

Комплексные числа и квадратные уравнения.

- решение квадратных уравнений на множестве комплексных чисел;
- алгоритм извлечения квадратного корня из комплексного числа;
- полезные следствия для формулы корней квадратного уравнения

Квадратное уравнение с действительными

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

$$D = b^2 - 4ac,$$

если $D = 0$,

то уравнение имеет единственный корень,

если $D > 0$,

то уравнение имеет два различных

действительных корня,

если $D < 0$,

то корней (действительных) нет.



На множестве \mathbb{C} можно находить корни любых квадратных уравнений!

- Как извлечь квадратный корень из отрицательных действительных чисел?
- Решение квадратных уравнений с действительными коэффициентами и $D < 0$.
- Как извлечь квадратный корень из любого комплексного числа? (в алгебраической и тригонометрической форме записи).
- Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами.

Как извлечь квадратный корень из отрицательных действительных чисел?

- Определение: квадратным корнем (корнем второй степени) из комплексного числа z называют комплексное число, квадрат которого равен z .

$$\sqrt{-1} = ?$$

$$z^2 = -1, (x + iy)^2 = -1; x, y \in \mathbb{R}$$

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -1 + 0 \cdot i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2ixy = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0, -y^2 = -1, y^2 = 1, y = \pm 1 \\ y = 0, x^2 = -1, \text{действительных корней нет} \end{cases}$$

$$(0; 1) \Leftrightarrow z = i \text{ или } (0; -1) \Leftrightarrow z = -i$$

Формула извлечения квадратного корня из отрицательных действительных чисел

если $d < 0, d \in R$, то $\sqrt{d} = \pm\sqrt{-d} \cdot i$

$$\sqrt{-4} = \pm\sqrt{-(-4)} \cdot i = \pm 2i$$

$$\sqrt{-10} = \pm\sqrt{-(-10)} \cdot i = \pm\sqrt{10} \cdot i$$

$$\sqrt{-36} = \pm\sqrt{-(-36)} \cdot i = \pm 6i$$

Решение квадратных уравнений с действительными коэффициентами и

$$D < 0.$$

- Важно знать!

Если у уравнения есть комплексный корень, то и сопряжённое ему число – тоже является корнем этого уравнения!

$$z^2 - 3z + 8,5 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8,5 = -25$$

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-25}}{2} = \frac{3 \pm 5i}{2} = 1,5 \pm 2,5i$$

↑
Сопряжённые
числа

Как извлечь квадратный корень из любого комплексного числа? (в алгебраической и тригонометрической форме записи).

- **Теорема:** Если $b \neq 0$, то

$$\sqrt{a + bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \cdot \frac{b}{|b|} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right)$$

Что равносильно системе условий:

$$x^2 - y^2 = a$$

$$2xy = b$$

Например: $\sqrt{3 - 4i} = ?$

$$\sqrt{3 - 4i} = x + yi$$

$$3 - 4i = (x + yi)^2$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

$$x = 2, y = -1; \text{ или } x = -2, y = 1$$

$$(2; -1) \Leftrightarrow z = 2 - i \quad (-2; 1) \Leftrightarrow z = -2 + i$$

Избежать громоздких вычислений позволяет тригонометрическая форма записи комплексного числа.

• Теорема: $\sqrt{\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \pm\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

Доказательство:

$$z = \sqrt{\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)} \longrightarrow z^2 = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

↓
Всегда 2 корня!

$$\left(\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\left(-\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\left(\sqrt{\rho} (\cos \alpha/2 + i \sin \alpha/2)\right)^2 = \rho \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 =$$

$$= \rho \cdot \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \rho \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Аналогично:

$$\left(-\sqrt{\rho} (\cos \alpha/2 + i \sin \alpha/2)\right)^2 = \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Важно запомнить!

При возведении комплексного числа в квадрат – его аргумент удваивается!!!

Алгоритм извлечения квадратного корня из комплексного числа:

- 1) Найти модуль ρ и аргумент α этого числа;
- 2) Провести окружность радиусом $\sqrt{\rho}$ с центром в начале координат;
- 3) Провести через начало координат прямую под углом $\frac{\alpha}{2}$ к положительному направлению оси абсцисс;
- 4) Две точки пересечения проведённых окружности и прямой – дают ответ.

$$\sqrt{-2 + 2i\sqrt{3}} = ?$$

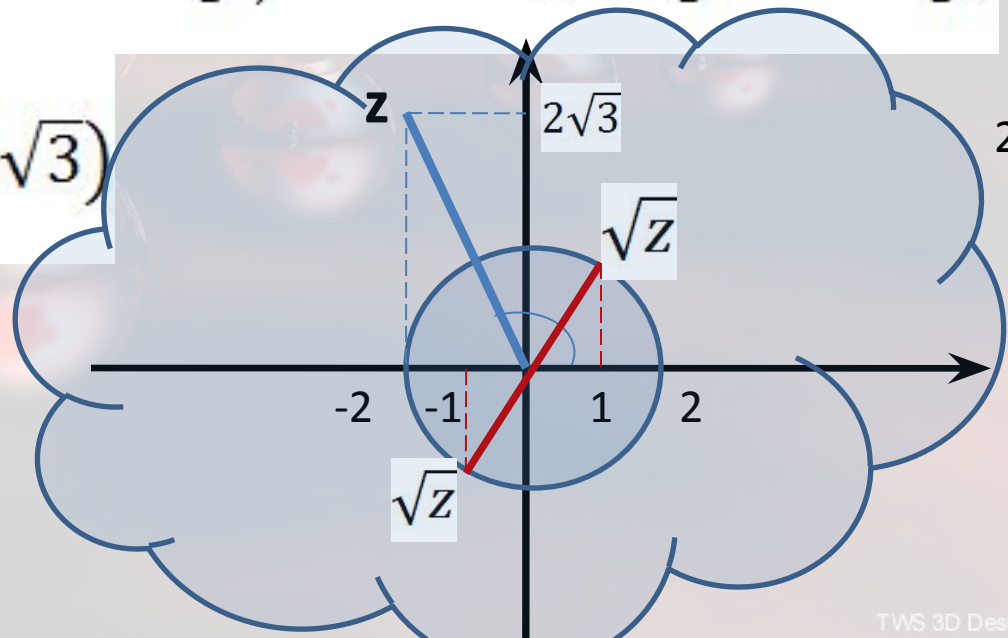
1). $\rho = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$

$$-2 + 2i\sqrt{3} = 4 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sqrt{-2 + 2i\sqrt{3}} = \sqrt{4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)} = \pm \sqrt{4} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) =$$

$$= \pm 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \pm (1 + i\sqrt{3})$$



2)-4).

Решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами.

- Так как множества \sqrt{D} и $\pm\sqrt{D}$ совпадают между собой, то для решения квадратных уравнений с комплексными коэффициентами можно сохранить привычную формулу корней квадратного уравнения:

$$az^2 + bz + c = 0, a \neq 0, \Leftrightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Полезные следствия для формулы корней квадратного уравнения:

- (теорема Виета)

Если z_1 и z_2 – корни квадратного уравнения

$$az^2 + bz + c = 0$$

то

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}; z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

- (формула разложения квадратного трёхчлена на линейные множители)

Если z_1 и z_2 – корни квадратного уравнения

$$az^2 + bz + c = 0$$

то

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Домашнее задание:

- §35 ИЗУЧИТЬ
- № 35.13
- №35.7