Плоская одномерная задача

Волновое уравнение для плоской волны

Рассмотрим простейшую одномерную задачу, когда все измененения происходят вдоль одной оси, например **X**

Покажем поперечность электромагнитной волны. Рассмотрим плоскую волну от пластины (рис. 3.1) в пустом пространстве. В пустом пространстве: $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$.

1) Для электрической компоненты поля.

Из 1-го уравнения Максвелла: $\nabla\vec{E} = 0$, или $\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$,

здесь $\dfrac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ и $\dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$, т. к. источник поля протяженная пластина (рис. 3.2), то для любой точки на одном и том же расстоянии до пластины поля E_y и E_z – одинаковые. Тогда $\dfrac{\partial E_x}{\partial x} = 0$, значит $E_x = const$ (не изменяется в пространстве).

Кроме того, из 4-го уравнения Максвелла: $c^2 \cdot \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, в проекции на ось x: $c^2 \cdot \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \frac{\partial E_x}{\partial t}$, где из соображений симметрии поле параллельно заряженной пластине – источнику поля, линии поля не закручены благодаря бесконечной протяженности пластины: $\frac{\partial B_z}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial B_y}{\partial z} = 0$, тогда $\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$, значит $E_x = const$ (не изменяется со временем).

В итоге пришли к тому, что если поле $\vec{E}$ существует вдоль оси x, то оно остается постоянным и в пространстве, и во времени (т. е. является статическим (кулоновским) полем). Итак, колебания электрического поля волны происходят только перпендикулярно направлению распространения волны x, это заключение подтверждает поперечность плоской электромагнитной волны.

2) Для магнитной компоненты поля аналогично.

Из 2-го уравнения: $\nabla\vec{B}=0$, откуда $\frac{\partial B_x}{\partial x}=0$, т. е. $B_x = const$ (статическое поле).

Из 3-го уравнения: $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, откуда $\frac{\partial B_x}{\partial t}=0$.

Таким образом, подтверждается, что и магнитная компонента поля волны будет колебаться только перпендикулярно направлению x. В итоге в целом обосновали поперечность электромагнитной волны в пустом пространстве.

Получим волновое уравнение для плоской волны

1) Из 3-го уравнения Максвелла: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$,

для проекций: $\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$, или $0 - 0 = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$, или $\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$;

$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$ (пусть $E_x = 0$), или $0 - 0 = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$, или $\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$;

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \text{ или } \boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}}. \qquad (3.2)$$

2) Из 4-го уравнения Максвелла: $c^2 \cdot \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$,

для проекций: $c^2 \cdot \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \frac{\partial E_x}{\partial t}$, или $c^2 \cdot (0-0) = \frac{\partial E_x}{\partial t}$, или $\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$;

$$c^2 \cdot \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial E_y}{\partial t}, \text{ или } \boxed{-c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}}; \qquad (3.3)$$

$c^2 \cdot \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial E_z}{\partial t}$ (пусть $B_x = 0$), или $c^2 \cdot (0-0) = \frac{\partial E_z}{\partial t}$, или $\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$.

Продифференцируем равенство (3.3) по координате x:

$$-c^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \cdot \partial t}. \tag{3.4}$$

Продифференцируем равенство (3.2) по времени t:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t \cdot \partial x} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}. \tag{3.5}$$

Из равенств (3.4) и (3.5) получаем $\boxed{\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0}$ – волновое уравнение для плоской волны.

Аналогично (3.3) по времени, а (3.4) по координате x можно получить

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0}.$$

В общем случае трёхмерной задачи можно получить волновые уравнения в более общем виде

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Общее решение волнового уравнения для плоских и сферических волн.

Волновое уравнение: $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$, где под функцией можно рассматривать и напряжённость **E** и индукцию **B** и потенциалы.

Решением этого уравнения в общем виде является произвольная функция $\psi=f(x-\upsilon t)$, где $x-\upsilon t$ – комбинированная переменная. Подтвердим это решение: $\frac{\partial\psi}{\partial x}=f'_x$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=f''_{xx}$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}=f'_t=-\upsilon\cdot f'_x$,

$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=f''_{tt}=(-\upsilon)^2\cdot f''_{xx}=\upsilon^2\cdot f''_{xx}$, подставляя в волновое уравнение, доказываем тождество.

Указанное решение для случая, когда волна распространяется в положительном направлении оси x (рис. 4.1, функция ψ имеет произвольный вид, амплитуда остается постоянной). Если волна будет распространяться в обратном направление, то решение будет $g(x + \upsilon t)$.

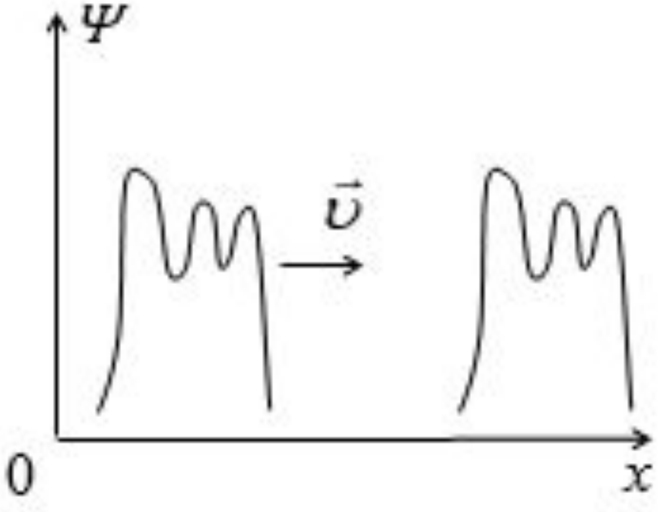

Рис. 4.1

Таким образом, общее решение волнового уравнения имеет вид: $\psi = f(x - \upsilon t) + g(x + \upsilon t)$.

ПЛОСКАЯ ВОЛНА

- **Волновой фронт (совокупность точек в пространстве, в которых колебание волны происходит с одинаковой фазой) такой волны представляет из себя плоскость,**
- **распространяется волновой фронт, а значит и сама волна вдоль оси x (-x),**
- **амплитуда такой волны постоянна.**

Сферические волны

волновое уравнение в общем виде

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \qquad (4.1)$$

Попробуем записать волновое уравнение через радиус-вектор $\vec{r}$. В начале координат находится точечный излучатель (рис. 4.2):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (4.2)$$

Перейдем от декартовых координат к сферическим:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \psi'_r \cdot \frac{\partial r}{\partial x}.$$ Согласно (4.2): $$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}. \qquad (4.3)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\psi \cdot r) \qquad (4.4)$$

Подставим полученное выражение в волновое уравнение (4.1), получим $\frac{1}{r}\frac{\partial^2(\psi r)}{\partial r^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$. Умножим равенство на r, и внесем под знак частной производной по времени, от этого равенство не изменится:

$$\frac{\partial^2(\psi r)}{\partial r^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2(\psi r)}{\partial t^2}=0, \tag{4.5}$$

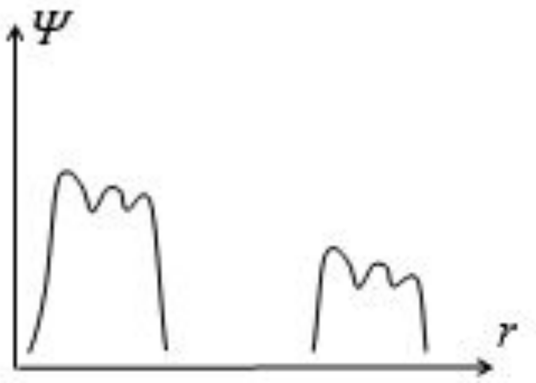

Рис. 4.3

Получили волновое уравнение в сферических координатах.

Решением данного уравнения является $\psi\cdot r=f(r-\upsilon t)$, или $\psi=\frac{f(r-\upsilon t)}{r}$ – общее решение волнового уравнения для сферической расходящейся волны.

Сферическая волна

1) $r \to 0$, то $\psi \to +\infty$, т. е. источник физически не может быть точечным (в точке r=0 находится антенна передатчика)

2) при росте r функция ψ убывает, т.е. амплитуда волны уменьшается обратно пропорционально расстоянию (не является постоянной).

3) математическая возможность решения $g(r + \upsilon t)$ физически не реализуется, так как оно соответствует волне, сходящейся из бесконечности в точку (при $r = 0$). Таких волн в вакууме нет; в случае же среды – возможно отражение, происходит дополнительное ослабление волн из-за рассеивания энергии волны в веществе!

Общее решение волнового уравнения для потенциалов с источником

Получим связь векторного и скалярного потенциалов.

Из 3-го уравнения Максвелла: $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Учтем, что $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$.

Тогда $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{A})$, или $\nabla\times\left(\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\vec{0}$. Отсюда согласно математической теореме $\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$, или $\boxed{\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi}$ (3.6)

Из 1-го уравнения Максвелла: $\nabla\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, или $-\nabla\cdot\left(\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$,

или $-\nabla^2\varphi-\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla\vec{A})=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$. (3.8)

Из 4-го уравнения Максвелла: $c^2\cdot\nabla\times\vec{B}-\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\dfrac{\vec{j}}{\varepsilon_0}$, или с учетом (3.6):

$$c^2\cdot\nabla\times(\nabla\times\vec{A})-\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\right)=\frac{\vec{j}}{\varepsilon_0},$$

$$\text{или } c^2\cdot\nabla(\nabla\vec{A})-c^2\cdot\nabla^2\vec{A}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}+\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=\frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}. \qquad (3.9)$$

К данному уравнению применим калибровку Лоренца:

$$\boxed{\nabla\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}}. \qquad (3.10)$$

В частном случае – для статического поля: переходит в $\nabla\vec{A} = 0$ (в калибровку Кулона).

Тогда уравнение (3.9) упрощается: $-c^2\cdot\nabla^2\vec{A} + \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}$, или

$\boxed{\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{j}}{c^2\varepsilon_0}}$ (3.11) – волновое уравнение для векторного потенциала с источником поля.

Подставим калибровку Лоренца (3.10) в равенство (3.8): $-\nabla^2\varphi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, или $\boxed{\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ (3.12) – волновое уравнение для скалярного потенциала с источником поля.

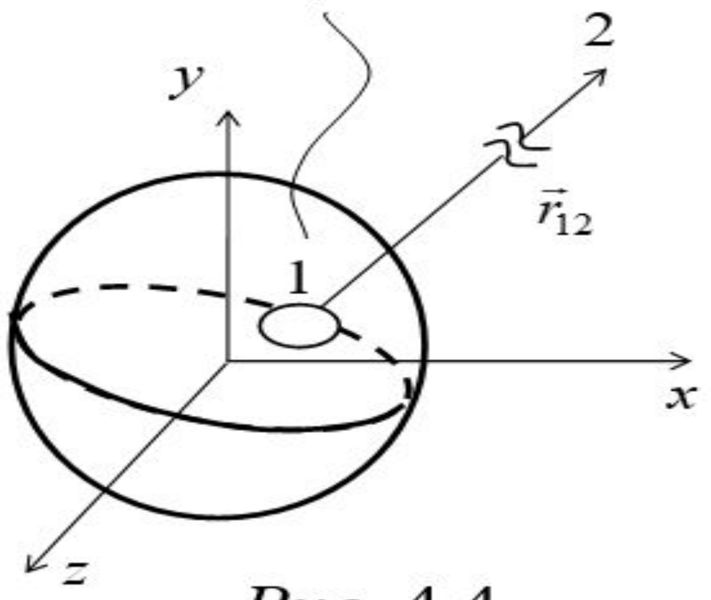

Рис. 4.4

$$\varphi(2,t)=\int\limits_{(V_1)}\frac{\rho\left(1,t-\frac{r_{12}}{c}\right)\cdot dV_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}\qquad \vec{A}(2,t)=\int\limits_{(V_1)}\frac{\vec{j}\left(1,t-\frac{r_{12}}{c}\right)\cdot dV_1}{4\pi c^2\varepsilon_0 r_{12}}$$

Энергия электромагнитного поля
Плотность энергии. Поток энергии

w – плотность энергии (Дж/м^3).

$\vec{s}$ – вектор Умова-Пойнтинга – плотность потока энергии (Вт/м^2).

Суммарная энергия электромагнитного поля в объеме V: $W = \int\limits_{(V)} w \cdot dV$.

Суммарный поток энергии электромагнитного поля через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V: $\Phi_w = \int\limits_{(S)} \vec{s} \cdot d\vec{S}$ (рис. 5.1).

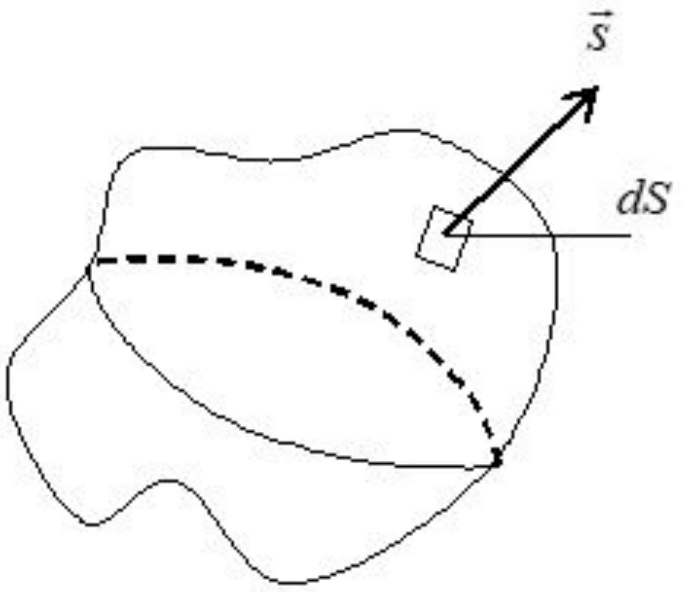

Рис. 5.1

Тогда согласно закону сохранения энергии для электромагнитного поля:

$-\frac{dW}{dt} = \Phi_w + \frac{dA}{dt}$, где A – работа поля над зарядами вещества (энергия рассеянная в веществе), $\frac{dA}{dt} = P$ – мощность, получаемая зарядами от поля.

$-\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)} w \cdot dV = \oint\limits_{(S)} \vec{s} d\vec{S} + P$ (5.1), здесь $\int\limits_{(S)} \vec{s} \cdot d\vec{S} = \int\limits_{(V)} (\nabla \vec{s}) \cdot dV$ – согласно теореме Гаусса. Заметим, что $P = \int\limits_{(N)} dN \cdot \vec{F} \cdot \vec{u}$, dN – число свободных зарядов в объеме dV, $\vec{u}$ - скорости зарядов, $\vec{F} = q_0\vec{E} + q_0 \cdot (\vec{u} \times \vec{B})$ - сила на один заряд со стороны поля.

Тогда $\vec{F} \cdot \vec{u} = q_0\vec{E}\vec{u} + q_0 \cdot \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) = q_0\vec{E}\vec{u}$.

$$P = \int\limits_{(N)} q_0\vec{E}\vec{u} \cdot dN = \int\limits_{(q)} dq \cdot \vec{u} \cdot \vec{E} = \int \frac{dq}{dt \cdot S} \cdot S \cdot dt \cdot \vec{u} \cdot \vec{E} = \int\limits_{(V)} \vec{E}\vec{j} \cdot dV,$$

Тогда $\vec{F}\cdot\vec{u} = q_0\vec{E}\vec{u} + q_0\cdot\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{B}) = q_0\vec{E}\vec{u}$.

$$P = \int\limits_{(N)} q_0\vec{E}\vec{u}\cdot dN = \int\limits_{(q)} dq\cdot\vec{u}\cdot\vec{E} = \int\frac{dq}{dt\cdot S}\cdot S\cdot dt\cdot\vec{u}\cdot\vec{E} = \int\limits_{(V)}\vec{E}\vec{j}\cdot dV\,,$$

где $j = \dfrac{I}{S} = \dfrac{dq}{dt\cdot S}$ – плотность электрического тока, а элемент объема $dV = S\cdot dx = S\cdot u\cdot dt$.

Итак, из равенства (5.1) получаем

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)} w\cdot dV = \int\limits_{(V)}(\nabla\vec{s})\cdot dV + \int\limits_{(V)}\vec{E}\vec{j}\cdot dV\,,$$ или

$-\dfrac{\partial w}{\partial t}=\nabla\vec{s}+\vec{E}\vec{j}$ (5.2) – закон сохранения энергии электромагнитного поля в дифференциальной форме. Здесь $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ – скорость изменения плотности энергии электромагнитного поля в данной точке пространства.

Учтем из 4-го уравнения Максвелла, что $\vec{j} = \varepsilon_0 c^2 (\nabla \times \vec{B}) - \varepsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial t}$.

Тогда $\vec{E}\vec{j} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E}(\nabla \times \vec{B}) - \varepsilon_0 \dfrac{\vec{E}\partial \vec{E}}{\partial t}$. (5.3)

$$\vec{E}\vec{j} = \varepsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) - \varepsilon_0 c^2 \frac{\vec{B}\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \frac{\vec{E}\partial \vec{E}}{\partial t},$$

или $\vec{E}\vec{j} = -\varepsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \dfrac{\varepsilon_0 c^2}{2} \dfrac{\partial \vec{B}^2}{\partial t} - \dfrac{\varepsilon_0}{2} \dfrac{\partial \vec{E}^2}{\partial t}$,

$$\vec{E}\vec{j} + \nabla(\varepsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B})) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 c^2 \vec{B}^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} \right).$$

Тогда согласно (5.2) получаем $w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}$ – плотность энергии электромагнитного поля в вакууме, причем $B = \mu_0 H$, $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$. В веществе, учитывая диэлектрическую проницаемость ε и магнитную проницаемость μ: $w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$. (5.6)

Также из (5.2) видно, что вектор Пойнтинга

$$\vec{s} = \varepsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{H}. \qquad (5.7)$$

Поток энергии плоской электромагнитной волны в пустом пространстве

Рассмотрим две одинаковые волны (сдвинутые по фазе на π), которые распространяются вдоль оси x (рис. 5.2).

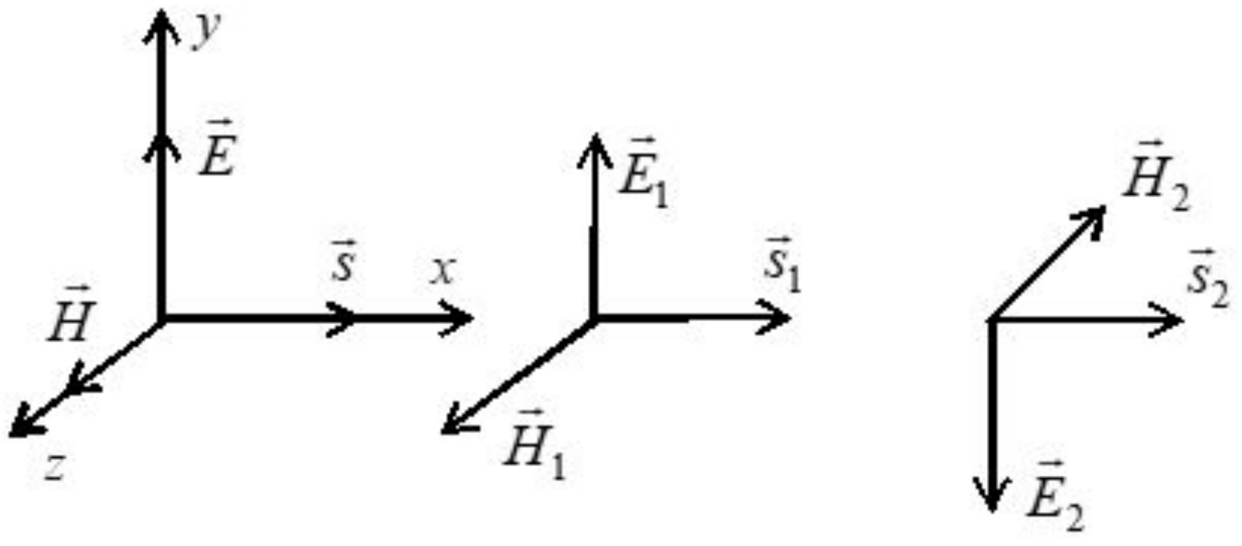

Рис. 5.2

Так как $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$,

$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \vec{0}$, то результирующий вектор Пойнтинга $\vec{s} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{0}$, но

$\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = 2(\vec{E}_1 \times \vec{H}_1) \neq \vec{0}$, т. е. $\vec{s} \neq \vec{s}_1 + \vec{s}_2$.

Поток энергии для одиночного цилиндрического проводника с постоянным током

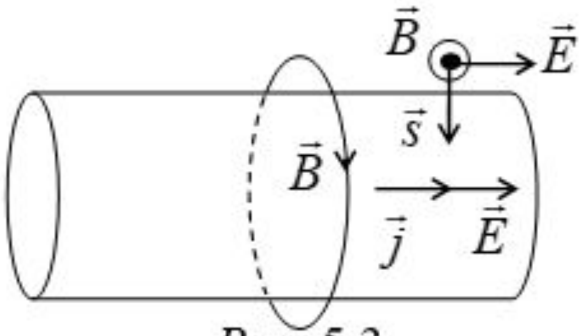

Рис. 5.3

Так как поток энергии электромагнитного поля проходит через боковую поверхность проводника, поток энергии за единицу времени соответствует мощности $P = s \cdot 2 \cdot \pi r \cdot l = EH \cdot 2\pi rl$, если учесть, что $E = \dfrac{U}{l}$, $H = \dfrac{I}{2\pi r}$, то получаем, $P = UI$, что совпадает с выражением для мощности постоянного тока.

Спасибо за внимание