Множества

Источники

- Аляев Ю. А., Тюрин С. Ф. Дискретная математика и математическая логика.
- Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.
- Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1.
- Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов.
- Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов.

Множество

- Совокупность элементов, объединённых общим свойством, но различимых между собой.
  - Множество книг на полке
  - Множество цифр
  - Множество действительных чисел ($\mathbb{R}$)
  - Множество непрерывных функций

Условные обозначения

- $A, B, \dots$ – Множества обозначаются заглавными латинскими буквами
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – Числовые множества
- $a, b, \dots$ - Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами
- $x \in M$ – Означает, что x является элементом множества M (принадлежит M)
- $x \notin M$ – Означает, что x не является элементом множества M

Способы задания множества

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕМ

$\mathrm{M} = \{a, b, d, f\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{1,2, \dots, 100\}$

$Q = \{1, 4, 9, \dots, n^2, \dots\}$

$X = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ СВОЙСТВОМ

$M = \{x: P(x)\}$ $\qquad M = \left\{x \,\middle|\, P(x)\right\}$

$Q = \{x: x = n^2, n \in \mathbb{N}\}$

$Q = \{n^2 | n \in \mathbb{N}\}$

$P = \{n | n - \text{натуральное число, меньшее } 9\}$

$Y = \{y | y = \sin(x), x \in [-\pi, \pi]\}$

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$

Круги Эйлера

- Схематичное изображение множеств и подмножеств

$A = \{1,2,4\},\ B = \{4,5,6,7\},\ C = \{3,8\}, D = \{5,6\}$

Подмножество

- Каждый элемент множества B является элементом множества A
- $B \subseteq A$ B включено в A, B является подмножеством A

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $B = \{1,3,7\}$, $C = \{2,5,6,8\}$

$$B \subseteq A, \quad C \subseteq A$$

$D = \{2,5,6,8\}$

$$D \subseteq A, \quad D \subseteq C, \quad C \subseteq D$$

Собственное подмножество

- Каждый элемент множества B является элементом множества A, в множестве A присутствуют элементы, которых нет в B
- $B \subset \mathrm{A}$ B полностью включено в A, B является собственным подмножеством A

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\},\ B = \{1,3,7\},\ C = \{2,5,6,8\}$$

$$B \subset A, \quad C \subset A$$

$$D = \{2,5,6,8\}$$

$$D \subset A, \quad D \not\subset C, \quad C \not\subset D$$

Задачи

Какие из отношений верны для A и C? $A \subseteq C$, $C \subseteq A$, $A \subset C$, $C \subset A$?

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Longrightarrow$$

$$A \subseteq C$$

$$A \subset B, B \subseteq C \Longrightarrow$$

$$A \subset C, A \subseteq C$$

$$A \subseteq B, B \subset C \Longrightarrow$$

$$A \subset C, A \subseteq C$$

$$B \subset A, C \subset B \Longrightarrow$$

$$C \subset A, C \subseteq A$$

Равенство множеств

- Равными называются множества, содержащие одни и те же элементы
- Если $A \subseteq \mathrm{B}$, и $B \subseteq A$, то $A = B$

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $B = \{1,3,7\}$, $C = \{2,5,6,8\}$, $D = \{2,5,6,8\}$

$C = D$

Задачи

Какие из отношений верны для A и D? $A \subseteq D$, $D \subseteq A$, $A \subset D$, $D \subset A$, $A = D$?

$A \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq A, D \subseteq C \Longrightarrow$

$D \subseteq A$

$A \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq A, D \subseteq C, C \subseteq D \Longrightarrow$

$A \subseteq D, D \subseteq A, A = D$

$A \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq B, D \subseteq C \Longrightarrow$

$A ? D$

$A \subseteq B, B \in C, C \subseteq D \Longrightarrow$

$A ? D$

Универсальное множество $\mathbb{U}$ (Универсум)

- Множество, содержащее все объекты, рассматриваемые в некотором разделе математики, или при решении некоторой задачи
- Такое множество, подмножествами которого являются все рассматриваемые множества

  $\mathbb{C}$ – универсальное в комплексном анализе

  $\mathbb{B} = \{0,1\}$ – универсальное для алгебры логики

  Современный латинский алфавит – универсальное множество для слов английского языка

Пустое множество ∅

- Множество, не содержащее ни одного элемента
- Является подмножеством любого множества

$$M = \{x | x < 0, x \in \mathbb{N}\}$$

$$X = \{x | \ x^2 = -1, x \in \mathbb{N}\}$$

$$Y = \{ \ \}$$

$$Z = \{x \mid x - \text{название дня недели, содержащее букву } '\text{м}'\}$$

Мощность (конечного) множества

- Количество элементов данного множества

$|A| = |\{5,8,2\}| = 3$

$|\emptyset| = 0$

$\left|\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\right| = 2$

Булеан множества

- Множество всех подмножеств
- $\mathcal{P}(A) = 2^A = \mathcal{B}(A) = \{M | M \subseteq A\}$

$A = \{1,2,3\}$

$$\mathcal{B}(A) = \left\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\right\}$$

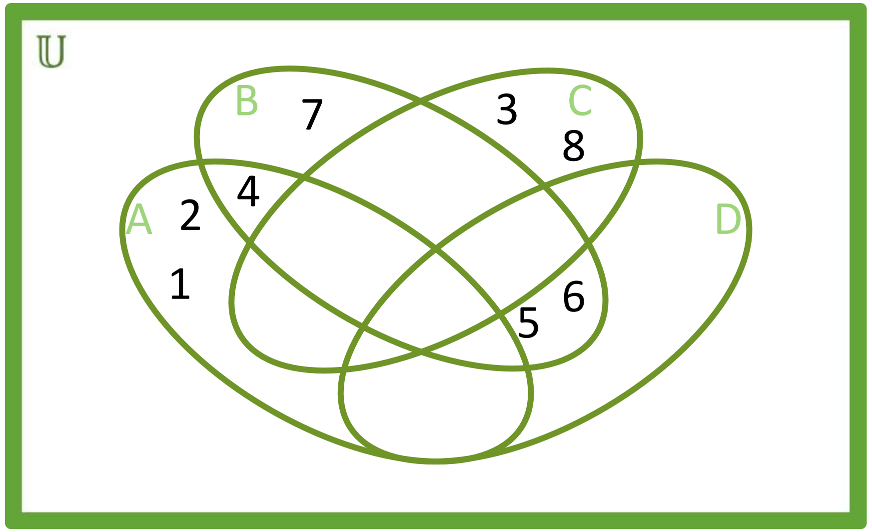
$|\mathcal{B}(A)| = \left|2^A\right| = 2^{|A|}$

Действия над множествами

Диаграммы Венна (Эйлера-Венна)

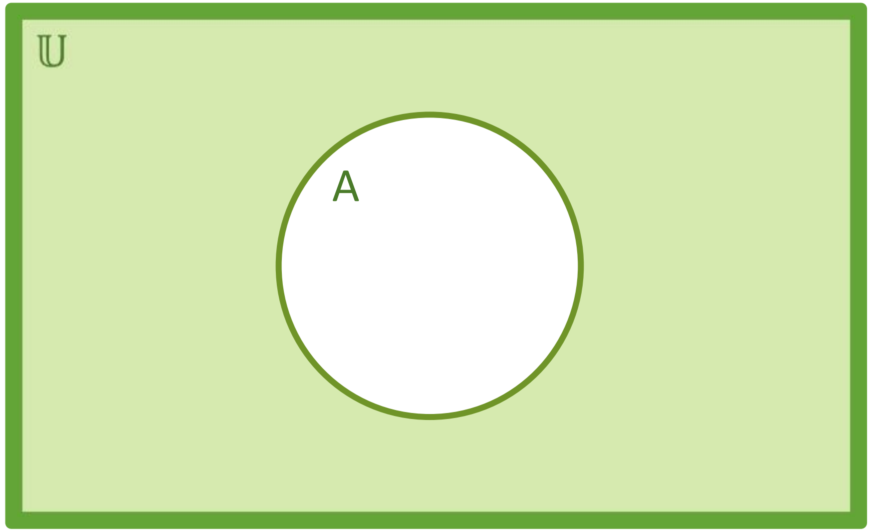
- Схематичное изображение всех возможных отношений нескольких подмножеств универсального множества

$A = \{1,2,4\},\ B = \{4,5,6,7\},\ C = \{3,8\}, D = \{5,6\}$



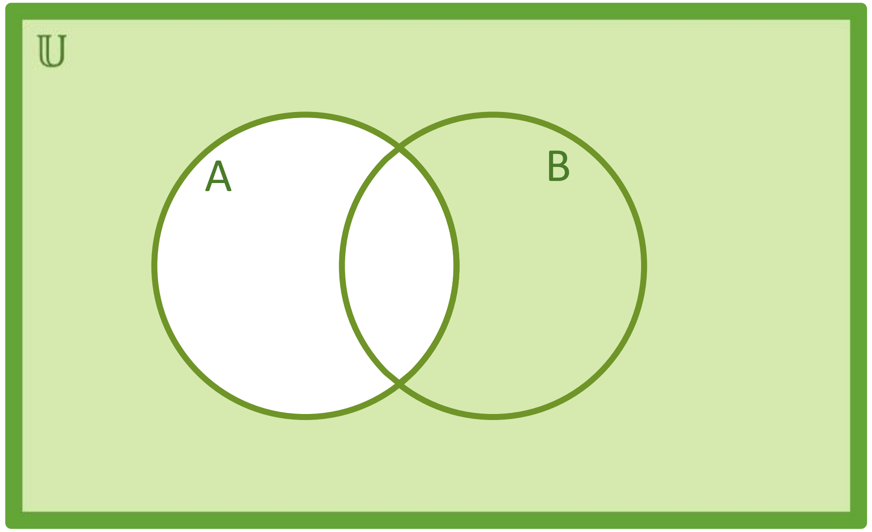
Дополнение множества

- Множество тех элементов универсального множества, которые не принадлежат множеству A
- $\bar{A} = \left\{ x \,\middle|\, (x \in \mathbb{U}) \wedge (x \notin A) \right\}$



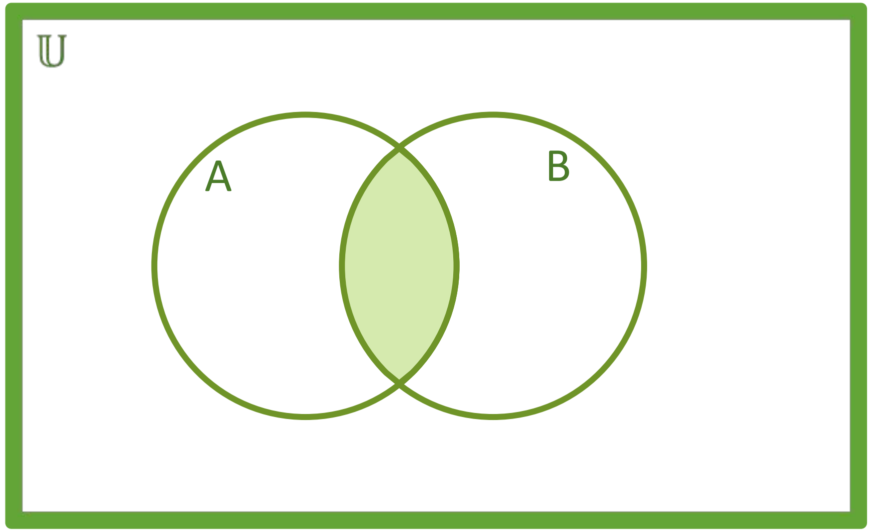
Дополнение множества

- Множество тех элементов универсального множества, которые не принадлежат множеству A
- $\bar{A} = \left\{ x \,\middle|\, (x \in \mathbb{U}) \wedge (x \notin A) \right\}$



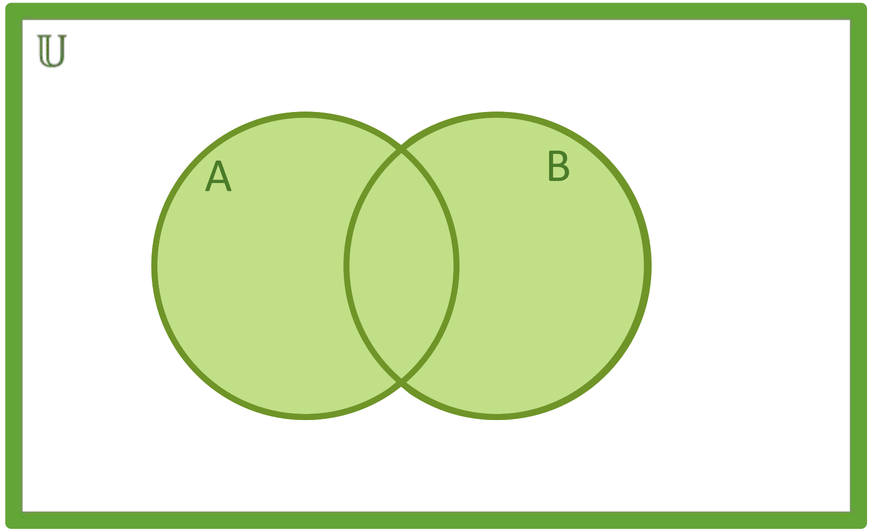
Пересечение множеств

- Множество содержащее только те элементы, что принадлежат одновременно множествам A и B
- $A \cap B = \left\{ x \,\middle|\, (x \in A) \wedge (x \in B) \right\}$



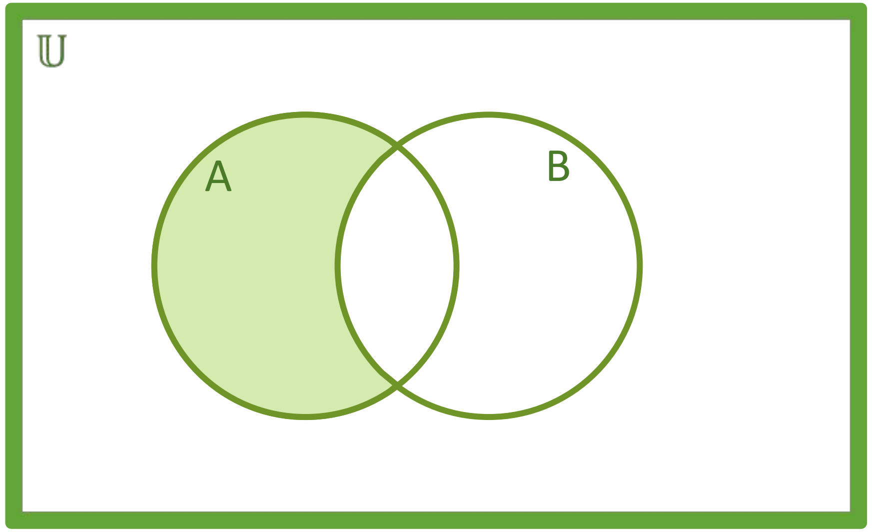
Объединение множеств

- Множество содержащее все элементы, что принадлежат хотя бы одному из множеств A или B
- $A \cup B = \left\{ x \,\middle|\, (x \in A) \vee (x \in B) \right\}$



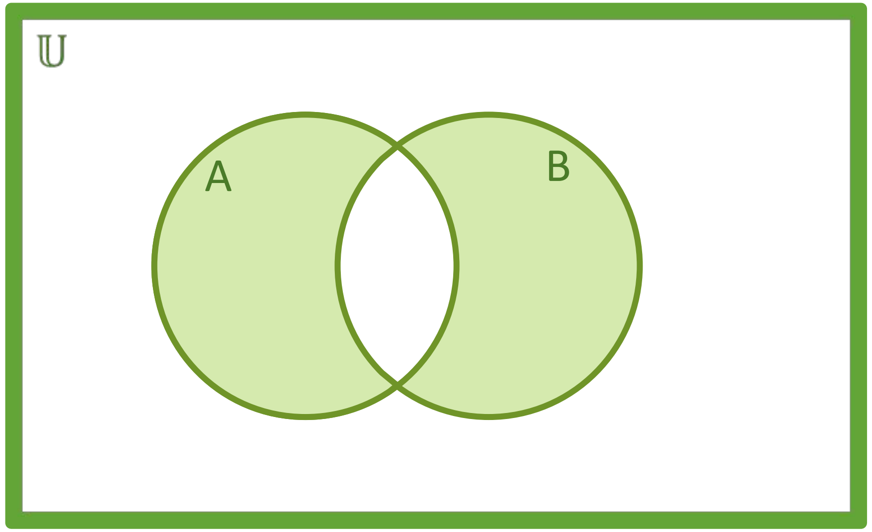
Разность множеств

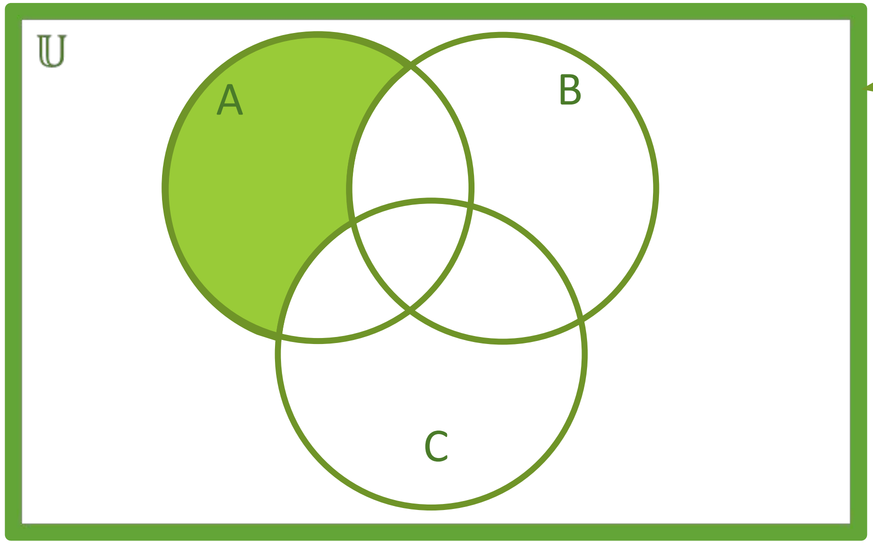
- Множество тех элементов первого множества, что не содержаться во втором множестве
- $A \backslash B = A - B = \left\{ x \,\middle|\, (x \in A) \wedge (x \notin B) \right\} = A \cap \bar{B}$



Симметрическая разность множеств

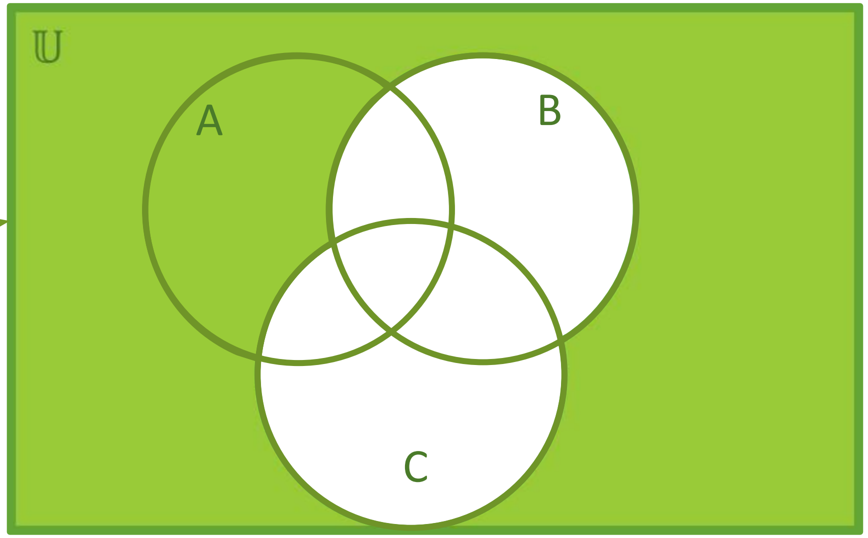
- Множество тех элементов универсума, что содержатся только в A или только в B
- $A \bigtriangleup B = A \dot{-} B = \left\{x \,\middle|\, (x \in A\backslash \mathrm{B}) \wedge (x \in B\backslash \mathrm{A})\right\} = (A\backslash \mathrm{B}) \cup (B\backslash \mathrm{A})$





Эта область соответствует множеству
$A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)}$

А множеству $\overline{B \cup C}$ соответствует



Выполняемые тождества

- Коммутативность операций

  $A \cup B = B \cup A$

  $A \cap B = B \cap A$

  $A \triangle B = B \triangle A$

- Ассоциативность операций

  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

- Дистрибутивность операций

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- Поглощение

  $A \cap (A \cup B) = A$

  $A \cup (A \cap B) = A$

- Двойное дополнение

  $\bar{\bar{A}} = A$

- Идемпотентность

  $A \cap A = A$

  $A \cup A = A$

- Законы де Моргана

  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

- Свойства пустого множества

  $A \cap \emptyset = \emptyset$

  $A \cup \emptyset = A$

- Свойства универсального множества

  $A \cap \mathbb{U} = A$

  $A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$

- Свойства дополнения

  $A \cap \bar{A} = \emptyset$

  $A \cup \bar{A} = \mathbb{U}$

  $\bar{A} = \mathbb{U} \setminus \mathrm{A}$

Кортеж

Кортежем (вектором, упорядоченным множеством) называется упорядоченная последовательность элементов $(a_1, a_2, \dots a_n)$ (или $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$), где $a_i \in A_i$.

a_i называется i компонентой (кортежа) вектора, или проекцией вектора на ось i.

Упорядоченную пару элементов можно представить как:

$$(a_1, a_2) = \{a_1, \{a_1, a_2\}\}$$

Декартово произведение множеств

Декартовым (прямым) произведением двух множеств называется множество упорядоченных пар элементов данных множеств

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in \mathrm{B}\}$$

Свойства:

$A \times B \neq B \times A$

$|A \times B| = |\mathrm{A}| \times |B|$

$A \times \emptyset = \emptyset$

$(A \times B) \times C \leftrightarrow A \times (B \times C)$

Степень множества

Определим по индукции:

$$A^1 = A$$

$$A^n = A \times A^{n-1} = A^{n-1} \times A$$

Нулевая степень определяется как:

$$A^0 = \emptyset$$

Мощность:

$$|A^n| = |A|^n$$

Пример

$\mathrm{A} \ = \ \{a_1, a_2\}$

$\mathrm{B} \ = \{b_1, b_2, \mathrm{b}_3\}$

$\mathrm{A} \times \mathrm{B} \ = \ \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$

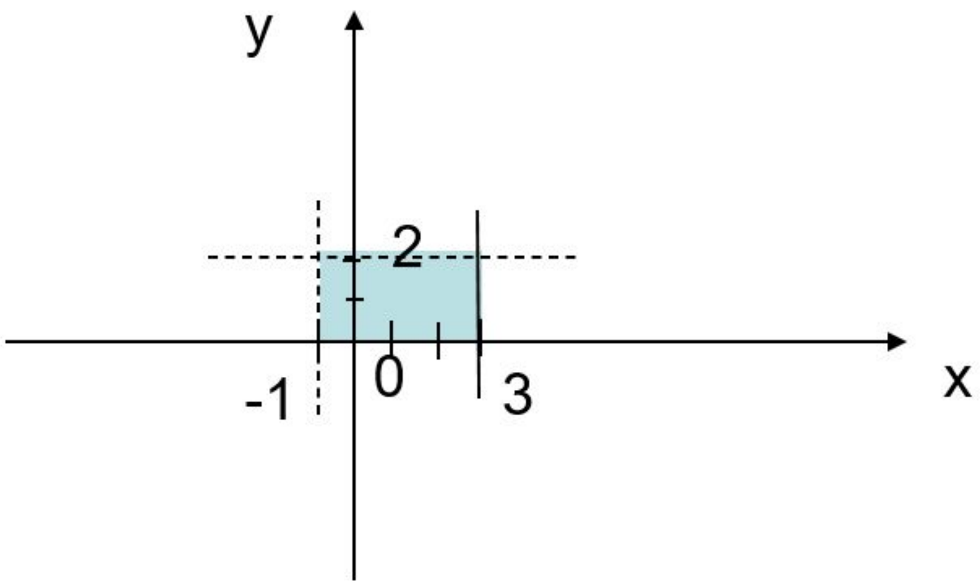
$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 3 = 6$

$\mathrm{A}^2 \ = \ \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2)\}$

$|A^2| = |A|^2 = 2^2 = 4$

Изображение декартова произведения

$$(-1;3]\times[0;2)$$



Свойства относительно операций над множествами

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$
4. $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$

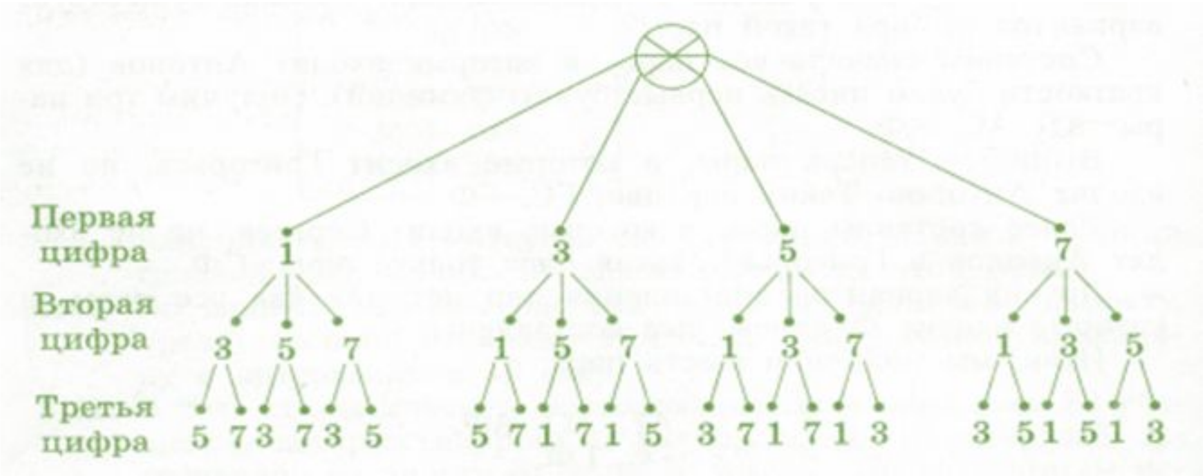
Комбинаторика

Источники

- Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.
- Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. Комбинаторика

Дерево (граф) возможных вариантов

Пример: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5 и 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?



Правила суммы и произведения

Правило суммы.

Если объект x может быть выбран n способами, а объект y – другими m способами, то выбор «либо x, либо y» можно сделать $n + m$ способами.

Правило произведения.

Если объект x может быть выбран n способами и после каждого из таких выборов объект y в свою очередь может быть выбран m способами, то выбор упорядоченной пары $\langle x, y \rangle$, можно сделать $n \cdot m$ способами.

Правило суммы

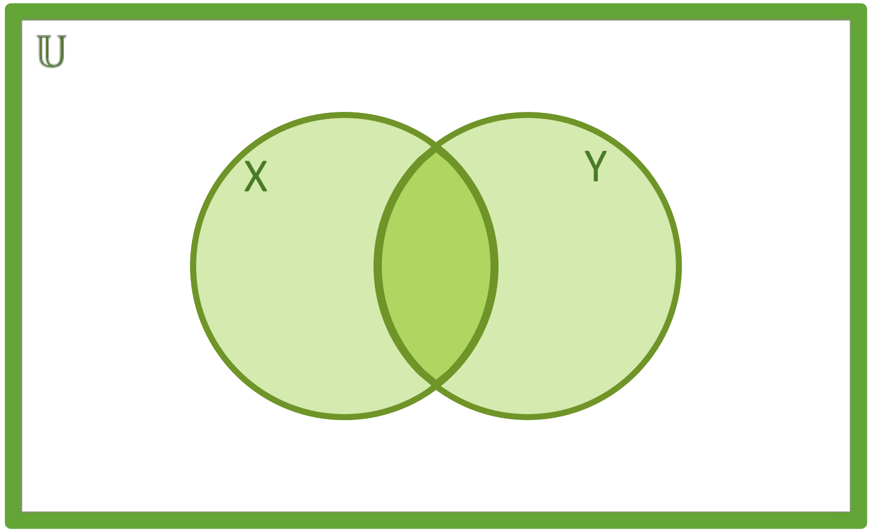
Пусть даны множества X и Y, $X \cap Y = \emptyset$. Сколькими способами может быть выбран объект из множества $X \cup Y$?

$|X| + |Y|$

Пусть даны множества X и Y. Сколькими способами может быть выбран объект из множества $X \cup Y$?

$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$

$$
\begin{aligned}
|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| &- \\
-|X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| &+ \\
+|X \cap Y \cap Z|&
\end{aligned}
$$



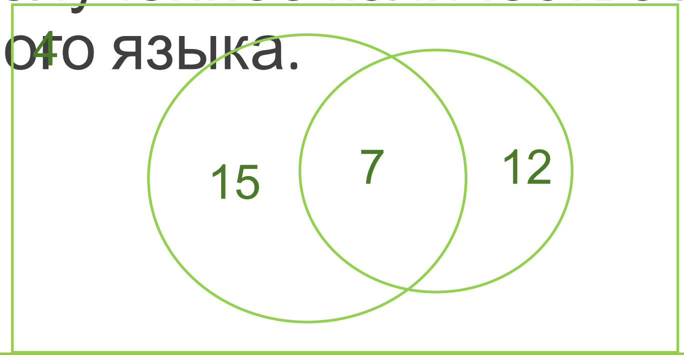
Задача

В группе 24 человека. Из них 15 человек изучают английский язык, 12 – немецкий язык, 7 – оба языка. сколько человек не изучают ни одного языка?

Решение.

По принципу сложения получим количество людей, изучающих английский или немецкий: 15+12-7=20.

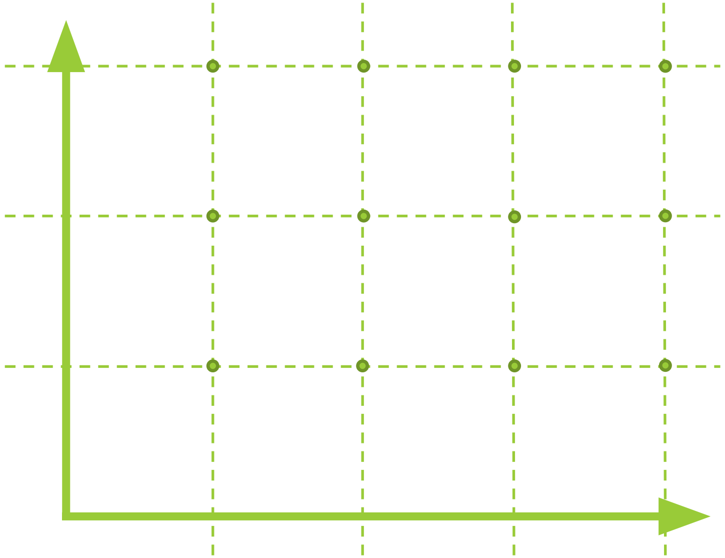
Из общего числа студентов вычтем полученное количество людей: 24-20=4. 4 человека не изучает ни одного языка.



Правило произведения

Пусть $|X| = n$, $|Y| = m$. Сколькими способами может быть выбран объект из множества $X \times Y$?

$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$



Выборка

Подмножество $X_i = \{x_{i_1}, x_{i_2}, .., x_{i_k}\}$ из множества X называется выборкой объема k из n элементов.

Выборка называется ***упорядоченной***, если порядок следования элементов в ней задан. Если порядок следования элементов в выборке не является существенным, то выборка называется ***неупорядоченной***.

Упорядоченная выборка называется ***размещением***, неупорядоченная – ***сочетанием***.

В выборках могут допускаться или не допускаться повторения элементов.

Перестановкой называется упорядоченная выборка объема n из n элементов.

Число перестановок

Сколькими способами можно упорядочить множество из n элементов?

Первый элемент можно выбрать n способами, второй – $n-1$ и т. д.

$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Задача

Сколько существует чисел, составленных из цифр 2, 5, 8 таким образом, чтобы в числе все цифры присутствовали ровно один раз?

Решение

$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Число размещений

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Задача

Сколько различных четырехзначных чисел можно образовать из

цифр 1, 2, 3, ..., 9, если все цифры в каждом четырехзначном числе различны?

Решение

Для формирования каждого четырехзначного числа выбираем четыре цифры из

девяти, поэтому существует

$$A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 3024$$

Число сочетаний

Составим все сочетания из n элементов по k. Каждое из полученных сочетаний можно упорядочить $k!$ способами. Отсюда число размещений выражается через число сочетаний следующим образом:

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k$$

Из данной формулы можно выразить число сочетаний:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Задача

Сколько существует трёхэлементных подмножеств множества $A = \{1,2,3,4,5\}$?

Решение

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{12} = 10$$

Свойства сочетаний

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$

2) $C_n^k = C_n^{n-k}$

3) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

4) $(a+b)^n = C_n^n \cdot a^n \cdot b^0 + C_n^{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \cdots C_n^{n-i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i + \cdots C_n^0 \cdot a^0 \cdot b^n =$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^{n-i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$$

Треугольник Паскаля

$$1 \longrightarrow (x+y)^0 = 1$$

$$1 \quad 1 \longrightarrow (x+y)^1 = x + y$$

$$1 \quad 2 \quad 1 \longrightarrow (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \longrightarrow (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \longrightarrow (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \longrightarrow (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Отношения

Отношение

Отношением R, определенным на паре множеств A и B, называется любое подмножество их декартова произведения $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

$R = \{(a,b)|(a,b) \in A \times B\}$. Если a и b находятся в отношении R, то $(a,b) \in R$ или aRb.

Областью определения отношения R называется совокупность всех таких a, что хотя бы для одного b пара (a,b) принадлежит $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

Областью значений отношения R называют множество всех таких b, что хотя бы для одного элемента а пара (a,b) принадлежит $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

Обратным отношением R^{-1} к отношению $R \subseteq A \times B$ называется множество таких пар $(b,a) \subseteq B \times A$, что $(a,b) \in R$

Пример

$\mathrm{A} \ = \{1, 2, 3\}$

$\mathrm{B} \ = \ \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$R_1 = \{(a, b) | b \ \vdots \ a\} = \{(a, b) | b \bmod a = 0\} =$
$\{(1, 1); \ (1, 2); \ (1, 3); \ (1, 4); \ (1, 5); \ (1, 6); \ (1, 7); \ (2, 2); \ (2, 4); \ (2, 6); \ (3, 3); \ (3, 6)\}$

$R_2 = \{(a, b) | a^2 + b^2 < 15\} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2)\}$

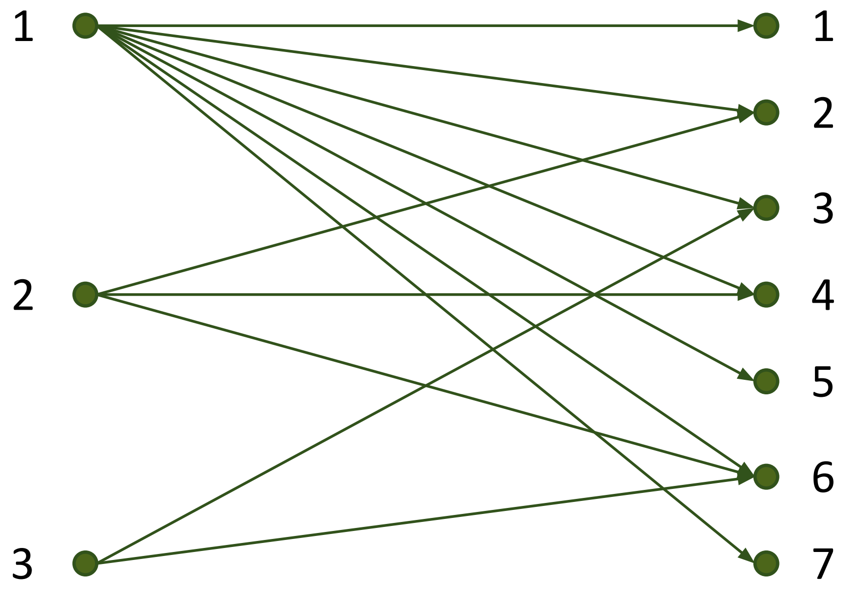
$R_3 = \{(a, b) | NOD(a, b) = 2\} = \{(2,2), (2,4), (2,6)\}$

Пример

$$R_1 = \{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ (1,4);\ (1,5);\ (1,6);\ (1,7);\ (2,2);\ (2,4);\ (2,6);\ (3,3);\ (3,6)\}$$

$= \{(2,2), (2,4), (2,6)\}$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1	0



Обратное отношение

Обратным отношением R^{-1} на $B \times A$ к отношению $R \subseteq A \times B$ называется множество $R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$.

Например:

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{x, y, z\}$,

$R = \{(1, x), (1, z), (2, y), (3, z), (4, x), (4, y)\}$

$R^{-1} = \{(x, 1), (x, 4), (y, 2), (y, 4), (z, 1), (z, 3)\}$

Композиция отношений

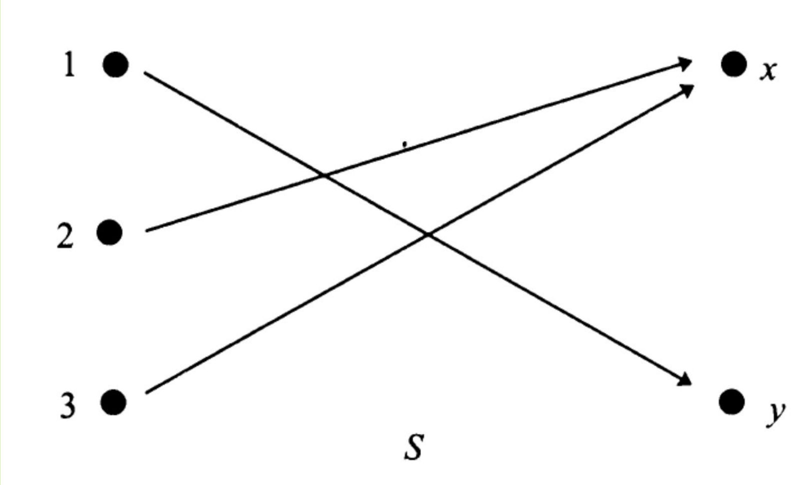
Если $R \subseteq A \times B,\ S \subseteq B \times C$, то композицией R и S называется следующее отношение:

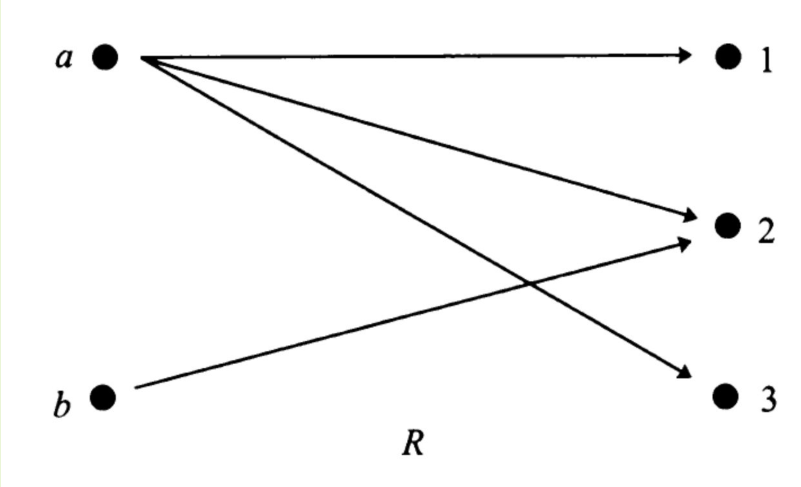
$$S \circ R = \{(a, c) | a \in A, c \in C, \exists b \in B: (a, b) \in R, (b, c) \in S\}.$$

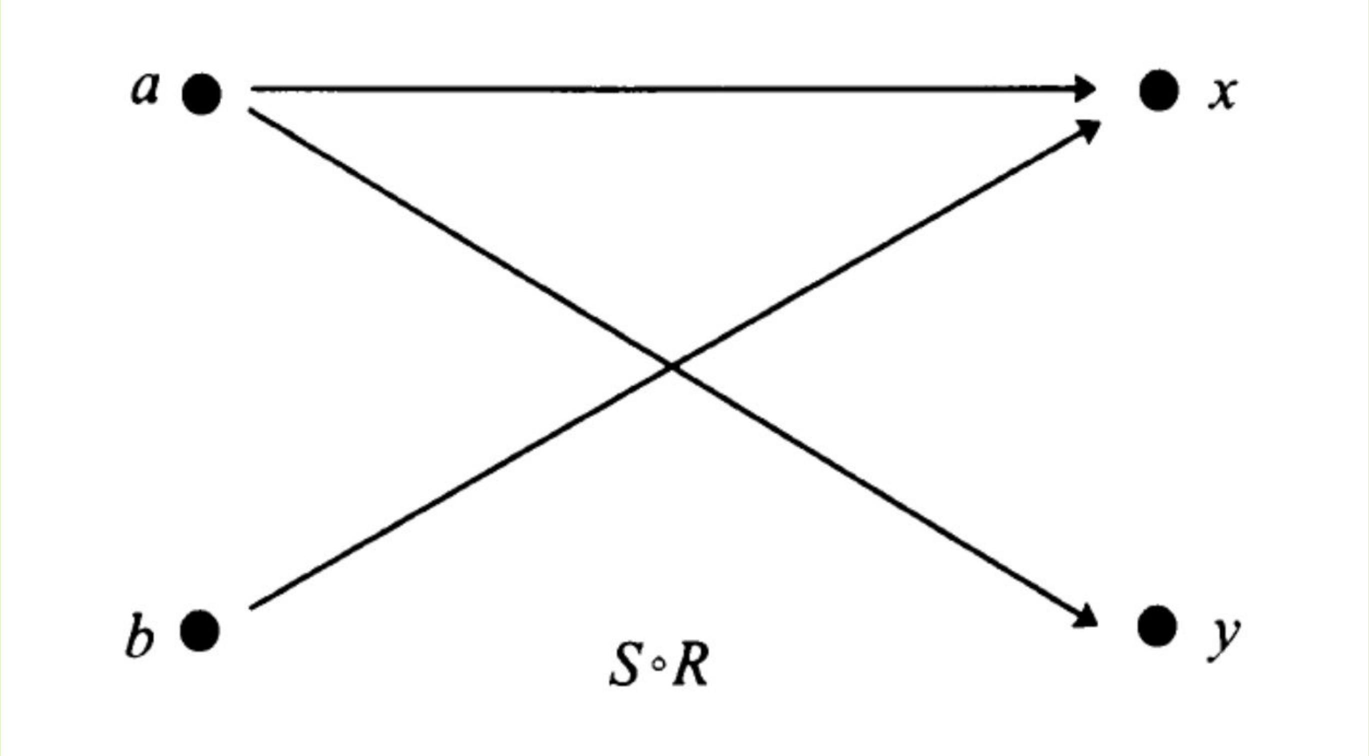
Например:

$R = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 2)\}, S = \{(1, y), (2, x), (3, x)\}.$

$$S \circ R = \{(a, y), (a, x), (b, x)\}$$


1
2
3
x
y
S


a
b
1
2
3
R


a
b
x
y
S∘R

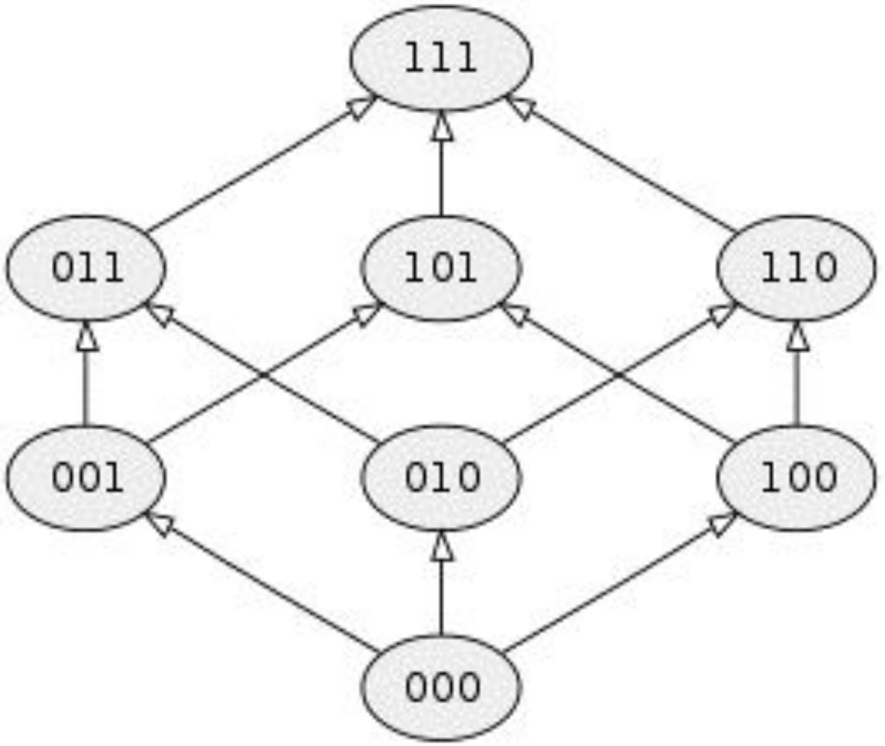
Бинарное отношение и его свойства

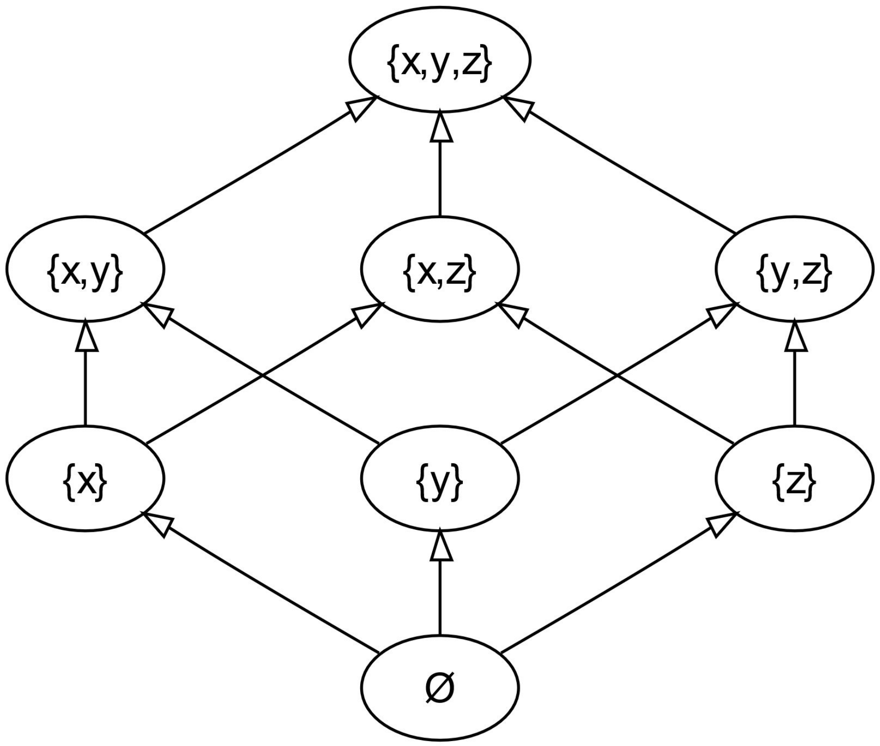
Бинарным отношением называется отношение $R \subseteq A \times A = A^2$.

1. Рефлексивность: $\forall a \in A, (a, a) \in R, \forall a \in A,$
2. Антирефлексивность: $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \Rightarrow a \neq b,$
3. Симметричность: $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R,$
4. Антисимметричность: $\forall a, b \in A, \big((a, b) \in R\big) \wedge \big((b, a) \in R\big) \Rightarrow a = b,$
5. Асимметричность: $\forall a, b \in A, (a, b) \in \mathrm{R} \Rightarrow (b, a) \notin R,$
6. Транзитивность: $\forall a, b \in A, \big((a, b) \in R\big) \wedge \big((b, c) \in \mathrm{R}\big) \Rightarrow (a, c) \in R,$
7. Антитранзитивность: $\forall a, b \in A, \big((a, b) \in R\big) \wedge \big((b, c) \in \mathrm{R}\big) \Rightarrow (a, c) \notin R,$
8. Связность: $\forall a, b \in A \Rightarrow \big((a, b) \in R\big) \vee \big((b, a) \in R\big).$

Виды отношений

1. Эквивалентности — рефлексивное, симметричное, транзитивное:
   a) равенство чисел,
   b) равномощность множеств,
   c) параллельность прямых.
2. Нестрогого (частичного) порядка — рефлексивное, антисимметричное, транзитивное:
   a) отношения больше или равно, меньше или равно для чисел,
   b) отношение предшествования на наборах булевых значений,
   c) отношение несобственного подмножества для подмножеств $\mathbb{U}$,
   d) отношение делимости на множестве натуральных чисел.
3. Строгого порядка — антирефлексивное, асимметричное, транзитивное:
   a) отношения больше и меньше для чисел,
   b) лексикографический порядок слов в словаре.





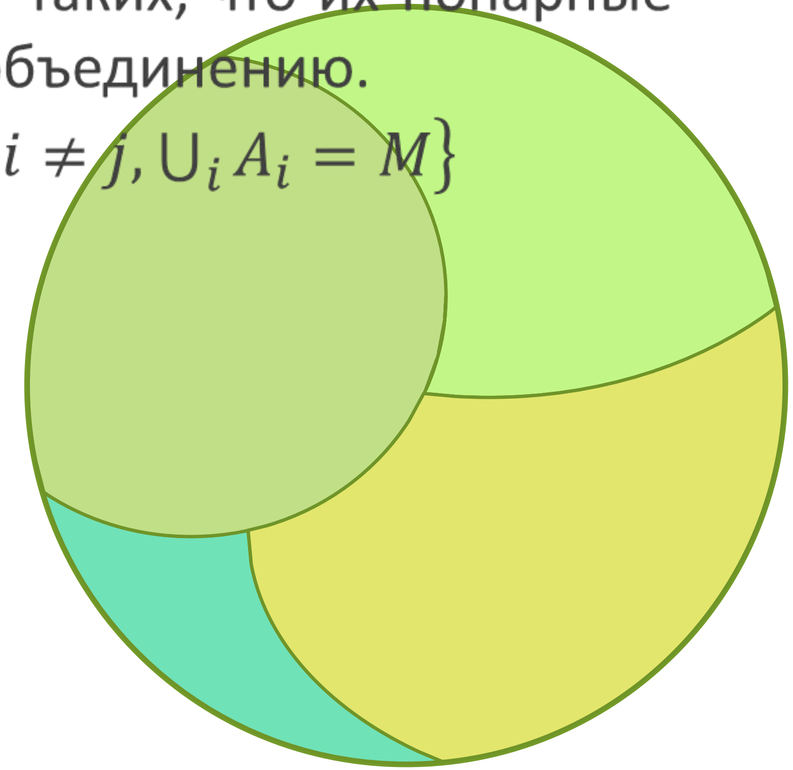
Пример

Разбиение множества

Для некоторого множества M разбиением называется некоторое множество $\{A_i\}$ его непустых подмножеств $A_i \subseteq M$ таких, что их попарные пересечения пусты, а само множество M равно их объединению.

$$A(M) = \{A_i | A_i \in \mathcal{B}(A), A_i \neq \emptyset, A_i \cap A_j = \emptyset : i \neq j, \cup_i A_i = M\}$$

A_i – класс разбиения, блок разбиения.



Фактор-множество

Если на множестве A задано отношение эквивалентности, то оно оно разбивает множество на классы эквивалентности. Класс эквивалентности, порождённый элементом a: $[a]_R = \{x \in A | (x, a) \in R\}$.

Фактор-множеством по отношению R называется множество A_R всех классов эквивалентности.

Отображения (функции)

Отображение (функция)

Отображением, или функцией $f: X \to Y$ называется такое подмножество множества $X \times Y$, что для любых пар $(x', y') \in f$, $(x'', y'') \in f$ из условия $y' \neq y''$ следует, что $x' \neq x''$. То есть каждому элементу из множества X сопоставлено не более одного элемента множества Y. Если каждому элементу множества X сопоставлен элемент из Y, то функция называется полностью определённой, иначе – частично определённой.

Для пары (x, y):

x – аргумент функции, или праобраз y,

y – значение функции, или образ x.

$D(f)$ - область определения функции (domain) – множество всех праобразов элементов множества Y.

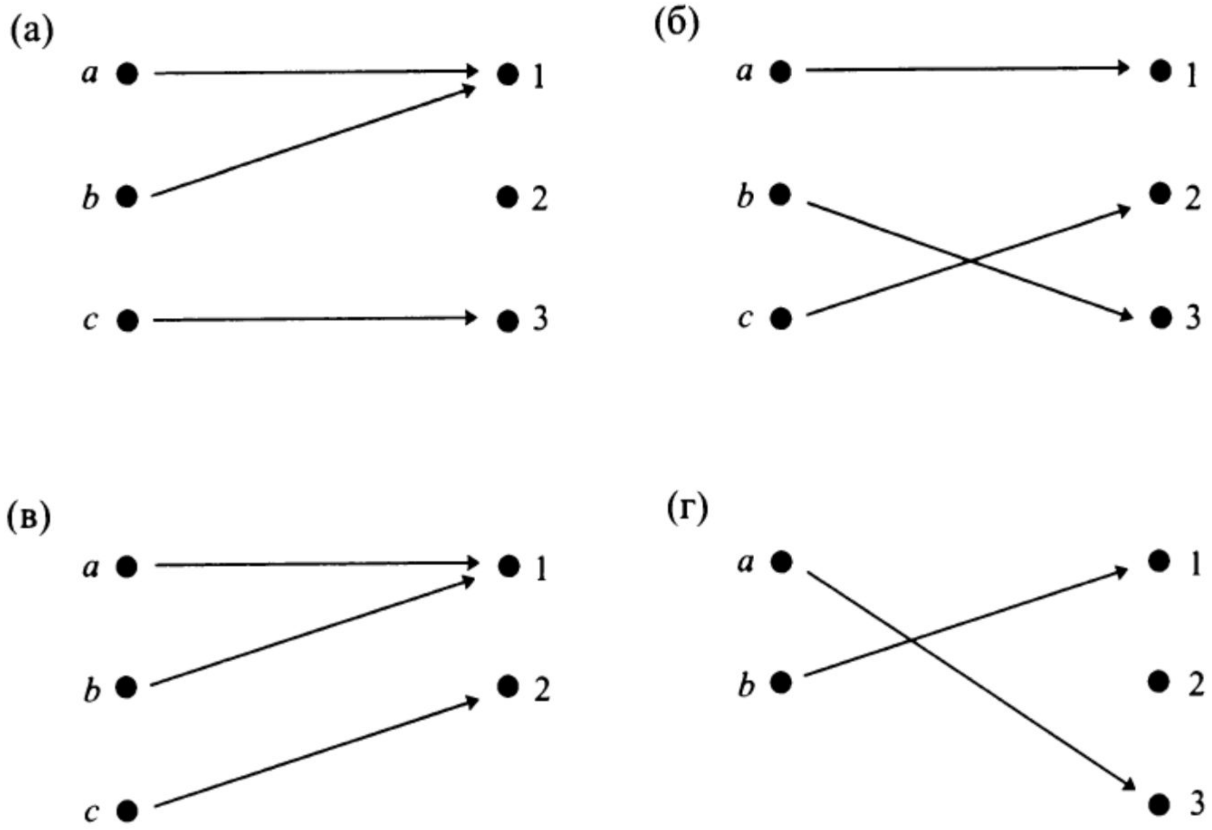
$E(f)$ - область значений функции (range) – множество всех образов элементов множества X.

Инъекция, сюръекция, биекция

Если при отображении $f: X \to Y$ область значений $E(f)$ совпадает с множеством Y, то отображение называется сюръективным (отображением "на").

Если при отображении $f: X \to Y$ различным элементам множества X соответствуют различные элементы множества Y $\left(x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x'')\right)$, то отображение называется инъективным (отображением "в").

Если отображение одновременно инъективно и сюръективно, то его называют биективным.



Пример

Обратная функция

Если отношение $f^{-1}\colon Y \to X$, является отображением (функцией), то она называется обратной функцией, а функция f – обратимой.

ТЕОРЕМА. Если функция $f\colon X \to Y$ является биекцией, то обратное отношение f^{-1} является функцией из Y в X, причём биективной.

ТЕОРЕМА. Если $f\colon X \to Y$ — биекция, то

a) $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ для $\forall y \in Y$;

b) $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ для $\forall x \in \mathrm{X}$.

Композиция функций

Если заданы функции $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$, то их композицией также является функция $g \circ f: X \to Z$.

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Бесконечные множества

Конечные и бесконечные множества

КОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО

- Множество, количество элементов которого конечно.
- Множество, мощность которого равна мощности множества $\{x \mid 1 \leq x \leq n, n \in \mathbb{N}\}$.

БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО

- Множество, не являющееся конечным.
- Множество, мощность которого не меньше мощности множества натуральных чисел.
- Множество, для которого существует биекция с некоторым его собственным подмножеством.

Равномощность множеств

Множества A и B называются равномощными, если существует биективное (взаимно-однозначное) отображение множества A на множество B.

Отношение равномощности множеств является отношением эквивалентности (обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности).

Бесконечные множества

СЧЁТНОЕ МНОЖЕСТВО

- Бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами.
- Множество, для которого можно задать биекцию с множеством натуральных чисел.
- Бесконечное множество, равномощное множеству натуральных чисел.

Мощность множества обозначается $\aleph_0$.

НЕСЧЁТНОЕ МНОЖЕСТВО

КОНТИНУАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО (КОНТИНУУМ)

- Бесконечное множество, превосходящее по мощности счётное.
- Множество, для которого можно установить биекцию с множеством действительных чисел.
- Бесконечное множество, мощность которого эквивалентна мощности множества действительных чисел.

Континуумом также называется мощность данного множества $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$

Мощность множества

- Класс эквивалентности по отношению равномощности.

Специальные функции

Перестановка – биективная функция на некотором множестве ($f: A \to A$).

Функционал – отображение между множеством функций и множеством чисел (функционал качества).

Оператор – отображение между двумя множествами функций.

Бинарная операция

Бинарной операцией на множестве S называется функция $f: S \times S \to S$.

Бинарная операция обладает свойством замкнутости: $a, b \in A \Rightarrow f(a, b) \in S$.

Универсальная алгебра

Универсальной алгеброй $\mathcal{G}$ называется некоторое множество S, называемое *носителем* алгебры, с определённым на нём множеством операций F – *сигнатурой* данной алгебры ($\mathcal{G} = (S, F)$).

Универсальная алгебра, сигнатура которой состоит из единственной бинарной операции называется *группоидом.*

Полугруппа

Множество S с введённой на нём ассоциативной бинарной операцией (группоид) $(a * b) * c = a * (b * c)$ называется *полугруппой* (S,∗).

Если для $\forall a, b \in S$ выполняется свойство коммутативности: $a * b = b * a$, то полугруппа называется *абелевой*, или *коммутативной*.

Полугруппа, содержащая нейтральный элемент ($\exists e \in S$: $a * e = e * a = a$), называется *моноидом* (S^1).

Группа

Если для полугруппы выполнены условия:

1) ассоциативности: $(a * b) * c = a * (b * c)$,
2) наличие нейтрального элемента: $\exists e \in S : \forall a \in S \ (e * a = a * e = a)$,
3) наличие обратного элемента: $\forall a \in S \Rightarrow \exists a^{-1} \in S : (a * a^{-1} = a^{-1} * a = e)$,

то она называется *группой*.

Если выполняется условие коммутативности, то группа называется абелевой.

Пример 1

Сигнатура: $\mathcal{B}(M), M = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

Бинарная операция: $\cup$

Ассоциативность:

Коммутативность:

Нейтральный элемент: $\emptyset$

Обратный элемент:

Пример 2

Сигнатура: Множество матриц действительных чисел размерности 2×2.

Бинарная операция: $\cdot$

Ассоциативность: ✓

Коммутативность: ✗

Нейтральный элемент: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Обратный элемент: ✓

Пример 3

Сигнатура: $S = \{i, -i, 1, -1\}$.

Бинарная операция: $\cdot$

Ассоциативность:

Коммутативность:

Нейтральный элемент: 1

Обратный элемент:

Пример 4

Сигнатура: $\mathbb{N}$

Бинарная операция: a^b

Ассоциативность: $\otimes$

Коммутативность: $\otimes$

Нейтральный элемент: $\otimes$

Обратный элемент: $\otimes$

Пример 5

Сигнатура: $\mathbb{Z}$

Бинарная операция: $+$

Ассоциативность: $\checkmark$

Коммутативность: $\checkmark$

Нейтральный элемент: 0

Обратный элемент: $\checkmark$

Операции коммутативной группы

	АДДИТИВНАЯ	МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ
Обозначение операции:	$+ \quad (a+b)$	$\cdot \quad (a \cdot b,\ ab)$
Нейтральный элемент:	$0 \quad (a+0=0+a=a)$	$1 \quad (a \cdot 1 = 1 \cdot a = a)$
Противоположный элемент:	$-a\ (-a+a=a+(-a)=0)$	$a^{-1}\ (a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1)$

Кольцо

Кольцом называется множество S с введёнными на нём аддитивной ($+$) и мультипликативной ($\cdot$) бинарными операциями и выполняющимися условиями:

1) Относительно операции $+$ множество является абелевой группой,
2) Операция $\cdot$ коммутативна ($a \cdot b = b \cdot a$),
3) Выполняются законы дистрибутивности:
$$\forall a, b, c \in S \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Пример 1

Сигнатура: Множество матриц действительных чисел размерности 2×2.

Бинарные операции: $+, \cdot$

Ассоциативность $+$: ✓

Коммутативность $+$: ✓

Нейтральный элемент, относительно $+$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Обратный элемент, относительно $+$: $-\left[\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}\right.$

Дистрибутивность:

$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C,$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Поле

Если кольцо имеет мультипликативный нейтральный элемент (единицу), оно называется *кольцом с единицей*.

Если операция умножения коммутативна, кольцо называется *коммутативным*.

Коммутативное кольцо называется *полем*, если его ненулевые элементы образуют группу, относительно операции умножения.

Примеры

1) Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с операциями $+, \cdot$.

2) Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с операциями $+, \cdot$.

3) Множество $\mathbb{B}^2 = \{0,1\}$ с операциями $\oplus, \wedge$.

Источники

- Аляев Ю. А., Тюрин С. Ф. Дискретная математика и математическая логика.
- Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.
- Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1.
- Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов.
- Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов.