

Нелинейная интерполяция

Рассмотрим нелинейные
быстроменяющиеся функции.

Пусть дана таблица значений некоторой
функции $y=f(x)$.

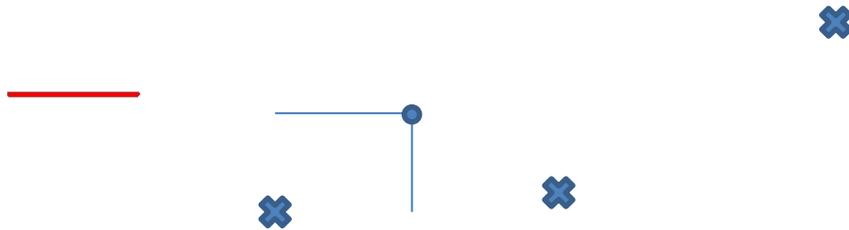
x_k	y_k	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
0	1	10	100	1020
1	11	110	1120	
2	121	1230		
3	1351			

Пусть требуется вычислить $y(0.5)$.

Очевидно, это значение лежит в диапазоне (1;11).

Используем интерполяционный
полином Ньютона: $N_3(0.5) \approx 57.25$

Нелинейная интерполяция



Нелинейная интерполяция

Метод выравнивания

Стараются подобрать такое преобразование переменных $\eta = \eta(y)$; $\xi = \xi(x)$, чтобы в новых переменных график функции $\eta(\xi)$ мало отличался от прямой линии на протяжении нескольких шагов таблицы.

Составляют таблицу $\eta_i = \eta(\xi_i)$, интерполируют по ней и обратным преобразованием находят $y = y(\eta)$.

Нелинейная интерполяция

Метод выравнивания

Сделаем замену $\xi=x$; $\eta=\lg y$ и составим новую таблицу:

ξ_k	η_k
0	0
1	1.0414
2	2.0828
3	3.1306

Интерполяция с помощью интерполяционного полинома Ньютона $N_3(\xi=0.5) \approx 0.5203 \Rightarrow$
 $\Rightarrow y=10^{0.5203} \approx 3.314$

Обратное интерполирование

Обратное интерполирование –

процесс нахождения x для

произвольного y , если задана таблица y_k

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \omega_k(x)$$

прямое
интерполирование

$$L_n(y) = \sum_{k=0}^n x_k \omega_k(y)$$

обратное
интерполирование

Метод обратного интерполирования

позволяет найти корень уравнения $f(x)=0$ для заданной таблично функции f .

Обратное интерполирование

По таблице $\{y_k; x_k\}$ строим интерполяционный полином

$$L_n(y) = \sum_{k=0}^n x_k \omega_k(y)$$

Находим значение полинома для $y=0$.

Это значение и будет корнем уравнения $f(x)=0$, т.е. $x^* = L_n(0)$.

Для достаточно гладких функций этот способ дает хорошие результаты.

Интерполирование сплайнами

Интерполяция на **больших отрезках** приводит к **плохому приближению**:

1. Если взять мало узловых точек, то точность будет очень мала;
2. Если взять много точек, то возрастает вычислительная погрешность.

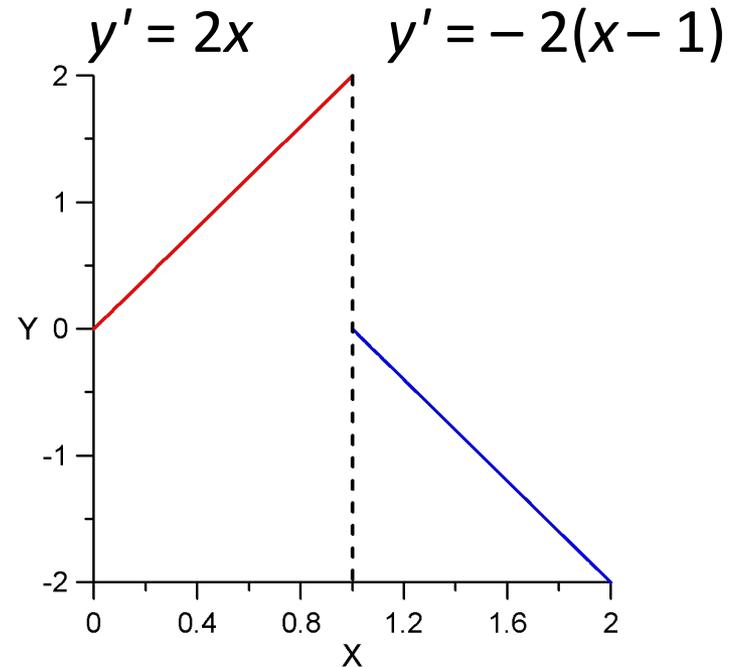
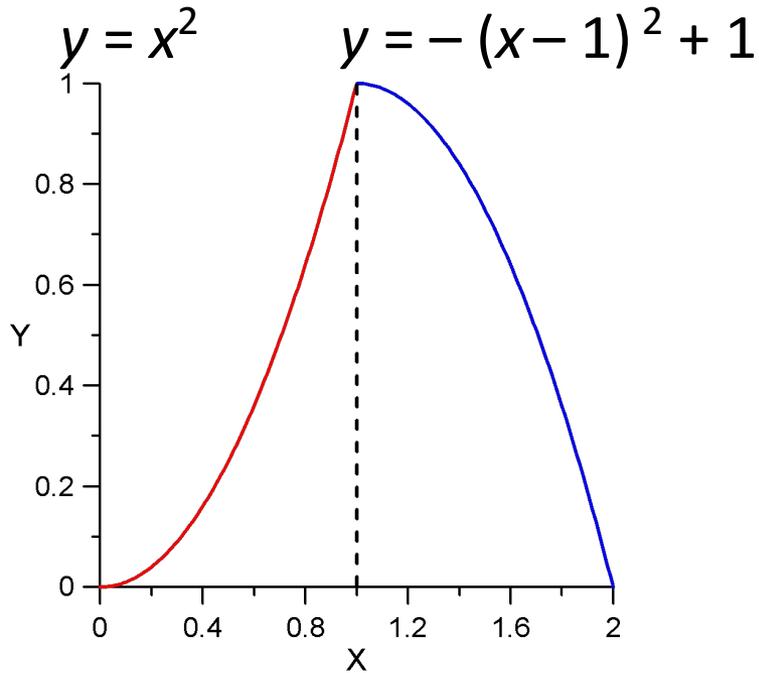
Поэтому используют **кусочную интерполяцию более низкого порядка**:

1. Весь отрезок разбивается на части;
2. На каждой части отрезка интерполяцию проводят по небольшому числу узловых точек;
3. Все интерполяционные полиномы объединяют в одну интерполяционную формулу.

Интерполирование сплайнами

Недостатки кусочной интерполяции:

Разрыв производных в точках стыковки полиномов.



Интерполирование сплайнами

Для построения интерполяционной функции с гладкими производными используют **сплайн-интерполяцию**.

Сплайн-функцией, или **сплайном**, называют кусочно-полиномиальную функцию, определенную на отрезке $[a, b]$ и имеющую на этом отрезке некоторое число непрерывных производных.

Дефектом сплайна называется разница между степенью сплайна и порядком наивысшей непрерывной на $[a, b]$ производной.

spline [англ]- гибкая линейка.

Интерполирование сплайнами

Механическая интерпретация сплайн-интерполяции: Будучи деформированной и проходя через фиксированные точки, линейка приобретает форму, при которой запасенная в ней упругая энергия минимальна.

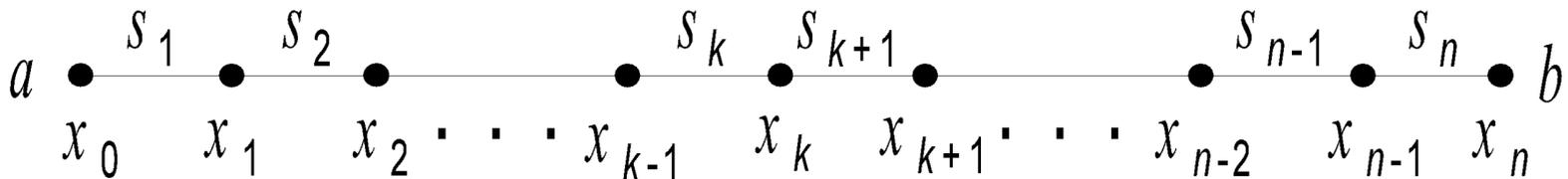
Рассмотрим **кубический сплайн**.

Пусть на $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Введем сетку $a=x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ и обозначим $y_k = f(x_k)$, $k=0, 1, 2, \dots, n$.

Интерполирование сплайнами

Интерполяционным кубическим сплайном называется функция $S(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \dots, n$, функция $S(x)$ является полиномом 3-ей степени;
- Функция $S(x)$, а также ее первая и вторая производные непрерывны на $[a, b]$;
- $S(x_k) = f(x_k)$, $k=0, 1, \dots, n$ (условие интерполяции).



Интерполирование сплайнами

Будем искать кубический сплайн в виде:

$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3;$$
$$x_{k-1} \leq x \leq x_k; k = 1 \dots n.$$

Следовательно, требуется определить $4n$ коэффициента a_k, b_k, c_k, d_k .

Для определения этих коэффициентов используем свойства кубического сплайна:

1) Условие интерполяции

$$2n \left\{ \begin{array}{l} S_k(x_{k-1}) = a_k = f(x_{k-1}); \quad (1) \\ S_k(x_k) = a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = f(x_k), \quad (2) \end{array} \right.$$

где $h_k = x_k - x_{k-1}; k = 1 \dots n.$

Интерполирование сплайнами

2) Условия непрерывности производных в узловых точках

$$S'_k(x_k) = S'_{k+1}(x_k); \quad k = 1 \dots n-1.$$

$$S''_k(x_k) = S''_{k+1}(x_k);$$

Очевидно

○
$$S'_k(x) = b_k + 2c_k(x - x_{k-1}) + 3d_k(x - x_{k-1})^2;$$

$$S''_k(x) = 2c_k + 6d_k(x - x_{k-1}),$$

Тогда

$$2n-2 \left\{ \begin{array}{l} b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 = b_{k+1}; \quad (3) \\ c_k + 3d_k h_k = c_{k+1}, \quad (4) \end{array} \right.$$

Интерполирование сплайнами

3) Недостающие **два** уравнения получают из условий на границах отрезка.

Способы задания граничных

условий:

1. Заданы первые

производные $f'(a) = F_a; f'(b) = F_b.$

2. Заданы вторые

производные $f''(a) = F_a; f''(b) = F_b.$

3. Равенство первых и вторых производных справа и слева (периодичность)

$$f'(a) = f'(b); f''(a) = f''(b)$$

Интерполирование сплайнами

4. Непрерывность третьих производных в точках x_1 и x_{n-1} , то есть сплайн выражается одним кубическим многочленом на отрезках $[x_0, x_2]$ и $[x_{n-2}, x_n]$:

$$f'''(x_1 - 0) = f'''(x_1 + 0); f'''(x_{n-1} - 0) = f'''(x_{n-1} + 0).$$

Комбинация условий 1 – 4: на одной границе задано условие одного типа, на другой – другого типа.

Рассмотрим случай, когда первые производные имеют постоянное значение (или, **вторые производные равны нулю**).

Интерполирование сплайнами

Тогда

$$S_1''(x_0) = 2c_1 + 6d_1(x_0 - x_0) = 0;$$

$$S_n''(x_n) = 2c_n + 6d_n(x_n - x_{n-1}) = 0$$

или

$$2 \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 0; \\ c_n + 3d_n h_n = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5) \\ (6) \end{array}$$

Решим систему уравнений следующим образом

Исключим a_k из уравнений (1) и (2)

$$b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

Выразим

b_k

$$b_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - c_k h_k - d_k h_k^2$$

Интерполирование сплайнами

Выразим d_k из уравнения (4) через

$$c_k: \quad d_k = \frac{1}{3h_k}(c_{k+1} - c_k), \quad k = 1 \dots n - 1 \quad (7)$$

И подставим в предыдущее

уравнение:

$$b_k = \frac{1}{h_k}[f(x_k) - f(x_{k-1})] - \frac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k); \quad k = 1 \dots n - 1. \quad (8)$$

Перепишем, увеличив индекс на

$$1: \quad b_{k+1} = \frac{1}{h_{k+1}}[f(x_{k+1}) - f(x_k)] - \frac{h_{k+1}}{3}(c_{k+2} + 2c_{k+1}); \quad k = 0 \dots n - 2. \quad (9)$$

Интерполирование сплайнами

b_k, b_{k+1}, d_k из (7) - (9) подставим в (3).

В итоге получили систему уравнений для нахождения коэффициентов $c_k, k=1 \dots n-2$.

$$h_k c_k + 2(h_k + h_{k+1})c_{k+1} + h_{k+1}c_{k+2} = 3 \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right),$$

Из (5) $c_1 = 0;$

Из (4) и (6) $c_{n+1} = c_n + 3d_n h_n = 0.$

Интерполирование сплайнами

Система имеет

ВИД:

$$k = 1: \quad 2(h_1 + h_2)c_2 + h_2c_3 = 3 \left(\frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \right);$$
$$k = 2: \quad h_2c_2 + 2(h_2 + h_3)c_3 + h_3c_4 = 3 \left(\frac{y_3 - y_2}{h_3} - \frac{y_2 - y_1}{h_2} \right);$$

.....

$$k = n - 1: \quad h_{n-1}c_{n-1} + 2(h_{n-1} + h_n)c_n = 3 \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \right).$$

Эта система имеет трехдиагональную матрицу и решается методом **прогонки**.

Интерполирование сплайнами

После решения системы будут известны

Коэффициенты d_k находим из (7); $k = 1, \dots, n$

Коэффициенты b_k находим из (8); $k = 1, \dots, n$

Коэффициенты a_k находим из (1); $k = 1, \dots, n$

Сплайн

$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3;$$

$$x_{k-1} \leq x \leq x_k; \quad k = 1 \dots n.$$

построен.

Аппроксимация по методу наименьших квадратов

Точное воспроизведение значений функции в узловых точках далеко не всегда является необходимым, а иногда даже нецелесообразно:

1) Работать с глобальными интерполяционным полиномом неудобно, кроме того при его вычислении будет накапливаться вычислительная погрешность.

Аппроксимация по методу наименьших квадратов

2) Табличные данные чаще всего являются результатами каких-то измерений и содержат ошибки – как случайные, так и систематические.

Построение аппроксимирующего многочлена с условием обязательного прохождения его графика через эти экспериментальные точки означало бы тщательное повторение допущенных при измерениях ошибок!

Аппроксимация по методу наименьших квадратов

Выход из этого положения:

Найти такой многочлен (степени более низкой, чем n), который хотя и не дает точных значений функции в узлах, но **достаточно близко** к ним подходит.

Словам «*близко подходит*» можно придавать различный смысл, и в зависимости от этого получать различные аппроксимационные многочлены.

Возможны различные **критерии аппроксимации**.

Аппроксимация по методу наименьших квадратов

$$L_n(y) = \sum_{k=0}^n x_k \omega_k(y)$$

$$\max |f(x) - F(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b].$$

$$L_n(y) = \sum_{k=0}^n x_k \omega_k(y)$$

Аппроксимация по методу наименьших квадратов

На практике часто допускают, что отдельные отклонения $\Delta_i = |f(x_i) - F(x_i)|$ могут быть велики, но требуют, чтобы отклонения $F(x)$ от $f(x)$ были малы в среднем.

За меру отклонения принимают величину:

$$S = \sum_{k=0}^n [F(x_k) - f(x_k)]^2,$$

Эта величина называется
квадратичным отклонением.

Аппроксимация по методу наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов заключается в отыскании такой аппроксимирующей функции $F(x)$, которая дает наилучшее приближение в среднем, то есть обеспечивает минимум квадратичного отклонения.

В общем случае в качестве аппроксимирующей функции может выступать любая функция

$$F(x, c_0, c_1, \dots, c_m)$$

с неизвестными параметрами c_0, c_1, \dots, c_m .

Аппроксимация по методу наименьших квадратов

Часто в качестве аппроксимирующих функций выбирают обобщенные полиномы:

$$P(x, c_0, c_1, \dots, c_m) = \sum_{i=0}^m c_i \varphi_i(x),$$

Здесь $\{\varphi_i(x)\}$ – заданная система функций (например, $\varphi_i(x) \equiv x^i$).

$$P(x, c_0, c_1, \dots, c_m) = \sum_{i=0}^m c_i x^i,$$