§4 Дифференциал функции

Определение 1. Дифференциалом функции называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных:

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y.$$

$$\boxed{df(x_1;\ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i}$$

Определение 2. Функция $z=f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке (x,y), если её полное приращение может быть представлено в виде

$$\Delta z=dz+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,$$

где dz – дифференциал функции,

$\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y)$, $\beta=\beta(\Delta x,\Delta y)$ – бесконечно малые при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Если u(x,y), v(x,y) – дифференцируемые функции, то

1) $d(u\pm v)=du\pm dv$;
2) $d(uv)=udv+vdu$;
3) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$ $(v(x,y)\neq 0)$.

Теорема 1. Если частные производные функции $z=f(x,y)$ существуют в окрестности точки (x,y) и непрерывны в самой этой точке, то функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в этой точке.

$$\boxed{f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)}$$

$$\boxed{d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2}$$

§ 5. Производная по направлению. Градиент.

Определение 1. Если существует конечный предел

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M, M_0)}$$

при условии, что точка M стремится к точке M_0 по лучу l, то он называется производной функции f по направлению l в точке M_0 и обозначается $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ или $f_l'(M_0)$.

Теорема 1. Функция $f(x,y)$, дифференцируемая в точке $M_0(x_0,y_0)$, имеет в этой точке производную по любому направлению l, причем

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\cos\beta,$$

где α и β – углы, образованные лучом l с осями O_x и O_y.

Определение 2. Градиентом $\nabla z\,(M_0)$ функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется вектор с координатами $(z_x'(M_0),\, z_y'(M_0))$:

$$\nabla z\,(M_0)=(z_x'(M_0),\, z_y'(M_0)).$$

Теорема 2. Градиент функции в данной точке имеет направление быстрейшего увеличения значений функции в этой точке и по величине равен производной функции в данной точке по этому направлению.