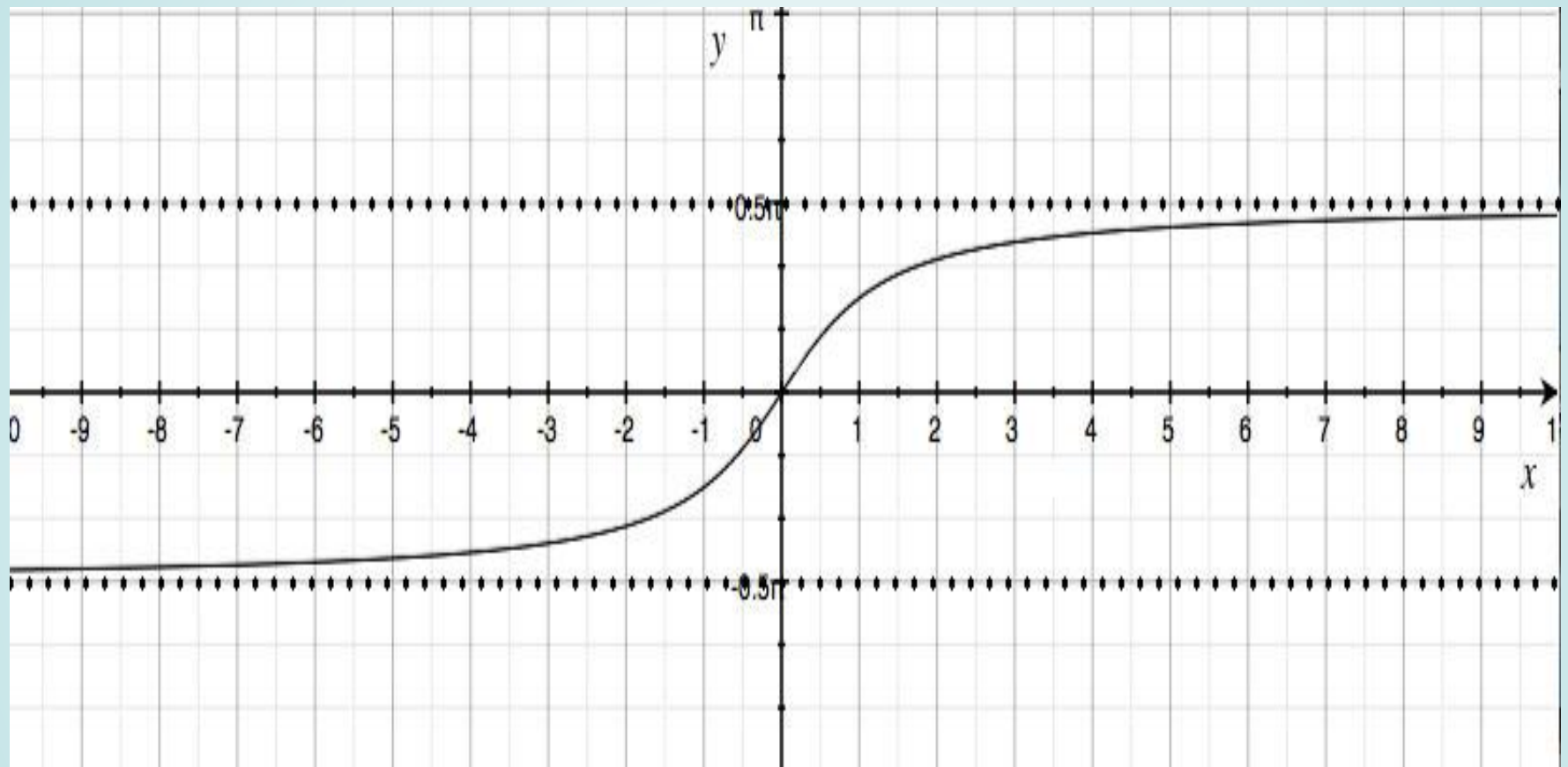


$y = \arccos x$

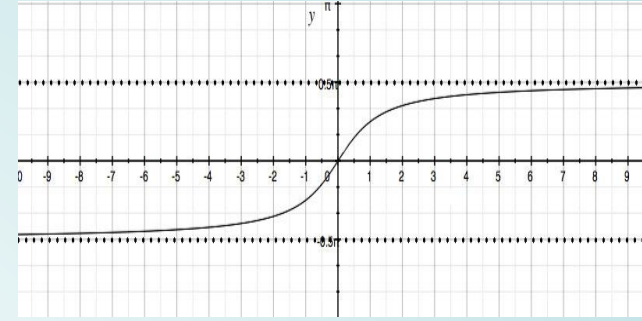
- 1) Область определения $D(y) = [-1; 1]$
- 2) Область значений $E(y) = [0; \pi]$;
- 3) Функция не обладает определенной четностью;
- 4) Функция не является периодической ;
- 5) Функция убывает на $D(y)$;
- 6) Точки пересечения с осями: 1) $x=0, y = \frac{\pi}{2}$; 2) $y=0, x=1$
- 7) Промежутки знакопостоянства $\arccos x > 0$ при $x \in [-1; 1]$
- 8) Наибольшее значение $y = \pi$ при $x = -1$,
наименьшее значение $y = 0$ при $x = 1$;
- 9) Ассимптот нет .



$$y = \operatorname{arctg} x$$

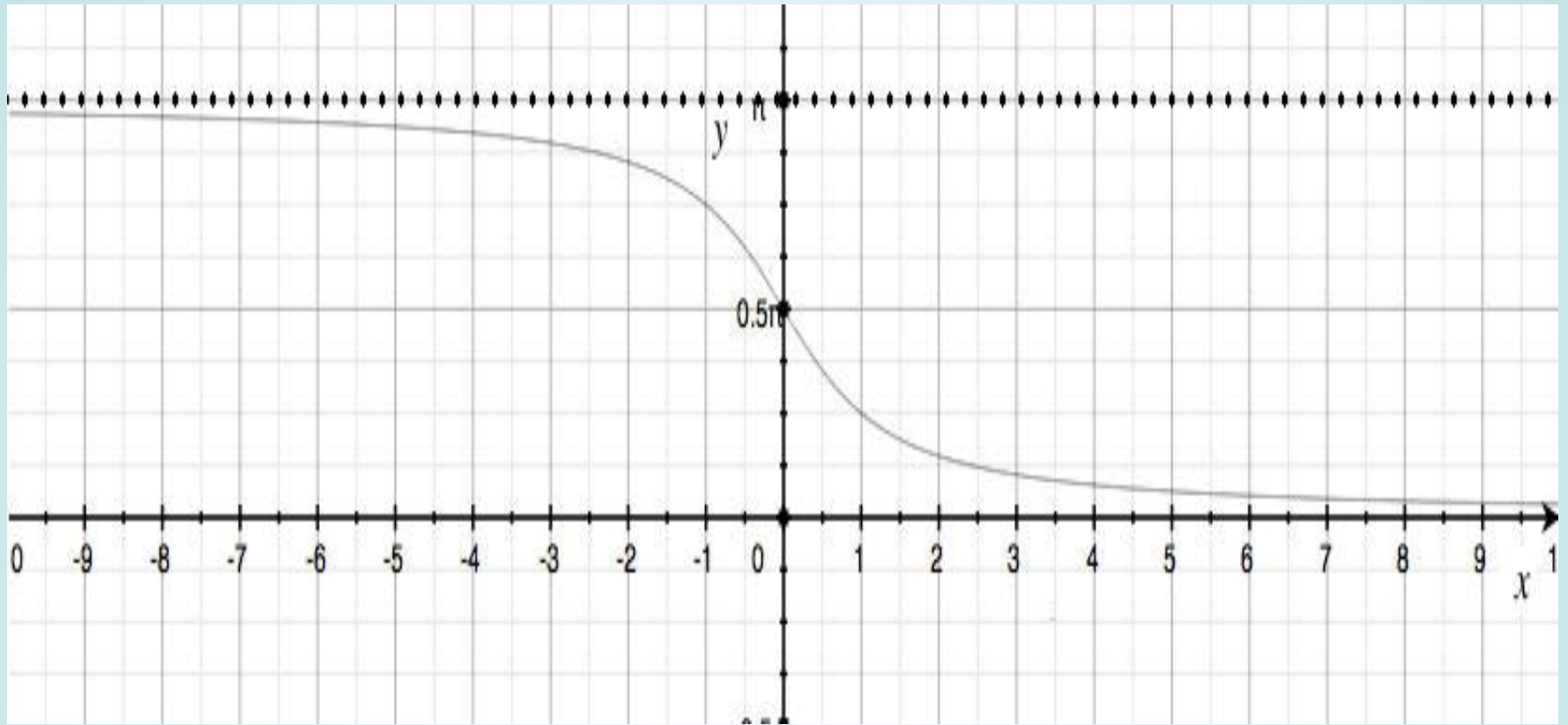


$y = \operatorname{arctg} x$



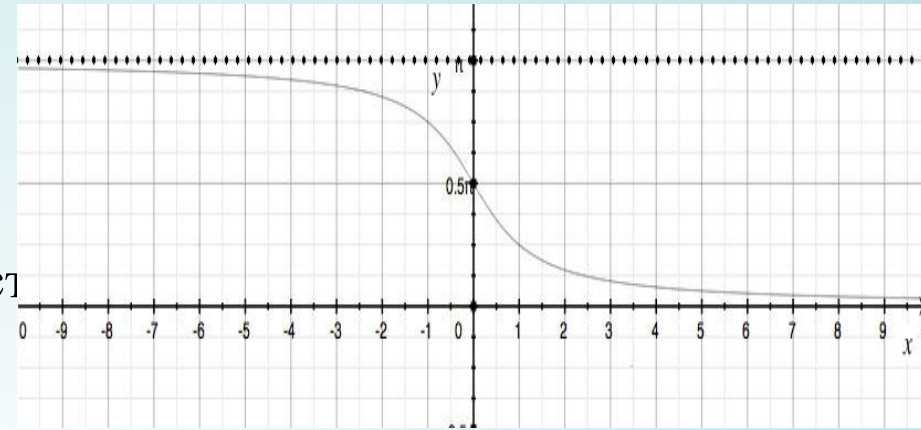
- 1) Область определения $D(y) = \mathbb{R}$;
- 2) Область значений $E(y) = (-\pi/2; \pi/2)$;
- 3) Функция нечетная $\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg} (-x)$;
- 4) Функция неперiodическая ;
- 5) Функция возрастает на $D(y)$;
- 6) Точки пересечения с осями: $x=0, y=0$;
- 7) Промежутки знакопостоянства $\operatorname{arctg} x > 0$ при $x \in (0; +\infty)$
 $\operatorname{arctg} x < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$
- 8) Наибольшего и наименьшего значений не существует ;
- 9) Горизонтальные асимптоты $y = \pm \frac{\pi}{2}$;

$$y = \operatorname{arctg} x$$



$y = \operatorname{arctg} x$

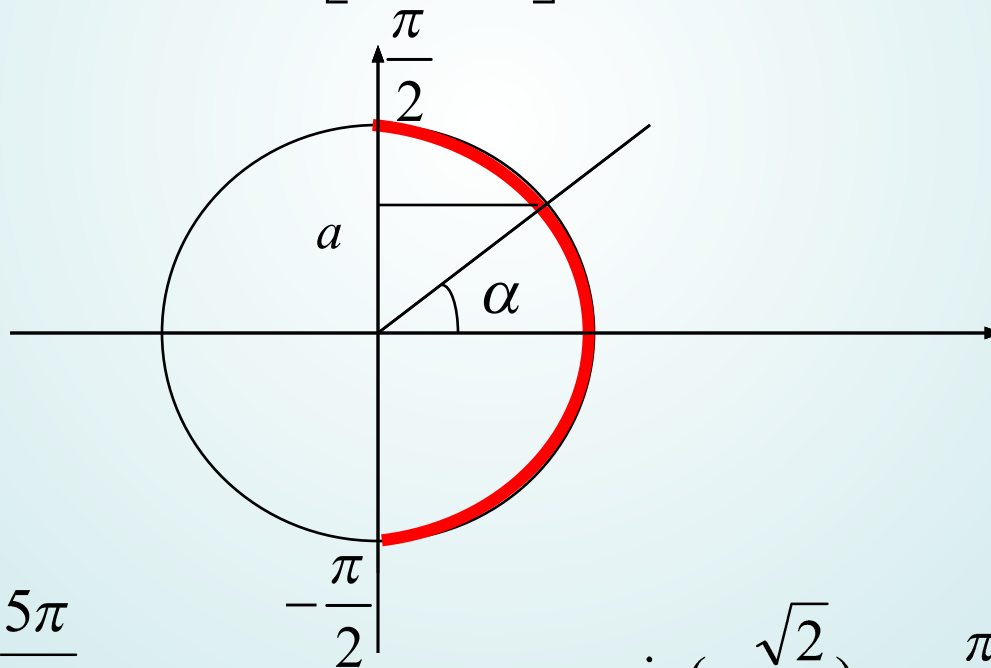
- 1) Область определения $D(y) = \mathbb{R}$;
- 2) Область значений $E(y) = (0; \pi)$;
- 3) Функция не имеет определенной четности ;
- 4) Функция неперiodическая ;
- 5) Функция убывает на $D(y)$;
- 6) Точки пересечения с осями: $x=0$, $y = \frac{\pi}{2}$;
- 7) Промежутки знакопостоянства $\operatorname{arctg} x > 0$ при $x \in \mathbb{R}$;
- 8) Наибольшего и наименьшего значений не существует ;
- 9) Горизонтальные асимптоты $y = 0$; $y = \pi$.



Смысловые значения записей $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$

$\arcsin a$ – это угол из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a .

$$\arcsin a = \alpha, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin \alpha = a$$



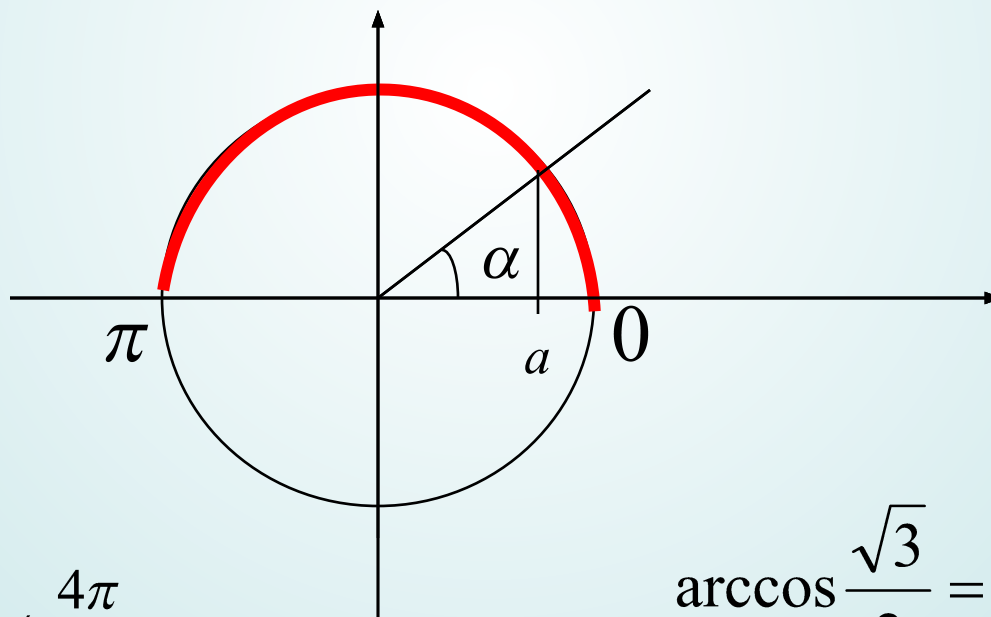
$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} \neq -\frac{3\pi}{4} \neq \frac{5\pi}{4}$$

Смысловые значения записей $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$

$\arccos a$ – это угол из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a .

$$\arccos a = \alpha, \alpha \in [0; \pi] \Rightarrow \cos \alpha = a$$



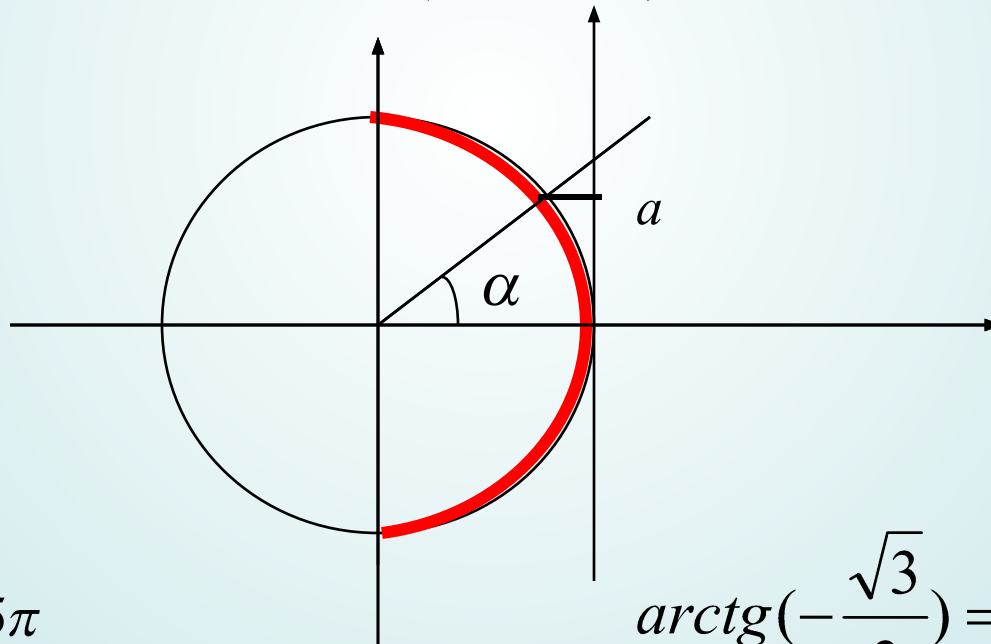
$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \neq \frac{4\pi}{3}$$

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \neq -\frac{\pi}{6}$$

Смысловые значения записей $\arcsin a$, $\arccos a$, $\arctg a$, $\text{arcctg } a$

$\arctg a$ – это угол из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a .

$$\arctg a = \alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \text{tg } \alpha = a$$



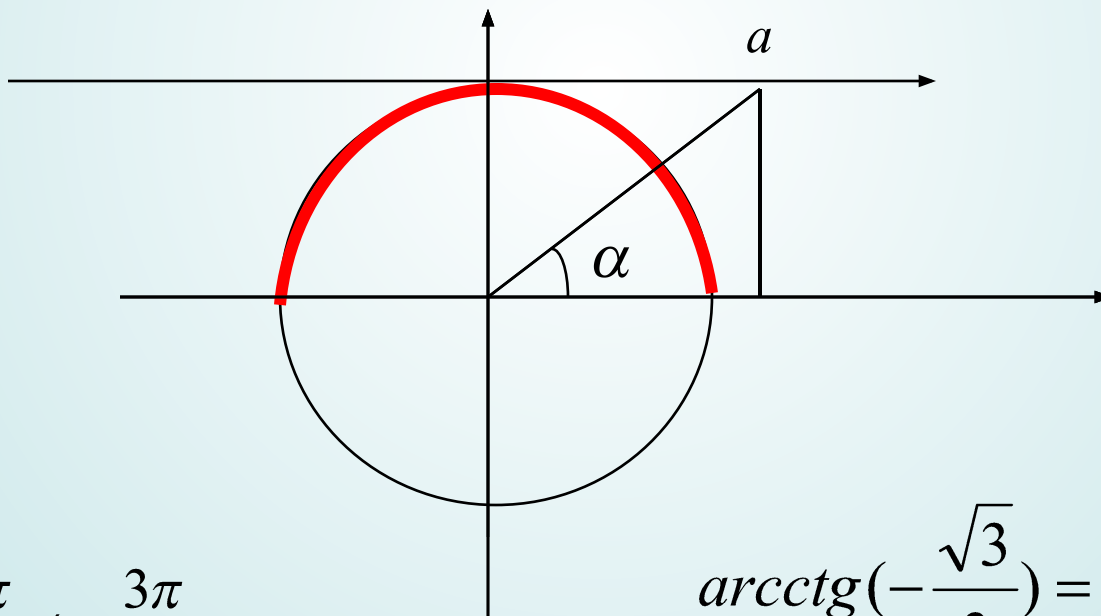
$$\arctg 1 = \frac{\pi}{4} \neq \frac{5\pi}{4}$$

$$\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$$

Смысловые значения записей $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$

$\operatorname{arcctg} a$ – это угол из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a .

$$\operatorname{arcctg} a = \alpha, \alpha \in (0; \pi) \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = a$$



$$\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{3\pi}{4}$$

$$\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\pi}{3} \neq -\frac{\pi}{3}$$

Основные свойства обратных тригонометрических функций

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arctg(-x) = -\arctg x$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg} x$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctg x + \text{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

ЗНАЧЕНИЯ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

<i>a</i>	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
<i>arcsin a</i>	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
<i>arccos a</i>	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

<i>a</i>	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
<i>arctg a</i>	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
<i>arcctg a</i>	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Тригонометрические тождества

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Формулы связывающие обратные тригонометрические функции

$$\arcsin \alpha = -\arcsin(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\arccos \alpha = \pi - \arccos(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arcsin \alpha = \operatorname{arcctg} \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\operatorname{arctg} \alpha = -\operatorname{arctg}(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} \alpha = \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$\operatorname{arcctg} \alpha = \pi - \operatorname{arcctg}(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \alpha = \arccos \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$