Числові функції та їх властивості

Поняття функціональної залежності є основне поняття всієї вищої математики.

о.я. Хінчин

Числові функції

Якщо кожному значенню змінної X з деякої множини D відповідає єдине значення змінної У, то таку відповідність називають ***функцією.***

При цьому ***X називають незалежною змінною***, або ***аргументом***, ***У – залежною змінною,*** або ***функцією.***

Способи задання функції

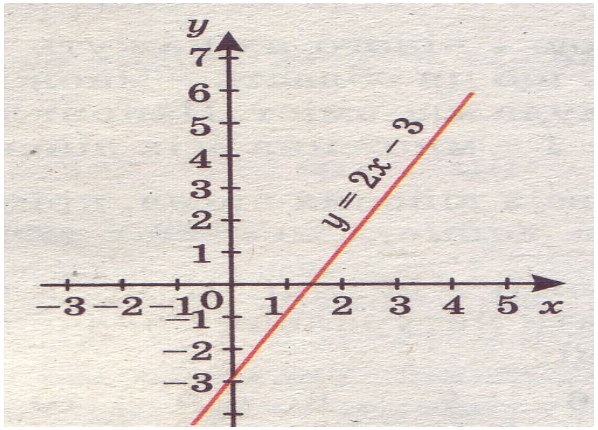
- Аналітичний або за допомогою формули

$$y = x - 2; \quad y = (x + 10)/x.$$

- За таблицею

X	1	2	4
У	-1	1	3

- Графіком



Словесний спосіб

Дослідження функції

- ***Дослідити функцію*** – це означає виявити її найважливіші **властивості:**

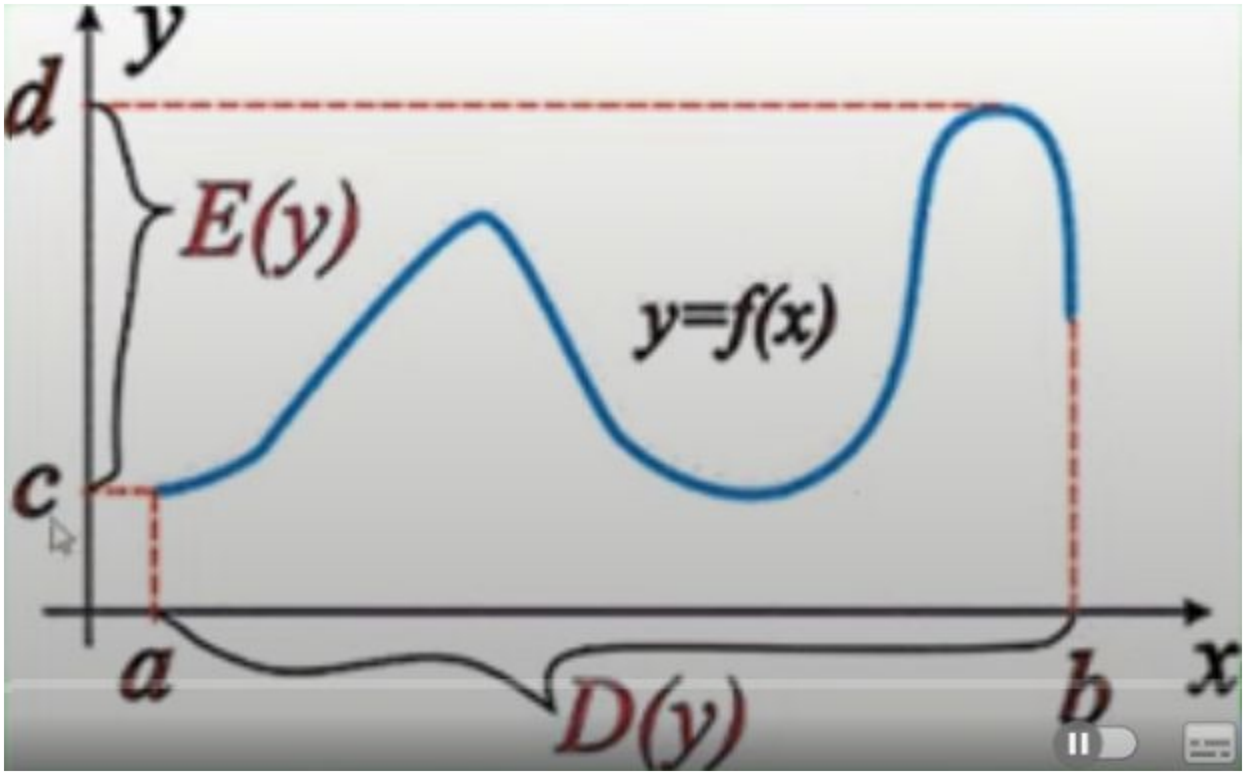
1) вказати область визначення;
2) вказати область значень;
3) з'ясувати, чи є дана функція парною або непарною;
4) знайти точку перетину графіка функції з віссю У;
5) знайти нулі функції та проміжки знакосталості;
6) визначити проміжки зростання чи спадання функції.

Узагальнивши все, слід побудувати графік функції.

Властивості функції

- Усі значення, які може набувати аргумент функції, називають ***областю визначення*** даної функції і позначають літерою ***D***.

- Множину всіх значень **у**, яких може набувати функція, називають її ***областю значень*** і позначають літерою ***Е***.


y
d
E(y)
y=f(x)
c
a
D(y)
b
x

Види функцій, їх області визначення та множини значень

Види функцій	Область визначення	Множина значень
Лінійна: $y = kx + b$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Пряма пропорційність: $y = kx$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Обернена пропорційність: $y = \frac{k}{x}$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Квадратична функція: $f(x) = ax^2 + bx + c$	$(-\infty; +\infty)$	при $a > 0$ $\left[\frac{-b^2 + 4ac}{4a}; +\infty\right)$; при $a < 0$ $\left(-\infty; \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right]$
Функція $y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Функція $y = \lvert x \rvert$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$

Парність

Функція y = f (x) називається ***парною***, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення ***x*** з області визначення ***f(-x) = f(x)***.

Графік парної функції симетричний відносно осі ***У***.

Функція y = f (x) називається ***непарною***, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення ***x*** із області визначення ***f(-x) = - f(x)***.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

$$f(x) = x^6 + x^4 + 2$$

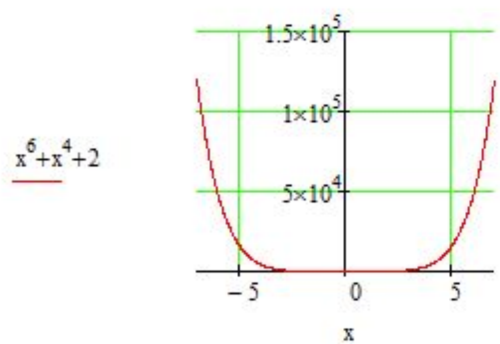
$$f(x) = x^5 + x^3$$

$$f(x) = x^6 + x^4 + x + 1$$

$f(x) = x^6 + x^4 + 2$

. $f(-x) = (-x)^6 + (-x)^4 + 2 = x^6 + x^4 + 2 = f(x)$

Бачимо, f(-x)=f(x), тому дана функція буде парною. І її графік симетричний відносно осі OY.



$$f(x) = x^5 + x^3$$

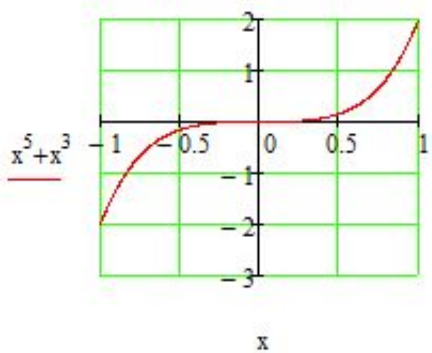
$$f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 = -x^5 - x^3$$

$$f(-x) \neq f(x)$$

$$-f(x) = -x^5 - x^3$$

$$f(-x) = -f(x),$$

отже, функція непарна і, можемо побачити на малюнку її графік симетричний відносно початку координат.



$$f(x) = x^6 + x^4 + x + 1$$

$$f(-x) = (-x)^6 + (-x)^4 - x + 1 = x^6 + x^4 - x + 1$$

$$f(-x) \neq f(x)$$

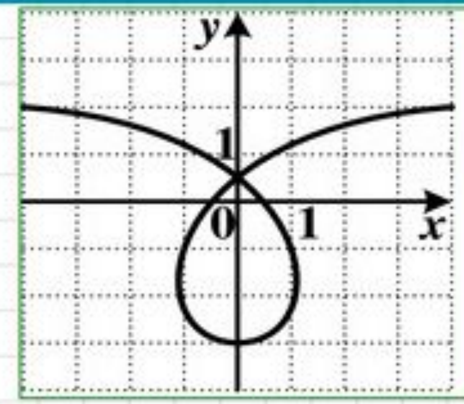
$$-f(x) = -x^6 - x^4 - x - 1$$

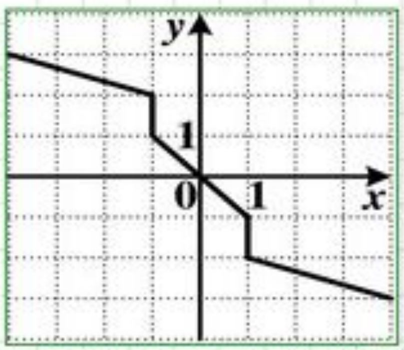
$$f(-x) \neq -f(x)$$

Наша функція буде ні парна ні непарна.

Парність і непарність функції

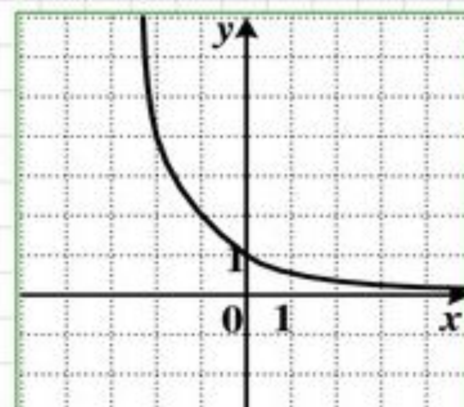
1) Графік парної функції симетричний відносно осі Oy





2) Графік не парної функції симетричний відносно початку координат

3) Якщо не виконується умова 1) або 2) то це графік функції що є ні парною, ні непарною



Нулі функції та проміжки знакосталості

Значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю, називають ***нулями функції***. Щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$.

Проміжки області визначення функції, на яких функція не змінює знака (тобто має тільки додатні або тільки від'ємні значення), називають ***проміжками знакосталості.*** Щоб знайти проміжки знакосталості, потрібно розв'язати нерівності $f(x)>0$ і $f(x)<0$. Розв'язки нерівності $f(x)>0$ – це значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

Монотонність

- Функцію називають ***зростаючою*** на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає більше значення функції.
- Функцію називають ***спадною*** на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу із цього проміжку відповідає менше значення функції.
- Якщо функція на всій області визначення зростає або на всій області визначення спадає, її називають ***монотонною***.

Неперервність

- Якщо графіком функції є неперервна лінія (її можна провести, не відриваючи олівець від паперу), то таку функцію називають ***неперервною функцією.***

Знайдемо f(-3), f(-0,5), f(0), f(2), якщо функцію задано формулою $f(x) = 4x + 1$

1) $f(-3) = 4 \cdot (-3) + 1 = -12 + 1 = -11$
2) $f(-0,5) = 4 \cdot (-0,5) + 1 = -2 + 1 = -1$
3) $f(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 1$
4) $f(2) = 4 \cdot 2 + 1 = 8 + 1 = 9$

№1.2

Знайдемо область визначення функції:

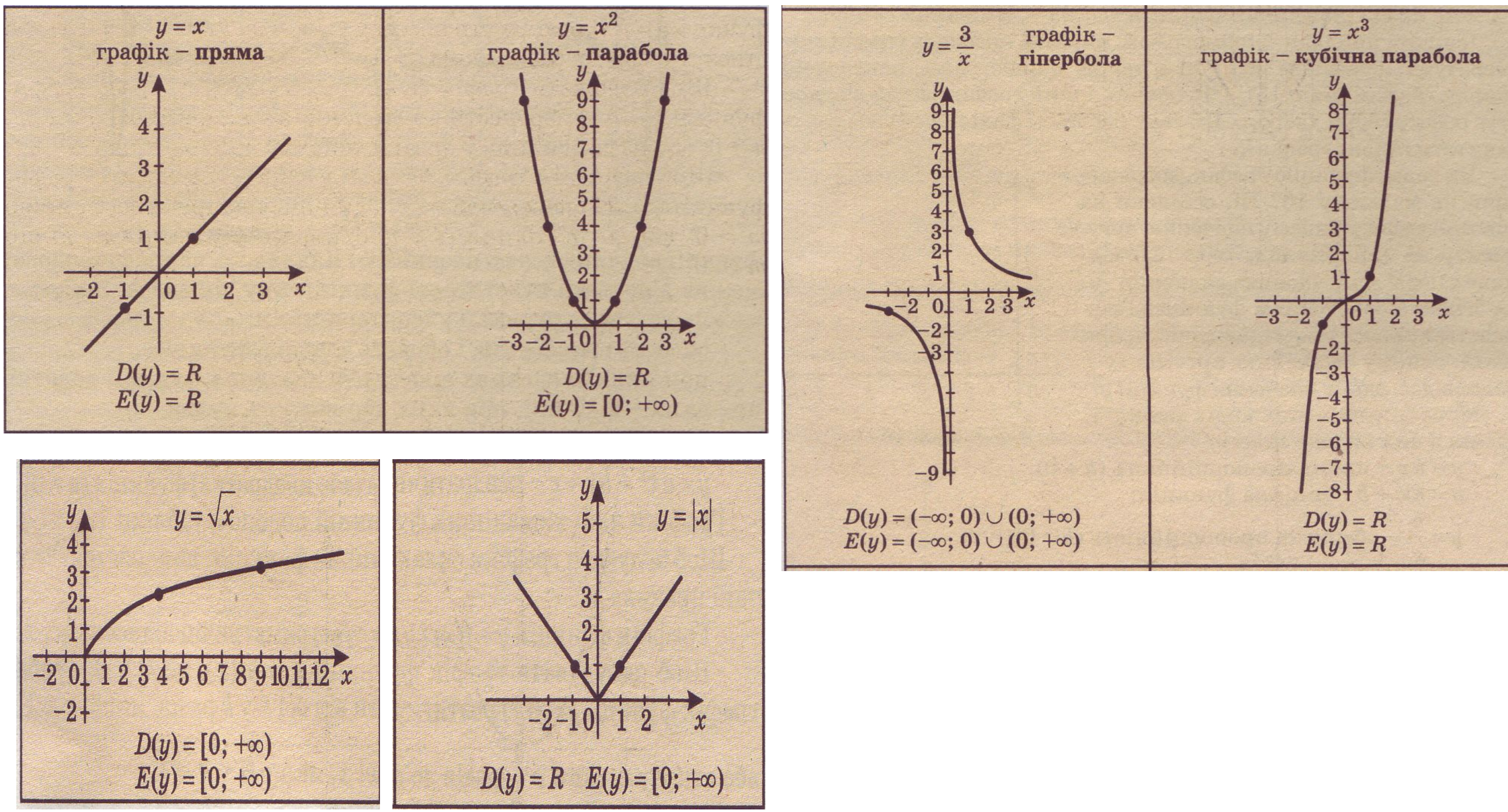
1) $y = 3x + 5$ $\qquad D(y) = (-\infty; +\infty)$

2) $y = \sqrt{x+2}$ $\qquad x + 2 \geq 0$ $\qquad x \geq -2$ $\qquad D(y) = [-2; +\infty$

3) $y = \dfrac{2}{x+3}$ $\qquad x \neq -3$ $\qquad D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$

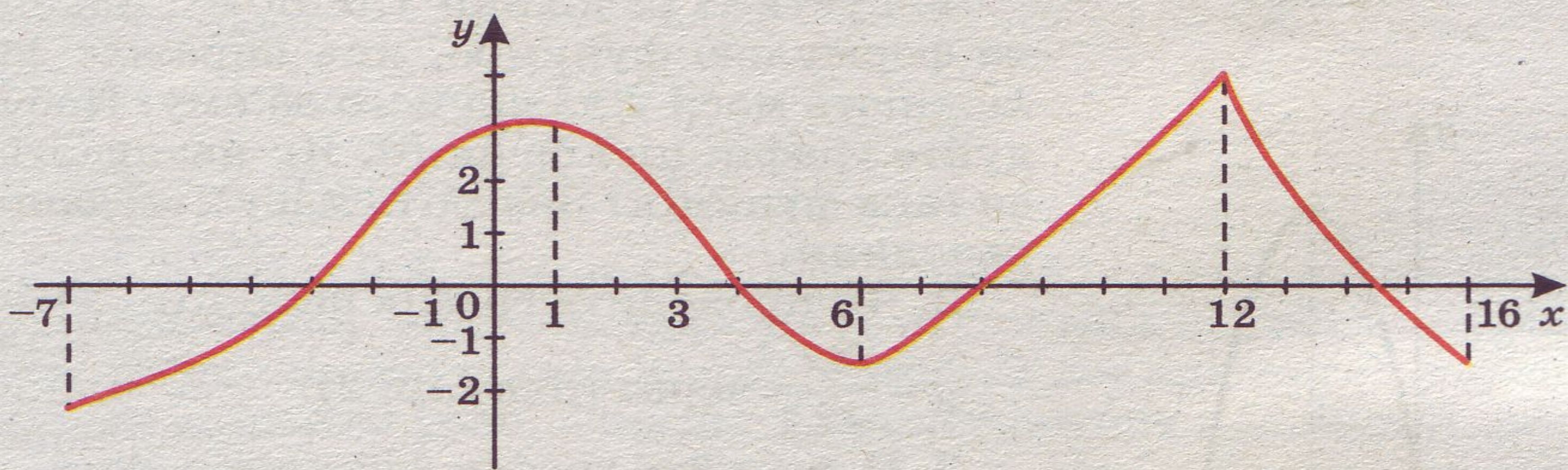
4) $y = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{2}{x^3}$ $\qquad x \neq 0$ $\qquad D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Графіки функцій



Завдання №1

225. На малюнку 34 зображено графік функції $y = f(x)$. Знайдіть: а) область визначення і область значень функції; б) нулі функції; в) проміжки знакосталості; г) проміжки, на яких функція зростає; ґ) проміжки, на яких функція спадає; д) найбільше і найменше значення функції.



Мал. 34

$$f(x) = 4x^6 - 3x^4 + 5$$

$$f(x) = 3x^5 - 8x^3$$