

§4 Дифференциал функции

Определение 1. Дифференциалом функции называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных:

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y.$$

$$df(x_1; \dots; x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Определение 2. Функция $z=f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке (x,y) , если её полное приращение может быть представлено в виде

$$\Delta z = dz + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

где dz – дифференциал функции,

$\alpha=\alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta=\beta(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

Если $u(x,y)$, $v(x,y)$ – дифференцируемые функции, то

$$1) \quad d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$2) \quad d(uv) = u dv + v du;$$

$$3) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \quad (v(x,y) \neq 0).$$

Теорема 1. Если частные производные функции $z=f(x,y)$ существуют в окрестности точки (x,y) и непрерывны в самой этой точке, то функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в этой точке.

$$f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$$

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

§ 5. Производная по направлению. Градиент.

Определение 1. Если существует конечный предел

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M, M_0)}$$

при условии, что точка M стремится к точке M_0 по лучу l ,
то он называется производной функции f по направлению l

в точке M_0 и обозначается $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ или $f'_l(M_0)$.

Теорема 1. Функция $f(x,y)$, дифференцируемая в точке $M_0(x_0,y_0)$, имеет в этой точке производную по любому направлению l , причем

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cos \beta,$$

где α и β – углы, образованные лучом l с осями O_x и O_y .

Определение 2. Градиентом $\nabla z(M_0)$ функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется вектор с координатами $(z_x'(M_0), z_y'(M_0))$:

$$\nabla z(M_0) = (z_x'(M_0), z_y'(M_0)).$$

Теорема 2. Градиент функции в данной точке имеет направление быстрейшего увеличения значений функции в этой точке и по величине равен производной функции в данной точке по этому направлению.