

**Контрольная
работа
Вариант №0**

Задача 1. Найти предел последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + (n+2)!}{(n+3)! - (n+2)!}$.

Задача 2. Найти предел функции: $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$.

Задача 3. Найти предел функции: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \cdot \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$.

Задача 4. Найти точки разрыва функции и указать их тип: $y = \frac{2x-3}{\log_2 |x|}$.

Задача 5. Найти производную функции: $y = \frac{x - \sin x}{x \cdot 5^x}$.

Задача 6. Найти производную функции: $y = \cos \ln(3x^2 - 2)$.

Задача 7. Найти производную функции: $y = (x^3 - x^2 + 3x + 7)^{x^2 - 9x + 1}$.

Задача 8. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции, заданной неявно:

$$xy - \ln y = 3.$$

Задача 9. Найти общее выражение для производной порядка n от функции : $y = \ln(3x - 2).$

Задача 10. Продифференцировать функцию:

$$y = \left[\operatorname{tg} \left(\cos^3 \frac{x^2}{3} \right) \cdot \sqrt[4]{\operatorname{arccctg} \frac{3x}{7}} \right]^{\operatorname{arccos} x^7}.$$

Задача 1. Найти предел последовательности: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + (n+2)!}{(n+3)! - (n+2)!}$.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

Что бы избавиться от неопределенности, необходимо числитель и знаменатель разделить на слагаемое $(n+3)!$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + (n+2)!}{(n+3)! - (n+2)!} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+3)! + (n+2)!}{(n+3)!}}{\frac{(n+3)! - (n+2)!}{(n+3)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+3)!}{(n+3)!} + \frac{(n+2)!}{(n+3)!}}{\frac{(n+3)!}{(n+3)!} - \frac{(n+2)!}{(n+3)!}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{(n+3)}}{1 - \frac{1}{(n+3)}} = 1.$$

$\nearrow 0$
 $\searrow 0$

$$\frac{(n+2)!}{(n+3)!} = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{1}{(n+3)}$$

Задача 2. Найти предел функции: $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}.$

Что бы избавиться от неопределенности, необходимо числитель и знаменатель умножить и разделить на соответствующие сопряженные

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(\sqrt{1-x} - 3) \cdot (\sqrt{1-x} + 3) \cdot (4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(2 + \sqrt[3]{x}) \cdot (\sqrt{1-x} + 3) \cdot (4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{(1-x-9) \cdot (4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(8+x) \cdot (\sqrt{1-x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{-(8+x) \cdot (4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(8+x) \cdot (\sqrt{1-x} + 3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -8} -\frac{(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt{1-x} + 3)} = -\frac{12}{6} = -2.$$

Задача 3. Найти предел функции: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \cdot \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$.

Что бы избавиться от неопределенности, необходимо умножить и разделить на соответствующее сопряженное и воспользоваться эквивалентными функциями:

$$\sin x \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \cdot \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + x \cdot \sin x} - 1)}{e^{x^2} - 1} \cdot \frac{(\sqrt{1 + x \cdot \sin x} + 1)}{(\sqrt{1 + x \cdot \sin x} + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x \cdot \sin x - 1)}{(e^{x^2} - 1)(\sqrt{1 + x \cdot \sin x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{(e^{x^2} - 1)(\sqrt{1 + x \cdot \sin x} + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2(\sqrt{1 + x \cdot \sin x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{1 + x \cdot \sin x} + 1)} = \frac{1}{2}$$

0

Задача 4. Найти точки разрыва функции и указать их тип: $y = \frac{2x - 3}{\log_2 |x|}$.

Точками разрыва будут значения $x_1 = 0$ (не существует функция $y = \log_2 |x|$) и $x_{2,3} = \pm 1$ (знаменатель становится равным 0).

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3}{\log_2 |x|} = \frac{-3}{-\infty} = 0.$$

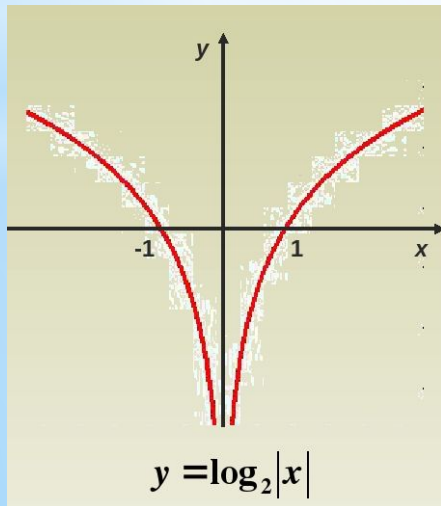
$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{2x - 3}{\log_2 |x|} = \frac{-5}{+0} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x - 3}{\log_2 |x|} = \frac{-1}{-0} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{2x - 3}{\log_2 |x|} = \frac{-5}{-0} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x - 3}{\log_2 |x|} = \frac{-1}{+0} = -\infty.$$

x_1 – устранимый разрыв.



$x_{2,3}$ – разрыв II рода.

Задача 5. Найти производную функции: $y = \frac{x - \sin x}{x \cdot 5^x}$.

Для поиска производной надо воспользоваться правилами дифференцирования:

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{x - \sin x}{x \cdot 5^x}\right)' = \frac{(x - \sin x)'x \cdot 5^x - (x - \sin x)(x \cdot 5^x)'}{(x \cdot 5^x)^2} =$$

$$= \frac{(1 - \cos x)x \cdot 5^x - (x - \sin x)(5^x + x5^x \ln 5)}{(x \cdot 5^x)^2}$$

Задача 6. Найти производную функции: $y = \cos \ln(3x^2 - 2)$.

Для поиска производной надо воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции:

$$F'(x) = (f(g(x)))' = f'_g \cdot g'_x$$

$$y' = (\cos \ln(3x^2 - 2))' = -\sin \ln(3x^2 - 2) \cdot \frac{1}{3x^2 - 2} \cdot 6x.$$

Задача 7. Найти производную функции: $y = (x^3 - x^2 + 3x + 7)^{x^2 - 9x + 1}$.

Для поиска производной вида $f(x)^{g(x)}$ надо воспользоваться логарифмическим дифференцированием:

$$y = (x^3 - x^2 + 3x + 7)^{x^2 - 9x + 1}$$

$$\ln y = \ln (x^3 - x^2 + 3x + 7)^{x^2 - 9x + 1}$$

$$\ln y = (x^2 - 9x + 1) \ln (x^3 - x^2 + 3x + 7)$$

$$\frac{y'}{y} = (2x - 9) \ln (x^3 - x^2 + 3x + 7) + (x^2 - 9x + 1) \cdot \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 + 3x + 7}$$

$$y' = y \left[(2x - 9) \ln (x^3 - x^2 + 3x + 7) + (x^2 - 9x + 1) \cdot \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 + 3x + 7} \right]$$

$$y' = (x^3 - x^2 + 3x + 7)^{x^2 - 9x + 1} \times \\ \times \left[(2x - 9) \ln (x^3 - x^2 + 3x + 7) + (x^2 - 9x + 1) \cdot \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 + 3x + 7} \right]$$

Задача 8. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции, заданной неявно: $xy - \ln y = 3$.

Для поиска производной от функции, заданной неявно, используются правила дифференцирования считая $y(x)$ сложной функцией:

$$xy - \ln y = 3$$

$$y + xy' - \frac{y'}{y} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{y}\right)y' = -y$$

$$\left(\frac{xy - 1}{y}\right)y' = -y$$

$$y' = -\frac{y^2}{xy - 1} = \frac{y^2}{1 - xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy}$$

Задача 9. Найти общее выражение для производной порядка n от функции : $y = \ln(3x - 2)$.

$$y' = \frac{3}{3x - 2}$$

$$y'' = -\frac{3^2 \cdot 1}{(3x - 2)^2}$$

$$y''' = \frac{3^3 \cdot 1 \cdot 2}{(3x - 2)^3}$$

$$y^{IV} = -\frac{3^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{(3x - 2)^4}$$

$$y^V = \frac{3^5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(3x - 2)^5}$$

.....

$$y^n = (-1)^{n+1} \frac{3^n \cdot (n-1)!}{(3x - 2)^n}$$

Задача 10. Продифференцировать функцию:

$$y = \left[tg \left(\cos^3 \frac{x^2}{3} \right) \cdot \sqrt[4]{\operatorname{arcctg} \frac{3x}{7}} \right]^{\arccos x^7}.$$

Обозначим:

$$u(x) = tg \left(\cos^3 \frac{x^2}{3} \right); \quad v(x) = \sqrt[4]{\operatorname{arcctg} \frac{3x}{7}}; \quad w(x) = \arccos x^7.$$

Найдем производные сложных функций:

$$u' = \frac{1}{\cos^2 \left(\cos^3 \frac{x^2}{3} \right)} \cdot \left(3 \cos^2 \frac{x^2}{3} \right) \cdot \left(-\sin \frac{x^2}{3} \right) \cdot \frac{2x}{3};$$

$$v' = \frac{1}{4} \left(\operatorname{arcctg} \frac{3x}{7} \right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{-1}{1 + \left(\frac{3x}{7} \right)^2} \cdot \frac{3}{7};$$

$$w' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^{14}}} \cdot 7x^6.$$

Функция $y(x)$ примет вид: $y = [u \cdot v]^w$

Для поиска производной $y(x)$ надо воспользоваться логарифмическим дифференцированием:

$$y = [u \cdot v]^w$$

$$\ln y = \ln [u \cdot v]^w$$

$$\ln y = w \cdot \ln[u \cdot v] = w \cdot (\ln u + \ln v)$$

$$\frac{y'}{y} = w' \cdot \ln[u \cdot v] + w \cdot \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} \right)$$

$$y' = y \cdot \left[w' \cdot \ln(u \cdot v) + w \cdot \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} \right) \right]$$

Подставим исходные выражения, получим окончательный ответ:

$$\begin{aligned}
 y' = & \left[\operatorname{tg} \left(\cos^3 \frac{x^2}{3} \right) \cdot \sqrt[4]{\operatorname{arcctg} \frac{3x}{7}} \right]^{\operatorname{arccos} x^7} \times \\
 & \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^{14}}} \cdot 7x^6 \cdot \ln \left(\operatorname{tg} \left(\cos^3 \frac{x^2}{3} \right) \cdot \sqrt[4]{\operatorname{arcctg} \frac{3x}{7}} \right) \right. \\
 & + \operatorname{arccos} x^7 \left(\frac{\frac{1}{\cos^2 \left(\cos^3 \frac{x^2}{3} \right)} \cdot \left(3 \cos^2 \frac{x^2}{3} \right) \cdot \left(-\sin \frac{x^2}{3} \right) \cdot \frac{2x}{3}}{\operatorname{tg} \left(\cos^3 \frac{x^2}{3} \right)} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\frac{1}{4} \left(\operatorname{arcctg} \frac{3x}{7} \right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{-1}{1 + \left(\frac{3x}{7} \right)^2} \cdot \frac{3}{7}}{\sqrt[4]{\operatorname{arcctg} \frac{3x}{7}}} \right) \right]
 \end{aligned}$$