Функция распределения вероятностей случайной величины

Определение

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого действительного значения x вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, то есть

$$F(x) = p(X < x).$$

Свойства

1. Значения функции распределения $F(x)$ принадлежат отрезку $[0;1]$, то есть $0 \le F(x) \le 1$ для любого x.
2. Функция распределения $F(x)$ является неубывающей, то есть если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.
3. Для функции распределения $F(x)$ справедливы следующие предельные соотношения: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
4. Функция распределения $F(x)$ непрерывна слева в каждой точке, то есть $\lim\limits_{x \to x_0 -} F(x) = F(x_0)$.

Свойства

Справедливы также следующие утверждения:

1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[\alpha;\beta)$, равна разности значений ее функции распределения $F(x)$ на концах этого полуинтервала: $p(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.
2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение x_i, равна нулю, то есть $p(X = x_i) = 0$.

Из двух последних утверждений следует, что если X – непрерывная случайная величина, то

$$p(\alpha \le X \le \beta) = p(\alpha \le X < \beta) = p(\alpha < X \le \beta) = p(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Продолжение примера

Пример . Дискретная случайная величина X имеет за

распределения:

X	3	5	11
p	0,3	0,1	0,6

Найти функцию распределения случайной величины и постро

ее график.

Продолжение примера

1) Если $x \le 3$, то $F(x) = p(X < x) = 0$, так как случайная величина X не принимает значений, меньших 3.

2) Если $3 < x \le 5$, то $F(x) = p(X < x) = 0{,}3$.

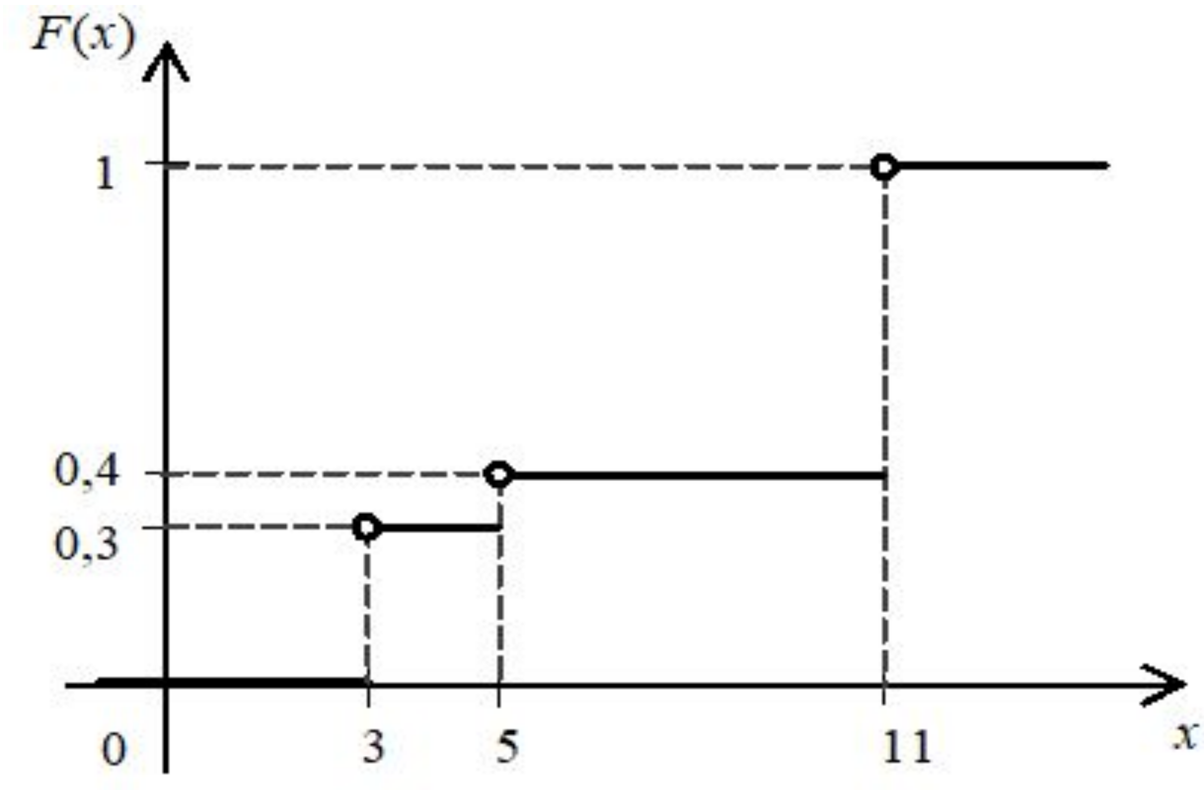
3) Если $5 < x \le 11$, то $F(x) = p(X < x) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$.

4) Если $x > 11$, то $F(x) = p(X < x) = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}6 = 1$.

Таким образом, функция распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 3, \\ 0{,}3 \text{ при } 3 < x \le 5, \\ 0{,}4 \text{ при } 5 < x \le 11, \\ 1 \text{ при } x > 11. \end{cases}$$

Продолжение примера (график)



Свойство графика функции распределения

Рассмотренный пример иллюстрирует важное свойство функции распределения дискретной случайной величины: точками разрыва функции распределения $F(x)$ являются возможные значения случайной величины X, причем величина «скачка» в каждой точке разрыва равна вероятности, с которой случайная величина принимает соответствующее значение.

Пример

Пример . Дискретная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 4, \\ 0{,}2 \text{ при } 4 < x \le 6, \\ 0{,}5 \text{ при } 6 < x \le 9, \\ 0{,}8 \text{ при } 9 < x \le 10 \\ 1 \text{ при } x > 10. \end{cases}$$

1) Найти закон распределения X.

2) Найти следующие вероятности: а) $p(6 \le X \le 10)$; б) $p(4 \le X < 9)$; в) $p(4 < X < 10)$; г) $p(5 \le X < 8)$; д) $p(3 < X \le 6)$; е) $p(X \le 10)$; ж) $p(X < 4)$; з) $p(X \ge 11)$.

Продолжение примера

1) В данном случае точками разрыва функции распределения являются точки $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, $x_3 = 9$ и $x_4 = 10$. Значит, случайная величина X имеет четыре возможных значения.

Величина «скачка» в каждой из перечисленных точек равна вероятности, с которой случайная величина принимает соответствующее значение, поэтому:

$$p(X = 4) = 0{,}2 - 0 = 0{,}2;\ p(X = 6) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3;$$

$$p(X = 9) = 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}3;\ p(X = 10) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Таким образом, закон распределения величины X имеет вид:

X	4	6	9	10
p	0,2	0,3	0,3	0,2

Продолжение примера

2) Найдем вероятности:

а) Так как случайная величина X может принимать только четыре указанных в таблице значения, то событие, состоящее в том, что $6 \le X \le 10$, является суммой следующих несовместных событий: $X = 6, X = 9, X = 10$. Тогда по теореме сложения вероятностей

$$p(6 \le X \le 10) = p(X = 6) + p(X = 9) + p(X = 10) = 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}8.$$

б) $p(4 \le X < 9) = p(X = 4) + p(X = 6) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$.

в) $p(4 < X < 10) = p(X = 6) + p(X = 9) = 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6$.

г) $p(5 \le X < 8) = p(X = 6) = 0{,}3$.

д) $p(3 < X \le 6) = p(X = 4) + p(X = 6) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$.

е) $p(X \le 10) = p(X = 4) + p(X = 6) + p(X = 9) + p(X = 10) = 1$.

Продолжение примера

ж) Поскольку случайная величина X не принимает значений, меньших 4, то $p(X<4)=0$.

з) $p(X \geq 11)=0$.

В некоторых случаях для вычисления вероятности удобно использовать тот факт, что $p(\alpha \leq X < \beta)=F(\beta)-F(\alpha)$.

Например,

$p(4 \leq X < 9)=F(9)-F(4)=0{,}5-0=0{,}5$;

$p(5 \leq X < 8)=F(8)-F(5)=0{,}5-0{,}2=0{,}3$.