Нелинейная интерполяция

Рассмотрим нелинейные быстроменяющиеся функции.

Пусть дана таблица значений некоторой функции $y=f(x)$.

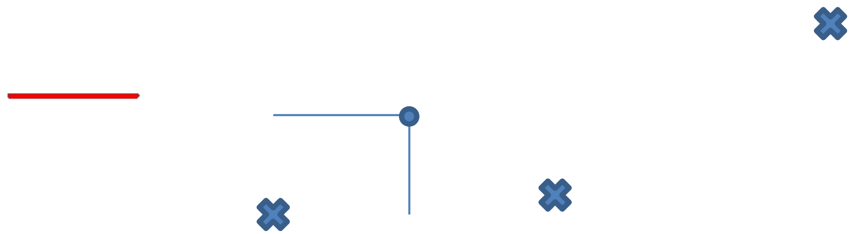
x_k	y_k	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
0	1	10	100	1020
1	11	110	1120	
2	121	1230		
3	1351			

Пусть требуется вычислить $y(0.5)$.

Очевидно, это значение лежит в диапазоне (1;11).

Используем интерполяционный полином Ньютона: $N_3(0.5) \approx 57.25$

Нелинейная интерполяция



Нелинейная интерполяция

Метод выравнивания

Стараются подобрать такое преобразование переменных $\eta=\eta(y)$; $\xi=\xi(x)$, чтобы в новых переменных график функции $\eta(\xi)$ мало отличался от прямой линии на протяжении нескольких шагов таблицы.

Составляют таблицу $\eta_i=\eta(\xi_i)$, интерполируют по ней и обратным преобразованием находят $y=y(\eta)$.

Нелинейная интерполяция

Метод выравнивания

Сделаем замену $\xi = x$; $\eta = \lg y$ и составим новую таблицу:

ξ_k	η_k
0	0
1	1.0414
2	2.0828
3	3.1306

Интерполяция с помощью интерполяционного полинома Ньютона $N_3(\xi=0.5) \approx 0.5203 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y = 10^{0.5203} \approx 3.314$

Обратное интерполирование

Обратное интерполирование – процесс нахождения *x* для произвольного *y*, если задана таблица $y_k = f(x_k)$.

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \omega_k(x)$$

прямое интерполирование

$$L_n(y) = \sum_{k=0}^{n} x_k \omega_k(y)$$

обратное интерполирование

Метод обратного интерполирования позволяет найти корень уравнения $f(x)=0$ для заданной таблично функции *f*.

Обратное интерполирование

По таблице $\{y_k; x_k\}$ строим интерполяционный полином

$$L_n(y) = \sum_{k=0}^{n} x_k \omega_k(y)$$

Находим значение полинома для $y=0$.
Это значение и будет корнем уравнения $f(x)=0$, т.е. $x^* = L_n(0)$.

Для достаточно гладких функций этот способ дает хорошие результаты.

Интерполирование сплайнами

Интерполяция на ***больших отрезках*** приводит к ***плохому приближению***:

1. Если взять мало узловых точек, то точность будет очень мала;
2. Если взять много точек, то возрастает вычислительная погрешность.

Поэтому используют ***кусочную интерполяцию более низкого порядка***:

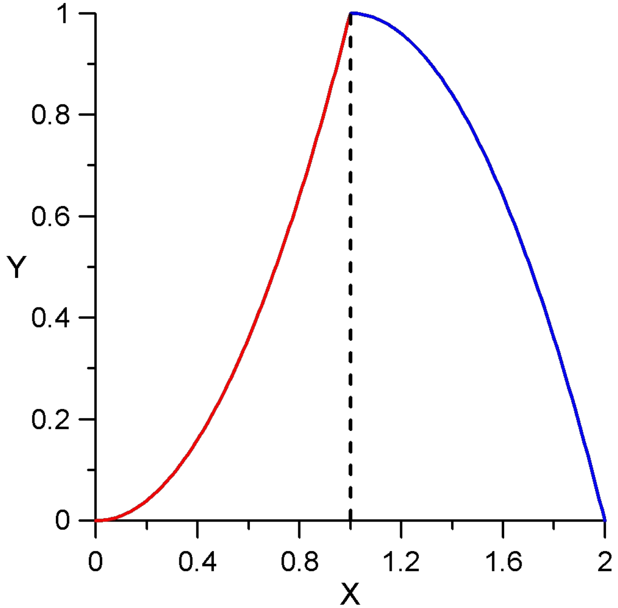
1. Весь отрезок разбивается на части;
2. На каждой части отрезка интерполяцию проводят по небольшому числу узловых точек;
3. Все интерполяционные полиномы объединяют в одну интерполяционную формулу.

Интерполирование сплайнами

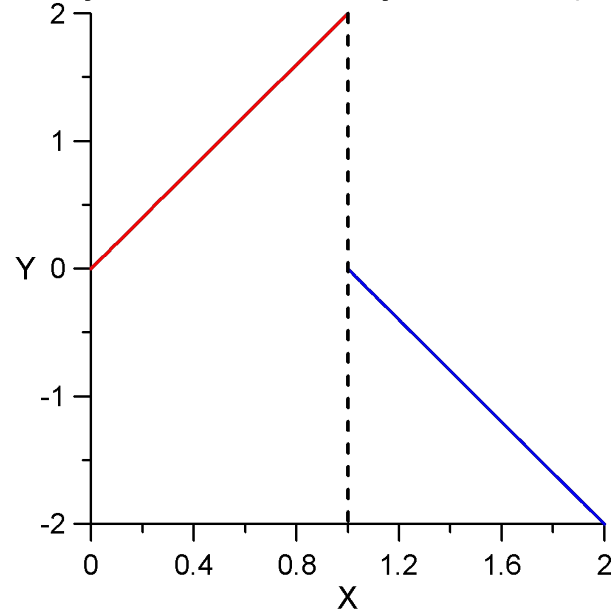
Недостатки кусочной интерполяции:

Разрыв производных в точках стыковки полиномов.

$y = x^2$ $\quad y = -(x-1)^2 + 1$



$y' = 2x$ $\quad y' = -2(x-1)$



Интерполирование сплайнами

Для построения интерполяционной функции с гладкими производными используют ***сплайн-интерполяцию.***

Сплайн-функцией, или ***сплайном,*** называют кусочно-полиномиальную функцию, определенную на отрезке [*a, b*] и имеющую на этом отрезке некоторое число непрерывных производных.

Дефектом сплайна называется разница между степенью сплайна и порядком наивысшей непрерывной на [*a, b*] производной.

spline [англ]- гибкая линейка.

Интерполирование сплайнами

Механическая интерпретация сплайн-интерполяции:

Будучи деформированной и проходя через фиксированные точки, линейка приобретает форму, при которой запасенная в ней упругая энергия минимальна.

Рассмотрим ***кубический сплайн***.

Пусть на $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Введем сетку $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ и обозначим $y_k=f(x_k)$, $k=0,1,2,\ldots,n$.

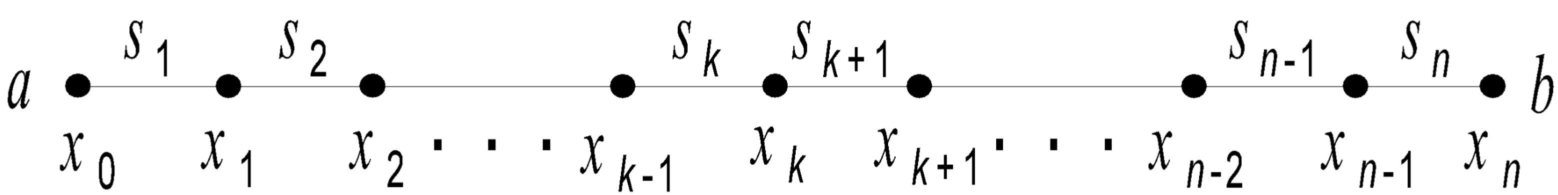
Интерполирование сплайнами

Интерполяционным кубическим сплайном называется функция $S(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k=1,2,\ldots,n$, функция $S(x)$ является полиномом 3-ей степени;

б) Функция $S(x)$, а также ее первая и вторая производные непрерывны на $[a,b]$;

в) $S(x_k)=f(x_k)$, $k=0,1,\ldots,n$ (условие интерполяции).



Интерполирование сплайнами

Будем искать кубический сплайн в виде:

$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3;$$

$$x_{k-1} \le x \le x_k;\ k = 1 \dots n.$$

Следовательно, требуется определить 4*n* коэффициента a_k, b_k, c_k, d_k.

Для определения этих коэффициентов используем свойства кубического сплайна:

1) Условие интерполяции

$$2n \left\{ \begin{aligned} & S_k(x_{k-1}) = \boxed{a_k = f(x_{k-1});} && (1) \\ & S_k(x_k) = \boxed{a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = f(x_k)}, && (2) \end{aligned} \right.$$

где $h_k = x_k - x_{k-1};\quad k = 1 \dots n.$

Интерполирование сплайнами

2) Условия непрерывности производных в узловых точках

$$S'_k(x_k) = S'_{k+1}(x_k);$$

$$S''_k(x_k) = S''_{k+1}(x_k);$$

$$k = 1 \ldots n-1.$$

Очевидно

$$S'_k(x) = b_k + 2c_k(x - x_{k-1}) + 3d_k(x - x_{k-1})^2;$$

$$S''_k(x) = 2c_k + 6d_k(x - x_{k-1}),$$

Тогда

$$2n-2 \left\{ \begin{array}{ll} \boxed{b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 = b_{k+1};} & (3) \\ \boxed{c_k + 3d_k h_k = c_{k+1},} & (4) \end{array} \right.$$

Интерполирование сплайнами

3) Недостающие ***два*** уравнения получают из условий на границах отрезка.

Способы задания граничных условий:

1. Заданы первые производные

$$f'(a) = F_a;\ f'(b) = F_b.$$

2. Заданы вторые производные

$$f''(a) = F_a;\ f''(b) = F_b.$$

3. Равенство первых и вторых производных справа и слева (периодичность)

$$f'(a) = f'(b);\ f''(a) = f''(b)$$

Интерполирование сплайнами

4. Непрерывность третьих производных в точках x_1 и x_{n-1}, то есть сплайн выражается одним кубическим многочленом на отрезках $[x_0, x_2]$ и $[x_{n-2}, x_n]$:

$$f'''(x_1 - 0) = f'''(x_1 + 0);\; f'''(x_{n-1} - 0) = f'''(x_{n-1} + 0).$$

Комбинация условий 1 – 4: на одной границе задано условие одного типа, на другой – другого типа.

Рассмотрим случай, когда первые производные имеют постоянное значение (или, ***вторые производные равны нулю***).

Интерполирование сплайнами

Тогда

$$S_1''(x_0) = 2c_1 + 6d_1(x_0 - x_0) = 0;$$

$$S_n''(x_n) = 2c_n + 6d_n(x_n - x_{n-1}) = 0$$

или

$$2\left\{\begin{array}{ll} \boxed{c_1 = 0;} & (5) \\ \boxed{c_n + 3d_n h_n = 0.} & (6) \end{array}\right.$$

Решим систему уравнений следующим образом

Исключим a_k из уравнений (1) и (2)

$$b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

Выразим b_k

$$b_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - c_k h_k - d_k h_k^2$$

Интерполирование сплайнами

Выразим d_k из уравнения (4) через c_k:

$$d_k = \frac{1}{3h_k}\left(c_{k+1} - c_k\right), \quad k = 1 \ldots n-1 \tag{7}$$

И подставим в предыдущее уравнение:

$$b_k = \frac{1}{h_k}\left[f(x_k) - f(x_{k-1})\right] - \frac{h_k}{3}\left(c_{k+1} + 2c_k\right); \quad k = 1 \ldots n-1. \tag{8}$$

Перепишем, увеличив индекс на 1:

$$b_{k+1} = \frac{1}{h_{k+1}}\left[f(x_{k+1}) - f(x_k)\right] - \frac{h_{k+1}}{3}\left(c_{k+2} + 2c_{k+1}\right); \quad k = 0 \ldots n-2. \tag{9}$$

Интерполирование сплайнами

b_k, b_{k+1}, d_k из (7) - (9) подставим в (3).

В итоге получили систему уравнений для нахождения коэффициентов c_k, k=1... n – 2.

$$h_k c_k + 2(h_k + h_{k+1})c_{k+1} + h_{k+1}c_{k+2} = 3\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}\right),$$

Из (5) $\quad c_1 = 0;$

Из (4) и (6) $\quad c_{n+1} = c_n + 3d_n h_n = 0.$

Интерполирование сплайнами

Система имеет вид:

$$k=1: \qquad 2(h_1+h_2)c_2+h_2c_3=3\left(\frac{y_2-y_1}{h_2}-\frac{y_1-y_0}{h_1}\right);$$

$$k=2: \qquad h_2c_2+2(h_2+h_3)c_3+h_3c_4=3\left(\frac{y_3-y_2}{h_3}-\frac{y_2-y_1}{h_2}\right);$$

....

$$k=n-1: \qquad h_{n-1}c_{n-1}+2(h_{n-1}+h_n)c_n=3\left(\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}-\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-1}}\right).$$

Эта система имеет трехдиагональную матрицу и решается методом ***прогонки.***

Интерполирование сплайнами

После решения системы будут известны c_k

Коэффициенты d_k находим из (7); k = 1,…,n

Коэффициенты b_k находим из (8); k = 1,…,n

Коэффициенты a_k находим из (1); k = 1,…,n

Сплайн

$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3;$$

$$x_{k-1} \le x \le x_k;\; k = 1 \ldots n.$$

построен.

Аппроксимация по методу наименьших квадратов

Точное воспроизведение значений функции в узловых точках далеко не всегда является необходимым, а иногда даже нецелесообразно:

1) Работать с глобальными интерполяционным полиномом неудобно, кроме того при его вычислении будет накапливаться вычислительная погрешность.

Аппроксимация по методу наименьших квадратов

2) Табличные данные чаще всего являются результатами каких-то измерений и содержат ошибки – как случайные, так и систематические.

Построение аппроксимирующего многочлена с условием обязательного прохождения его графика через эти экспериментальные точки означало бы тщательное повторение допущенных при измерениях ошибок!

Аппроксимация по методу наименьших квадратов

Выход из этого положения:

Найти такой многочлен (степени более низкой, чем *n*), который хотя и не дает точных значений функции в узлах, но ***достаточно близко*** к ним подходит.

Словам «*близко подходит*» можно придавать различный смысл , и в зависимости от этого получать различные аппроксимационные многочлены.

Возможны различные ***критерии аппроксимации***.

Аппроксимация по методу наименьших квадратов

$$L_n(y) = \sum_{k=0}^{n} x_k \omega_k(y)$$

$$\max\left|f(x) - F(x)\right| < \varepsilon, \quad x \in [a,b].$$

$$L_n(y) = \sum_{k=0}^{n} x_k \omega_k(y)$$

Аппроксимация по методу наименьших квадратов

На практике часто допускают, что отдельные отклонения $\Delta_i = \left| f(x_i) - F(x_i) \right|$ могут быть велики, но требуют, чтобы отклонения *F*(*x*) от *f*(*x*) были малы в среднем.

За меру отклонения принимают величину:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \left[F(x_k) - f(x_k) \right]^2,$$

Эта величина называется ***квадратичным отклонением.***

Аппроксимация по методу наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов заключается в отыскании такой аппроксимирующей функции $F(x)$, которая дает наилучшее приближение в среднем, то есть обеспечивает минимум квадратичного отклонения.

В общем случае в качестве аппроксимирующей функции может выступать любая функция

$$F(x, c_0, c_1, \dots, c_m)$$

с неизвестными параметрами $c_0, c_1, \dots, c_m$.

Аппроксимация по методу наименьших квадратов

Часто в качестве аппроксимирующих функций выбирают обобщенные полиномы:

$$P(x, c_0, c_1, \ldots, c_{\mathrm{m}}) = \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i(x),$$

Здесь $\{\varphi_i(x)\}$ – заданная система функций (например, $\varphi_i(x) \equiv x^i$).

$$P(x, c_0, c_1, \ldots, c_{\mathrm{m}}) = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i,$$