

Плоская одномерная задача

Волновое уравнение для плоской волны

Рассмотрим простейшую одномерную задачу, когда все изменения происходят вдоль одной оси, например **X**

Покажем поперечность электромагнитной волны. Рассмотрим плоскую волну от пластины (рис. 3.1) в пустом пространстве. В пустом пространстве: $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$.

1) Для электрической компоненты поля.

Из 1-го уравнения Максвелла: $\nabla \vec{E} = 0$, или $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$,

здесь $\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$, т. к. источник поля протяженная пластина

(рис. 3.2), то для любой точки на одном и том же расстоянии до пластины

поля E_y и E_z — одинаковые. Тогда $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$, значит $E_x = const$ (не изменяет-

ся в пространстве).

Кроме того, из 4-го уравнения Максвелла: $c^2 \cdot \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, в проек-

ции на ось x : $c^2 \cdot \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \frac{\partial E_x}{\partial t}$, где из соображений симметрии поле

параллельно заряженной пластине – источнику поля, линии поля не закру-

чены благодаря бесконечной протяженности пластины: $\frac{\partial B_z}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial B_y}{\partial z} = 0$,

тогда $\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$, значит $E_x = const$ (не изменяется со временем).

В итоге пришли к тому, что если поле \vec{E} существует вдоль оси x , то оно остается постоянным и в пространстве, и во времени (т. е. является статическим (кулоновским) полем). Итак, колебания электрического поля волны происходят только перпендикулярно направлению распространения волны x , это заключение подтверждает поперечность плоской электромагнитной волны.

2) Для магнитной компоненты поля аналогично.

Из 2-го уравнения: $\nabla \vec{B} = 0$, откуда $\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$, т. е. $B_x = const$ (статическое поле).

Из 3-го уравнения: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, откуда $\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$.

Таким образом, подтверждается, что и магнитная компонента поля волны будет колебаться только перпендикулярно направлению x . В итоге в целом обосновали поперечность электромагнитной волны в пустом пространстве.

Получим волновое уравнение для плоской волны/

1) Из 3-го уравнения Максвелла: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$,

для проекций: $\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$, или $0 - 0 = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$, или $\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$;

$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$ (пусть $E_x = 0$), или $0 - 0 = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$, или $\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$;

$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$, или $\boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}}$. (3.2)

2) Из 4-го уравнения Максвелла: $c^2 \cdot \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$,

для проекций: $c^2 \cdot \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \frac{\partial E_x}{\partial t}$, или $c^2 \cdot (0 - 0) = \frac{\partial E_x}{\partial t}$, или $\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$;

$$c^2 \cdot \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial E_y}{\partial t}, \text{ или } \boxed{-c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}}; \quad (3.3)$$

$c^2 \cdot \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial E_z}{\partial t}$ (пусть $B_x = 0$), или $c^2 \cdot (0 - 0) = \frac{\partial E_z}{\partial t}$, или $\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$.

Продифференцируем равенство (3.3) по координате x :

$$-c^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \cdot \partial t}. \quad (3.4)$$

Продифференцируем равенство (3.2) по времени t :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t \cdot \partial x} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}. \quad (3.5)$$

Из равенств (3.4) и (3.5) получаем $\left[\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0 \right]$ – волновое

уравнение для плоской волны.

Аналогично (3.3) по времени, а (3.4) по координате x можно получить

$$\left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \right].$$

В общем случае трёхмерной задачи можно получить волновые уравнения в более общем виде

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Общее решение волнового уравнения для плоских и сферических волн.

Волновое уравнение: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$, где под функцией можно

рассматривать и напряжённость \mathbf{E} и индукцию \mathbf{B} и потенциалы.

Решением этого уравнения в общем виде является произвольная функция $\psi = f(x - vt)$, где $x - vt$ – комбинированная переменная. Под-

твердим это решение: $\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'_x$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''_{xx}$, $\frac{\partial \psi}{\partial t} = f'_t = -v \cdot f'_x$,

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = f''_{tt} = (-v)^2 \cdot f''_{xx} = v^2 \cdot f''_{xx}$, подставляя в волновое уравнение, доказы-

ваем тождество.

Указанное решение для случая, когда волна распространяется в положительном направлении оси x (рис. 4.1, функция ψ имеет произвольный вид, амплитуда остается постоянной). Если волна будет распространяться в обратном направлении, то решение будет $g(x + ut)$.

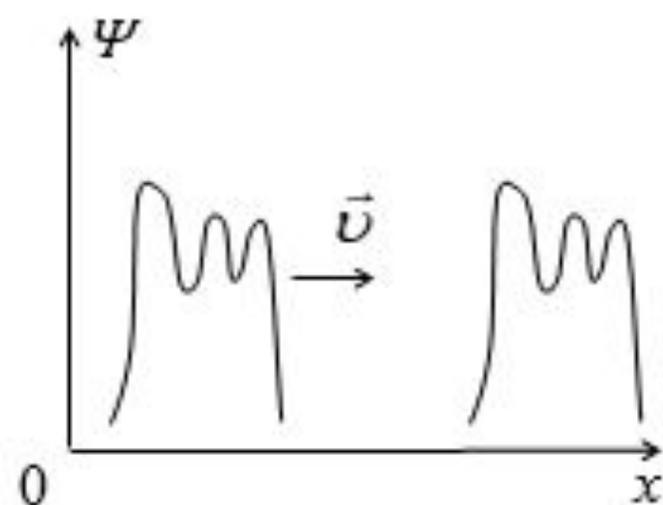


Рис. 4.1

Таким образом, общее решение волнового уравнения имеет вид:

$$\psi = f(x - ut) + g(x + ut).$$

ПЛОСКАЯ ВОЛНА

- **Волновой фронт (совокупность точек в пространстве, в которых колебание волны происходит с одинаковой фазой) такой волны представляет из себя плоскость,**
- **распространяется волновой фронт, а значит и сама волна вдоль оси x ($-x$),**
- **амплитуда такой волны постоянна.**

Сферические волны

волновое уравнение в общем виде

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (4.1)$$

Попробуем записать волновое уравнение через радиус-вектор \vec{r} . В начале координат находится точечный излучатель (рис. 4.2):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4.2)$$

Перейдем от декартовых координат к сферическим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \psi'_r \cdot \frac{\partial r}{\partial x}. \text{ Согласно (4.2): } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}. \quad (4.3)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\psi \cdot r) \quad (4.4)$$

Подставим полученное выражение в волновое уравнение (4.1), полу-

чим $\frac{1}{r} \frac{\partial^2(\psi r)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$. Умножим равенство на r , и внесем под знак

частной производной по времени, от этого

равенство не изменится:

$$\frac{\partial^2(\psi r)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2(\psi r)}{\partial t^2} = 0, \quad (4.5)$$

Получили волновое уравнение в сферических координатах.

Решением данного уравнения является $\psi \cdot r = f(r - vt)$, или

$\psi = \frac{f(r - vt)}{r}$ – общее решение волнового уравнения для сферической рас-

ходящейся волны.

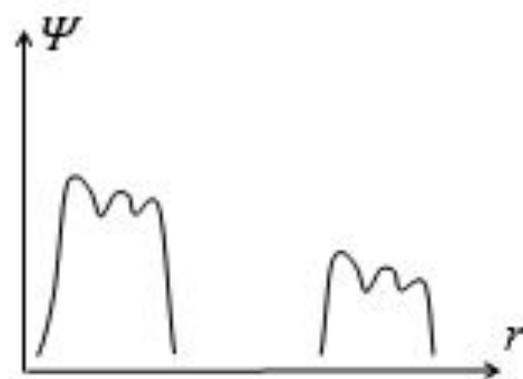


Рис. 4.3

Сферическая волна

1) $r \rightarrow 0$, то $\psi \rightarrow +\infty$, т. е. источник физически не может быть точечным (в точке $r=0$ находится антенна передатчика)

2) при росте r функция ψ убывает, т.е. амплитуда волны уменьшается обратно пропорционально расстоянию (не является постоянной).

3) математическая возможность решения $g(r + vt)$ физически не реализуется, так как оно соответствует волне, сходящейся из бесконечности в точку (при $r = 0$). Таких волн в вакууме нет; в случае же среды – возможно отражение, происходит дополнительное ослабление волн из-за рассеивания энергии волны в веществе!

Общее решение волнового уравнения для потенциалов с источником

Получим связь векторного и скалярного потенциалов.

Из 3-го уравнения Максвелла: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Учтем, что $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

Тогда $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A})$, или $\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$. Отсюда согласно

математической теореме $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$, или $\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi}$ (3.6)

Из 1-го уравнения Максвелла: $\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, или $-\nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$,

$$\text{или } -\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \vec{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.8)$$

Из 4-го уравнения Максвелла: $c^2 \cdot \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}$, или с учетом (3.6):

$$c^2 \cdot \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \right) = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0},$$

$$\text{или } c^2 \cdot \nabla (\nabla \vec{A}) - c^2 \cdot \nabla^2 \vec{A} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0}. \quad (3.9)$$

К данному уравнению применим калибровку Лоренца:

$$\boxed{\nabla \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}} \quad (3.10)$$

В частном случае – для статического поля: переходит в $\nabla \vec{A} = 0$ (в калибровку Кулона).

Тогда уравнение (3.9) упрощается: $-c^2 \cdot \nabla^2 \vec{A} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}$, или

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{j}}{c^2 \varepsilon_0}} \quad (3.11) \text{ – волновое уравнение для векторного потен-}$$

циала с источником поля.

Подставим калибровку Лоренца (3.10) в равенство (3.8):

$$-\nabla^2\varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \text{ или } \boxed{\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad (3.12) - \text{ волновое уравнение}$$

для скалярного потенциала с источником поля.

Распределённый
заряд

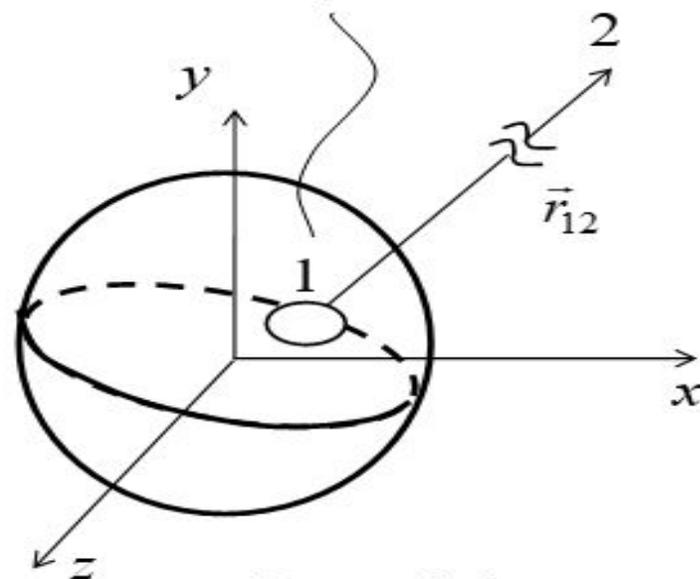


Рис. 4.4

$$\varphi(2, t) = \int_{(V_1)} \frac{\rho\left(1, t - \frac{r_{12}}{c}\right) \cdot dV_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

$$\vec{A}(2, t) = \int_{(V_1)} \frac{\vec{j}\left(1, t - \frac{r_{12}}{c}\right) \cdot dV_1}{4\pi c^2 \epsilon_0 r_{12}}$$

Энергия электромагнитного поля

Плотность энергии. Поток энергии

w – плотность энергии (Дж/м³).

\vec{s} – вектор Умова-Пойнтинга – плотность потока энергии (Вт/м²).

Суммарная энергия электромагнитного поля в объеме V : $W = \int_{(V)} w \cdot dV$.

Суммарный поток энергии электромагнитного поля через замкнутую поверхность S , ограничивающую объем V : $\Phi_w = \int_{(S)} \vec{s} \cdot d\vec{S}$ (рис. 5.1).

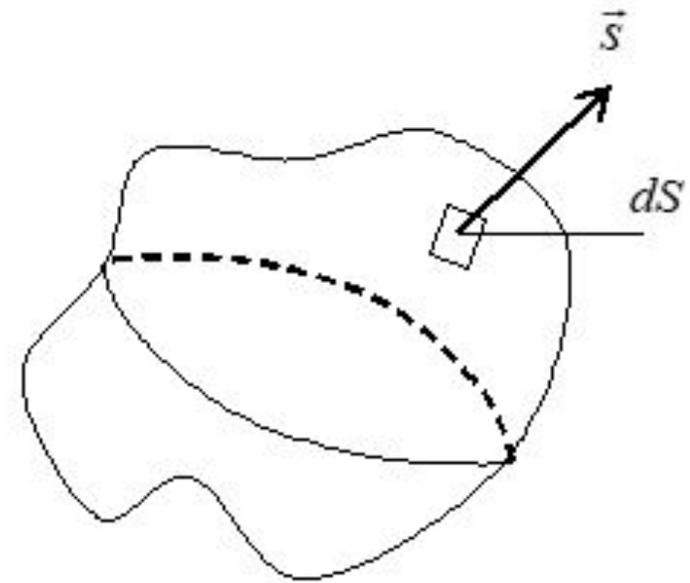


Рис. 5.1

Тогда согласно закону сохранения энергии для электромагнитного поля:

$-\frac{dW}{dt} = \Phi_w + \frac{dA}{dt}$, где A – работа поля над зарядами вещества (энергия рассеянная в веществе), $\frac{dA}{dt} = P$ – мощность, получаемая зарядами от поля.

$$-\frac{d}{dt} \int_{(V)} w \cdot dV = \oint_{(S)} \vec{s} \cdot d\vec{S} + P \quad (5.1), \text{ здесь } \oint_{(S)} \vec{s} \cdot d\vec{S} = \int_{(V)} (\nabla \vec{s}) \cdot dV \text{ – согласно теореме Гаусса.}$$

Заметим, что $P = \int_{(N)} dN \cdot \vec{F} \cdot \vec{u}$, dN – число свободных зарядов в

объеме dV , \vec{u} – скорости зарядов, $\vec{F} = q_0 \vec{E} + q_0 \cdot (\vec{u} \times \vec{B})$ – сила на один заряд со стороны поля.

$$\text{Тогда } \vec{F} \cdot \vec{u} = q_0 \vec{E} \vec{u} + q_0 \cdot \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) = q_0 \vec{E} \vec{u}.$$

$$P = \int_{(N)} q_0 \vec{E} \vec{u} \cdot dN = \int_{(q)} dq \cdot \vec{u} \cdot \vec{E} = \int \frac{dq}{dt \cdot S} \cdot S \cdot dt \cdot \vec{u} \cdot \vec{E} = \int_{(V)} \vec{E} \vec{j} \cdot dV,$$

Тогда $\vec{F} \cdot \vec{u} = q_0 \vec{E} \vec{u} + q_0 \cdot \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) = q_0 \vec{E} \vec{u}$.

$$P = \int_{(N)} q_0 \vec{E} \vec{u} \cdot dN = \int_{(q)} dq \cdot \vec{u} \cdot \vec{E} = \int \frac{dq}{dt \cdot S} \cdot S \cdot dt \cdot \vec{u} \cdot \vec{E} = \int_{(V)} \vec{E} \vec{j} \cdot dV,$$

где $j = \frac{I}{S} = \frac{dq}{dt \cdot S}$ – плотность электрического тока, а элемент объема

$$dV = S \cdot dx = S \cdot u \cdot dt.$$

Итак, из равенства (5.1) получаем

$$-\frac{d}{dt} \int_{(V)} w \cdot dV = \int_{(V)} (\nabla \vec{s}) \cdot dV + \int_{(V)} \vec{E} \vec{j} \cdot dV, \text{ или}$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \vec{s} + \vec{E} \vec{j} \quad (5.2) \quad \text{— закон сохранения энергии электромагнитного поля}$$

в дифференциальной форме. Здесь $\frac{\partial w}{\partial t}$ — скорость изменения плотности энергии электромагнитного поля в данной точке пространства.

Учтем из 4-го уравнения Максвелла, что $\vec{j} = \varepsilon_0 c^2 (\nabla \times \vec{B}) - \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$.

$$\text{Тогда } \vec{Ej} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E}(\nabla \times \vec{B}) - \varepsilon_0 \frac{\vec{E}\partial\vec{E}}{\partial t}. \quad (5.3)$$

$$\vec{Ej} = \varepsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) - \varepsilon_0 c^2 \frac{\vec{B}\partial\vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \frac{\vec{E}\partial\vec{E}}{\partial t},$$

$$\text{или } \vec{Ej} = -\varepsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t},$$

$$\vec{Ej} + \nabla(\varepsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B})) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 c^2 \vec{B}^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} \right).$$

Тогда согласно (5.2) получаем $w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}$ – плотность энергии

электромагнитного поля в вакууме, причем $B = \mu_0 H$, $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$. В веще-

стве, учитывая диэлектрическую проницаемость ϵ и магнитную проницае-

мость μ : $w = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}$. (5.6)

Также из (5.2) видно, что вектор Пойнтинга

$$\vec{s} = \epsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (5.7)$$

Поток энергии плоской электромагнитной волны в пустом пространстве

Рассмотрим две одинаковые волны (сдвинутые по фазе на π), которые распространяются вдоль оси x (рис. 5.2).

Так как

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0},$$

$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \vec{0}$, то результирующий вектор Пойнтинга $\vec{s} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{0}$, но

$$\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = 2(\vec{E}_1 \times \vec{H}_1) \neq \vec{0}, \text{ т. е. } \vec{s} \neq \vec{s}_1 + \vec{s}_2.$$

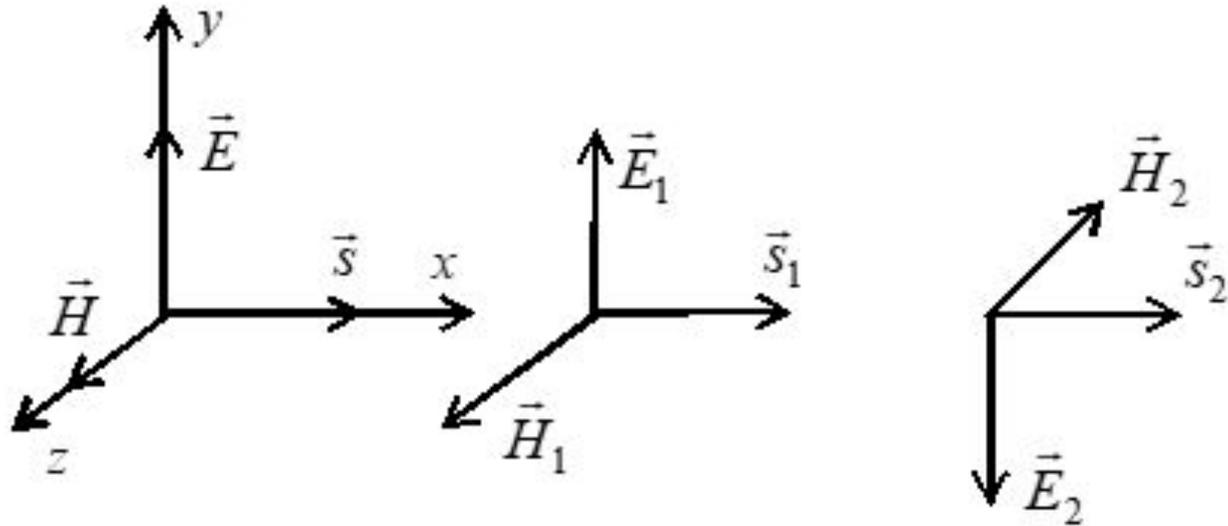


Рис. 5.2

Поток энергии для одиночного цилиндрического проводника с постоянным током

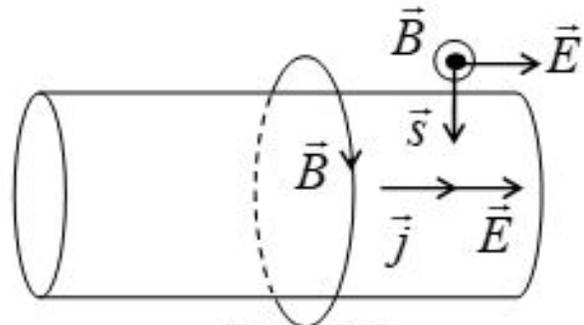


Рис. 5.3

Так как поток энергии электромагнитного поля проходит через боковую поверхность проводника, поток энергии за единицу времени соответствует

мощности $P = s \cdot 2 \cdot \pi r \cdot l = EH \cdot 2\pi r l$, если учесть, что $E = \frac{U}{l}$, $H = \frac{I}{2\pi r}$, то

получаем, $P = UI$, что совпадает с выражением для мощности постоянного тока.

Спасибо за внимание