

Множества

Источники

- Аляев Ю. А., Тюрин С. Ф. Дискретная математика и математическая логика.
- Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.
- Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1.
- Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов.
- Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов.

Множество

➤ Совокупность элементов, объединённых общим свойством, но различимых между собой.

- Множество книг на полке
- Множество цифр
- Множество действительных чисел (\mathbb{R})
- Множество непрерывных функций

Условные обозначения

- A, B, \dots – Множества обозначаются заглавными латинскими буквами
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – Числовые множества
- a, b, \dots - Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами
- $x \in M$ – Означает, что x является элементом множества M (принадлежит M)
- $x \notin M$ – Означает, что x не является элементом множества M

Способы задания множества

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕМ

$$M = \{a, b, d, f\}$$

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{1, 2, \dots, 100\}$$

$$Q = \{1, 4, 9, \dots, n^2, \dots\}$$

$$X = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$$

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ СВОЙСТВОМ

$$M = \{x: P(x)\} \qquad M = \{x \mid P(x)\}$$

$$Q = \{x: x = n^2, n \in \mathbb{N}\}$$

$$Q = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$P = \{n \mid n - \text{натуральное число, меньше 9}\}$$

$$Y = \{y \mid y = \sin(x), x \in [-\pi, \pi]\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Круги Эйлера

- Схематичное изображение множеств и подмножеств

$$A = \{1,2,4\}, B = \{4,5,6,7\}, C = \{3,8\}, D = \{5,6\}$$



Подмножество

- Каждый элемент множества B является элементом множества A
- $B \subseteq A$ B включено в A , B является подмножеством A

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}, B = \{1, 3, 7\}, C = \{2, 5, 6, 8\}$$

$$B \subseteq A, C \subseteq A$$

$$D = \{2, 5, 6, 8\}$$

$$D \subseteq A, D \subseteq C, C \subseteq D$$

Собственное подмножество

- Каждый элемент множества B является элементом множества A , в множестве A присутствуют элементы, которых нет в B
- $B \subset A$ B полностью включено в A , B является собственным подмножеством A

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}, B = \{1, 3, 7\}, C = \{2, 5, 6, 8\}$$

$$B \subset A, C \subset A$$

$$D = \{2, 5, 6, 8\}$$

$$D \subset A, D \not\subset C, C \not\subset D$$

Задачи

Какие из отношений верны для A и C ? $A \subseteq C, C \subseteq A, A \subset C, C \subset A$?

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow$$

$$A \subseteq C$$

$$A \subset B, B \subseteq C \Rightarrow$$

$$A \subset C, A \subseteq C$$

$$A \subseteq B, B \subset C \Rightarrow$$

$$A \subset C, A \subseteq C$$

$$B \subset A, C \subset B \Rightarrow$$

$$C \subset A, C \subseteq A$$

Равенство множеств

➤ Равными называются множества, содержащие одни и те же элементы

➤ Если $A \subseteq B$, и $B \subseteq A$, то $A = B$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}, \quad B = \{1, 3, 7\}, \quad C = \{2, 5, 6, 8\}, \quad D = \{2, 5, 6, 8\}$$

$$C = D$$

Задачи

Какие из отношений верны для A и D ? $A \subseteq D, D \subseteq A, A \subset D, D \subset A, A = D$?

$$A \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq A, D \subseteq C \Rightarrow \\ D \subseteq A$$

$$A \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq A, D \subseteq C, C \subseteq D \Rightarrow \\ A \subseteq D, D \subseteq A, A = D$$

$$A \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq B, D \subseteq C \Rightarrow \\ A ? D$$

$$A \subseteq B, B \in C, C \subseteq D \Rightarrow \\ A ? D$$

Универсальное множество \mathbb{U} (Универсум)

- Множество, содержащее все объекты, рассматриваемые в некотором разделе математики, или при решении некоторой задачи
- Такое множество, подмножествами которого являются все рассматриваемые множества

\mathbb{C} – универсальное в комплексном анализе

$\mathbb{B} = \{0,1\}$ – универсальное для алгебры логики

Современный латинский алфавит – универсальное множество для слов английского языка

Пустое множество \emptyset

- Множество, не содержащее ни одного элемента
- Является подмножеством любого множества

$$M = \{x \mid x < 0, x \in \mathbb{N}\}$$

$$X = \{x \mid x^2 = -1, x \in \mathbb{N}\}$$

$$Y = \{\}$$

$$Z = \{x \mid x - \text{название дня недели, содержащее букву 'м'}\}$$

Мощность (конечного) множества

➤ Количество элементов данного множества

$$|A| = |\{5,8,2\}| = 3$$

$$|\emptyset| = 0$$

$$|\{\emptyset, \{\emptyset\}\}| = 2$$

Булеан множества

➤ Множество всех подмножеств

$$\mathcal{P}(A) = 2^A = \mathcal{B}(A) = \{M \mid M \subseteq A\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{B}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$|\mathcal{B}(A)| = |2^A| = 2^{|A|}$$

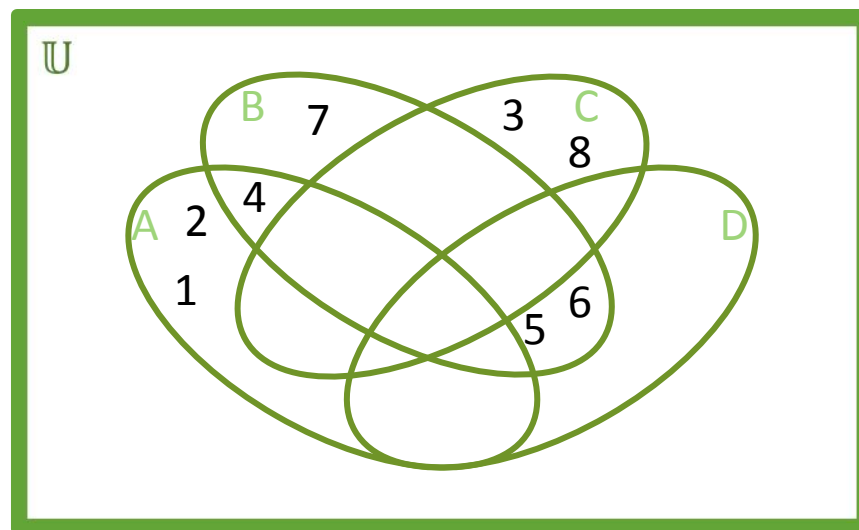


Действия над множествами

Диаграммы Венна (Эйлера-Венна)

- Схематичное изображение всех возможных отношений нескольких подмножеств универсального множества

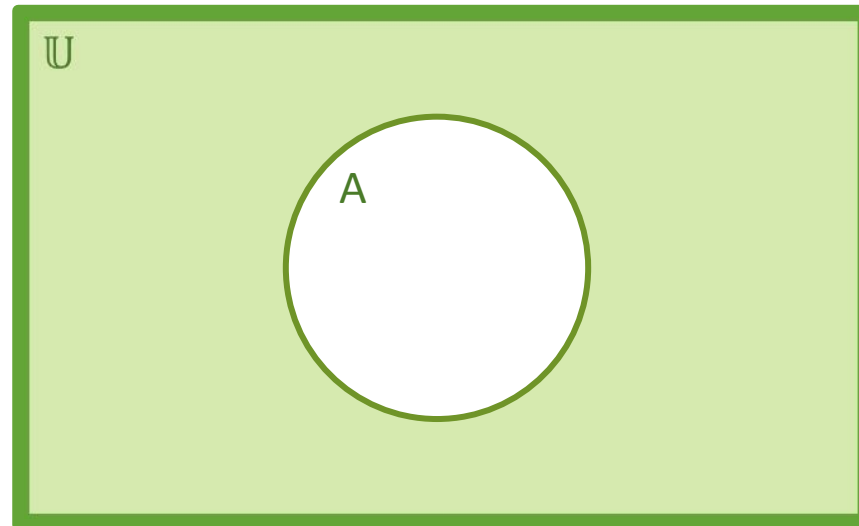
$$A = \{1,2,4\}, B = \{4,5,6,7\}, C = \{3,8\}, D = \{5,6\}$$



Дополнение множества

➤ Множество тех элементов универсального множества, которые не принадлежат множеству A

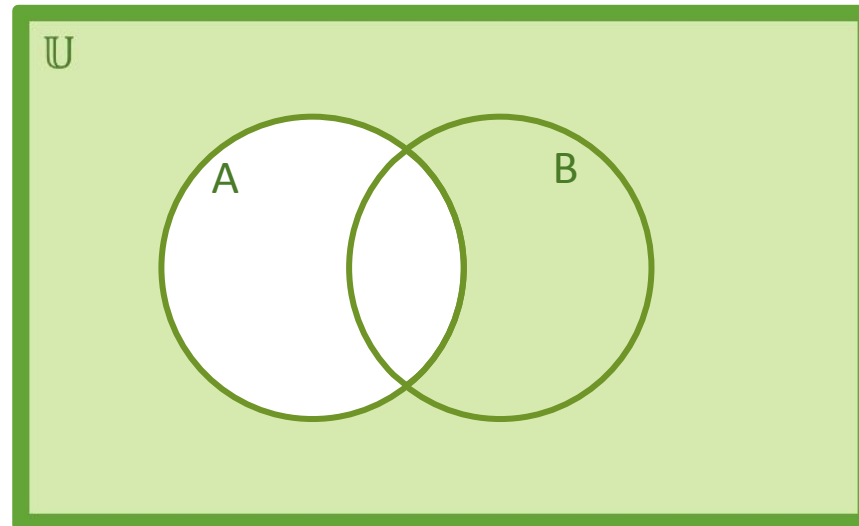
➤ $\bar{A} = \{x \mid (x \in \mathbb{U}) \wedge (x \notin A)\}$



Дополнение множества

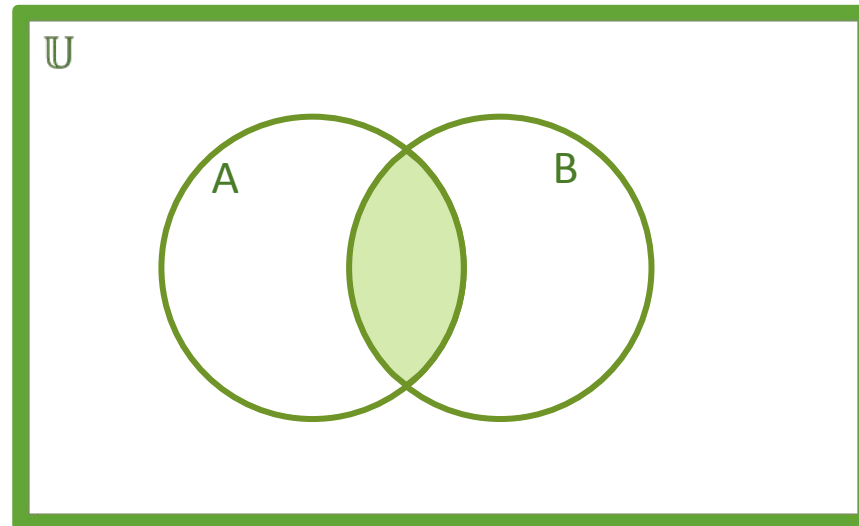
➤ Множество тех элементов универсального множества, которые не принадлежат множеству A

➤ $\bar{A} = \{x \mid (x \in \mathbb{U}) \wedge (x \notin A)\}$



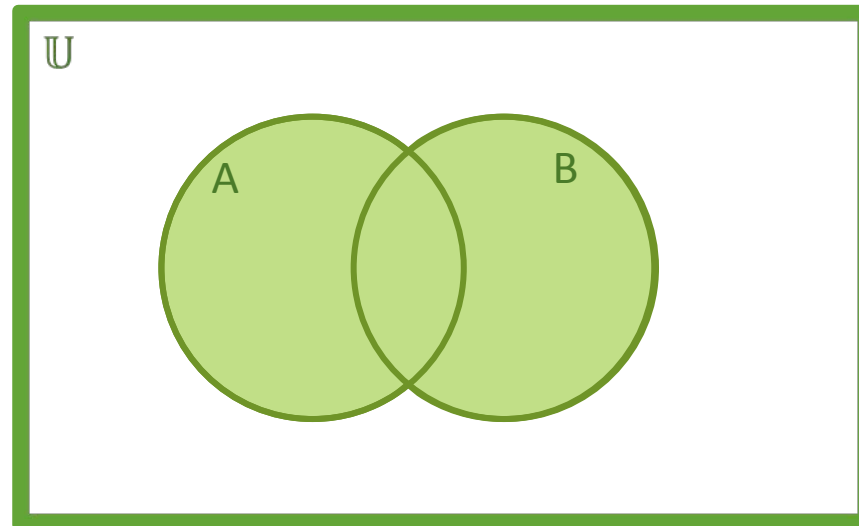
Пересечение множеств

- Множество содержащее только те элементы, что принадлежат одновременно множествам A и B
- $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$



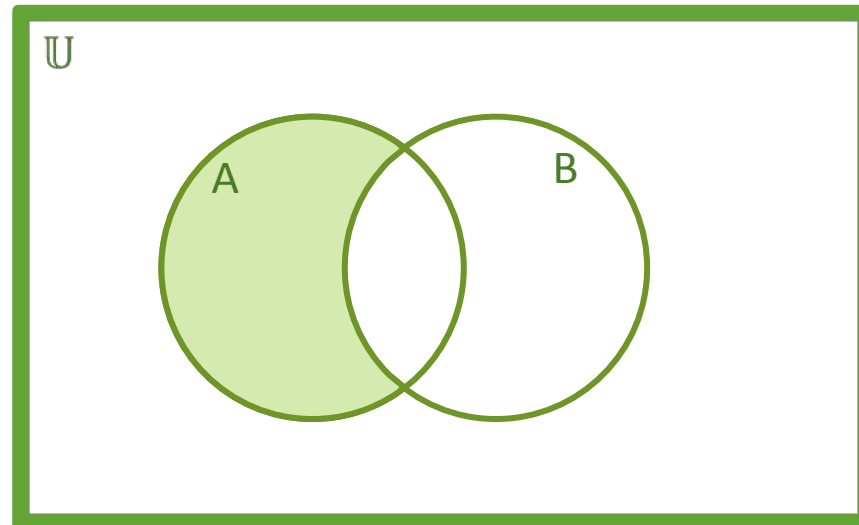
Объединение множеств

- Множество содержащее все элементы, что принадлежат хотя бы одному из множеств A или B
- $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$



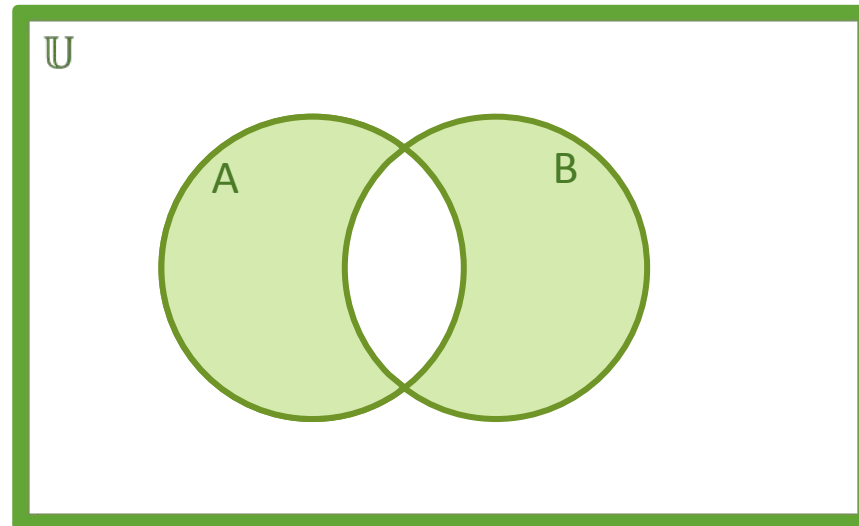
Разность множеств

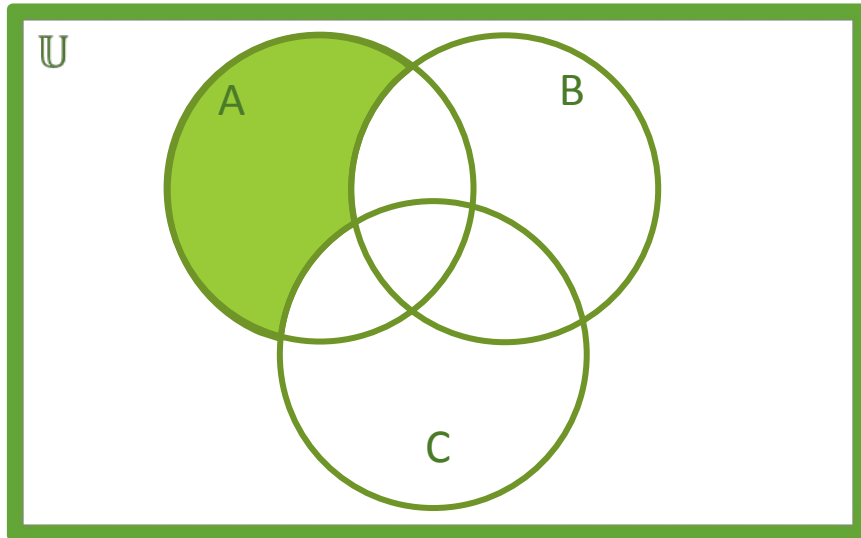
- Множество тех элементов первого множества, что не содержатся во втором множестве
- $A \setminus B = A - B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \cap \bar{B}$



Симметрическая разность множеств

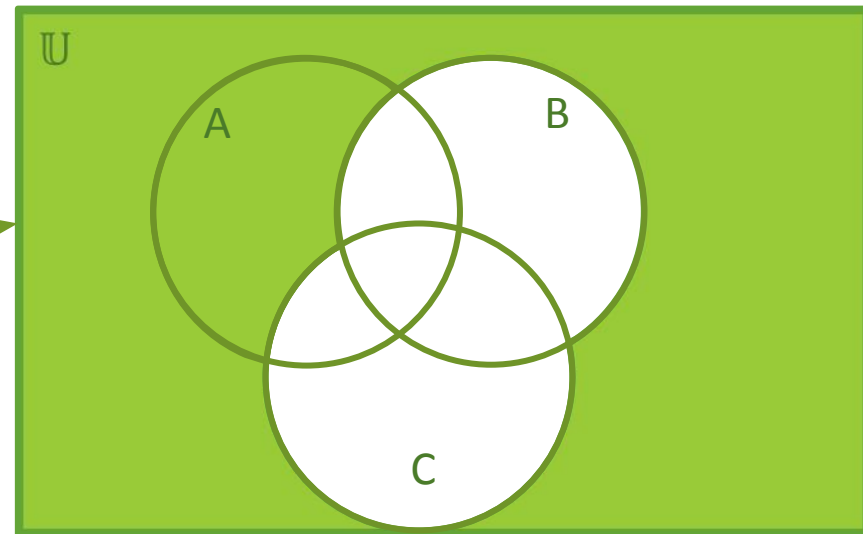
- Множество тех элементов универсума, что содержатся только в A или только в B
- $A \Delta B = A \dot{\cup} B = \{x \mid (x \in A \setminus B) \wedge (x \in B \setminus A)\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$





Эта область соответствует множеству
 $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)}$

А множеству $\overline{B \cup C}$ соответствует



Выполняемые тождества

- Коммутативность операций

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \Delta B = B \Delta A$$

- Ассоциативность операций

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

- Дистрибутивность операций

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Поглощение

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

- Двойное дополнение

$$\overline{\overline{A}} = A$$

- Идемпотентность

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

- Законы де Моргана

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

- Свойства пустого множества

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

- Свойства универсального множества

$$A \cap \mathcal{U} = A$$

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

- Свойства дополнения

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$$

$$\overline{\overline{A}} = \mathcal{U} \setminus A$$

Кортеж

Кортежем (вектором, упорядоченным множеством) называется упорядоченная последовательность элементов (a_1, a_2, \dots, a_n) (или $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$), где $a_i \in A_i$.

a_i называется i компонентой (кортежа) вектора, или проекцией вектора на ось i .

Упорядоченную пару элементов можно представить как:

$$(a_1, a_2) = \{a_1, \{a_1, a_2\}\}$$

Декартово произведение множеств

Декартовым (прямым) произведением двух множеств называется множество упорядоченных пар элементов данных множеств

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Свойства:

$$A \times B \neq B \times A$$

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

$$A \times \emptyset = \emptyset$$

$$(A \times B) \times C \leftrightarrow A \times (B \times C)$$

Степень множества

Определим по индукции:

$$A^1 = A$$

$$A^n = A \times A^{n-1} = A^{n-1} \times A$$

Нулевая степень определяется как:

$$A^0 = \emptyset$$

Мощность:

$$|A^n| = |A|^n$$

Пример

$$A = \{a_1, a_2\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$$

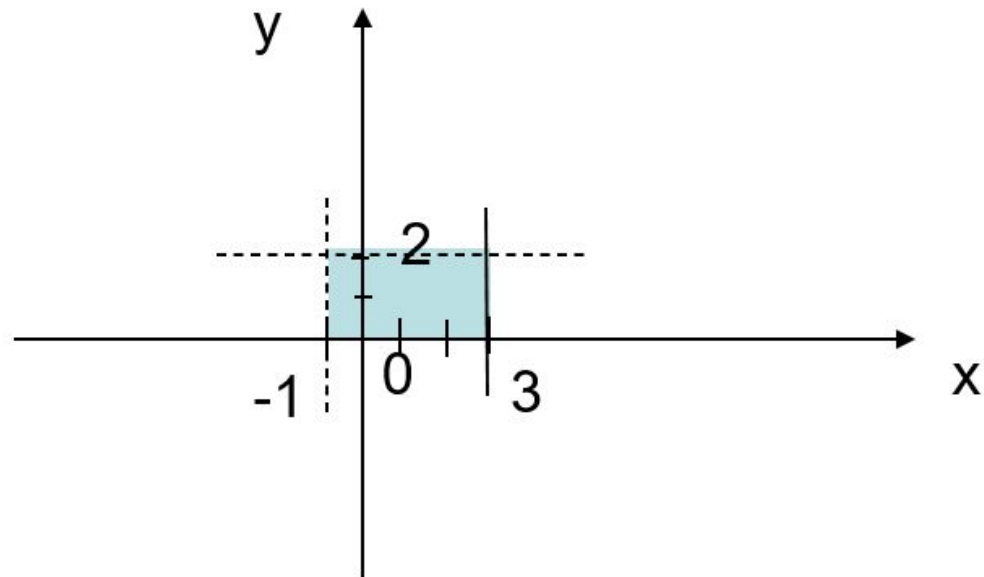
$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 3 = 6$$

$$A^2 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2)\}$$

$$|A^2| = |A|^2 = 2^2 = 4$$

Изображение декартова произведения

$$(-1;3] \times [0;2)$$



Свойства относительно операций над множествами

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

3. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

4. $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$

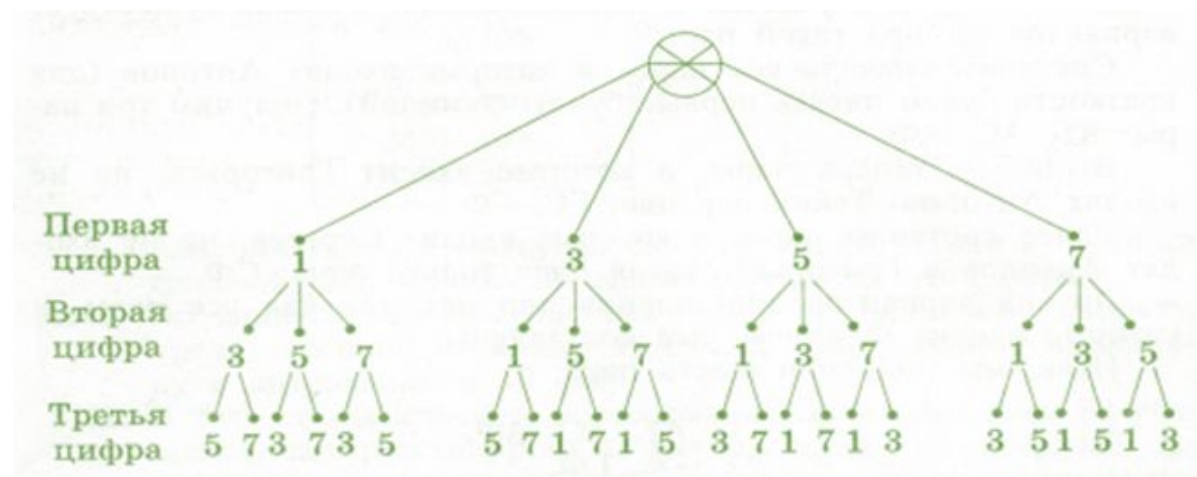
Комбинаторика

Источники

- Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.
- Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. Комбинаторика

Дерево (граф) ВОЗМОЖНЫХ вариантов

Пример: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5 и 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?



Правила суммы и произведения

Правило суммы.

Если объект x может быть выбран n способами, а объект y – другими t способами, то выбор «либо x , либо y » можно сделать $n + t$ способами.

Правило произведения.

Если объект x может быть выбран n способами и после каждого из таких выборов объект y в свою очередь может быть выбран t способами, то выбор упорядоченной пары $\langle x, y \rangle$, можно сделать $n \cdot t$ способами.

Правило суммы

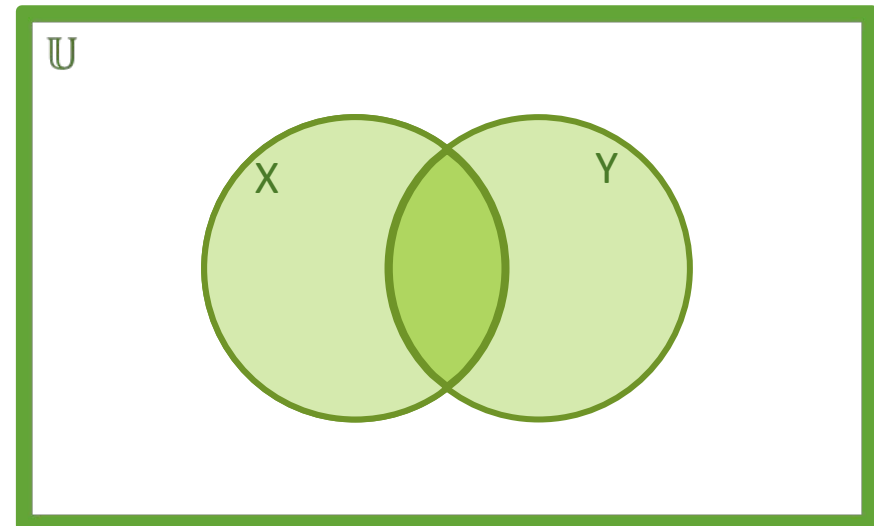
Пусть даны множества X и Y , $X \cap Y = \emptyset$. Сколькими способами может быть выбран объект из множества $X \cup Y$?

$$|X| + |Y|$$

Пусть даны множества X и Y . Сколькими способами может быть выбран объект из множества $X \cup Y$?

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$



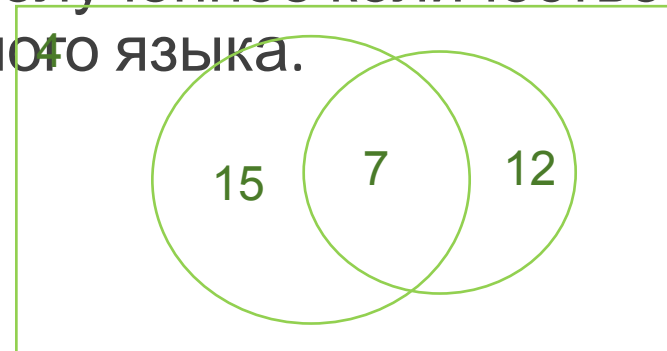
Задача

В группе 24 человека. Из них 15 человек изучают английский язык, 12 – немецкий язык, 7 – оба языка. сколько человек не изучают ни одного языка?

Решение.

По принципу сложения получим количество людей, изучающих английский или немецкий: $15+12-7=20$.

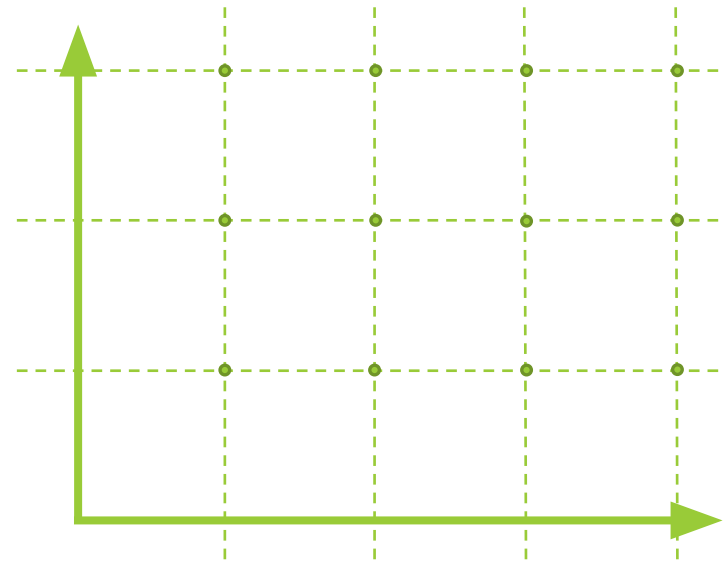
Из общего числа студентов вычтем полученное количество людей: $24-20=4$. 4 человека не изучает ни одного языка.



Правило произведения

Пусть $|X| = n$, $|Y| = m$. Сколькими способами может быть выбран объект из множества $X \times Y$?

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$$



Выборка

Подмножество $X_i = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ из множества X называется выборкой объема k из n элементов.

Выборка называется **упорядоченной**, если порядок следования элементов в ней задан. Если порядок следования элементов в выборке не является существенным, то выборка называется **неупорядоченной**.

Упорядоченная выборка называется **размещением**, неупорядоченная – **сочетанием**.

В выборках могут допускаться или не допускаться повторения элементов.

Перестановкой называется упорядоченная выборка объема n из n элементов.

Число перестановок

Сколькими способами можно упорядочить множество из n элементов?

Первый элемент можно выбрать n способами, второй – $n - 1$ и т. д.

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Задача

Сколько существует чисел, составленных из цифр 2, 5, 8 таким образом, чтобы в числе все цифры присутствовали ровно один раз?

Решение

$$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Число размещений

$$A_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Задача

Сколько различных четырехзначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, ..., 9, если все цифры в каждом четырехзначном числе различны?

Решение

Для формирования каждого четырехзначного числа выбираем четыре цифры из девяти, поэтому существует

$$A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 3024$$

Число сочетаний

Составим все сочетания из n элементов по k . Каждое из полученных сочетаний можно упорядочить $k!$ способами. Отсюда число размещений выражается через число сочетаний следующим образом:

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k$$

Из данной формулы можно выразить число сочетаний:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Задача

Сколько существует трёхэлементных подмножеств множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Решение

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{12} = 10$$

Свойства сочетаний

$$1) C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$2) C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$3) C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$

$$4) (a + b)^n = C_n^n \cdot a^n \cdot b^0 + C_n^{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \dots C_n^{n-i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i + \dots C_n^0 \cdot a^0 \cdot b^n =$$

$$= \sum_{i=0}^n C_n^{n-i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$$

Треугольник Паскаля

$$1 \rightarrow (x + y)^0 = 1$$

$$1 \quad 1 \rightarrow (x + y)^1 = x + y$$

$$1 \quad 2 \quad 1 \rightarrow (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \rightarrow (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \rightarrow (x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \rightarrow (x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$



Отношения

Отношение

Отношением R , определенным на паре множеств A и B , называется любое подмножество их декартова произведения $A \times B$.

$R = \{(a, b) | (a, b) \in A \times B\}$. Если a и b находятся в отношении R , то $(a, b) \in R$ или aRb .

Областью определения отношения R называется совокупность всех таких a , что хотя бы для одного b пара (a, b) принадлежит $A \times B$.

Областью значений отношения R называют множество всех таких b , что хотя бы для одного элемента a пара (a, b) принадлежит $A \times B$.

Обратным отношением R^{-1} к отношению $R \subseteq A \times B$ называется множество таких пар $(b, a) \subseteq B \times A$, что $(a, b) \in R$

Пример

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$R_1 = \{(a, b) | b : a\} = \{(a, b) | b \bmod a = 0\} = \\ \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (1, 7); (2, 2); (2, 4); (2, 6); (3, 3); (3, 6)\}$$

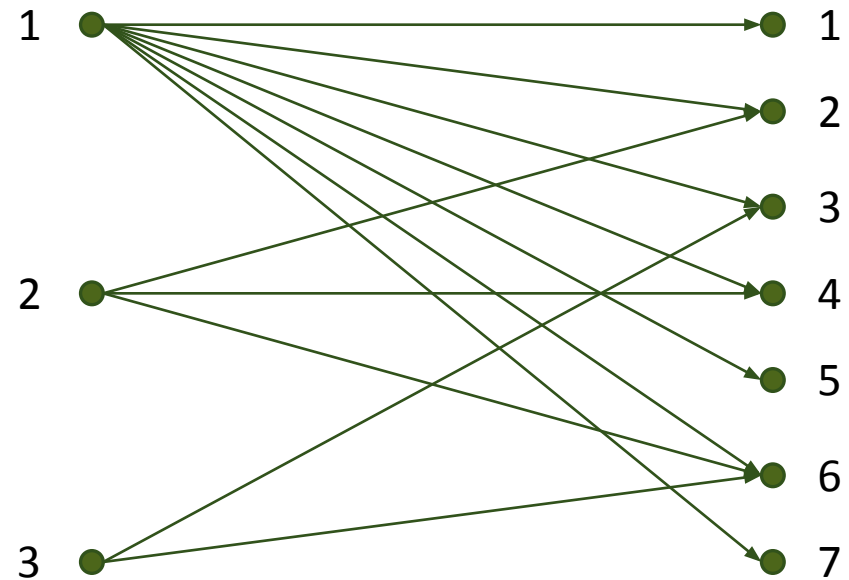
$$R_2 = \{(a, b) | a^2 + b^2 < 15\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$R_3 = \{(a, b) | \text{NOD}(a, b) = 2\} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6)\}$$

Пример

$$R_1 = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (1, 7); (2, 2); (2, 4); (2, 6); (3, 3); (3, 6)\}$$
$$= \{(2, 2), (2, 4), (2, 6)\}$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1	0



Обратное отношение

Обратным отношением R^{-1} на $B \times A$ к отношению $R \subseteq A \times B$ называется множество $R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$.

Например:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{x, y, z\},$$

$$R = \{(1, x), (1, z), (2, y), (3, z), (4, x), (4, y)\}$$

$$R^{-1} = \{(x, 1), (x, 4), (y, 2), (y, 4), (z, 1), (z, 3)\}$$

КОМПОЗИЦИЯ ОТНОШЕНИЙ

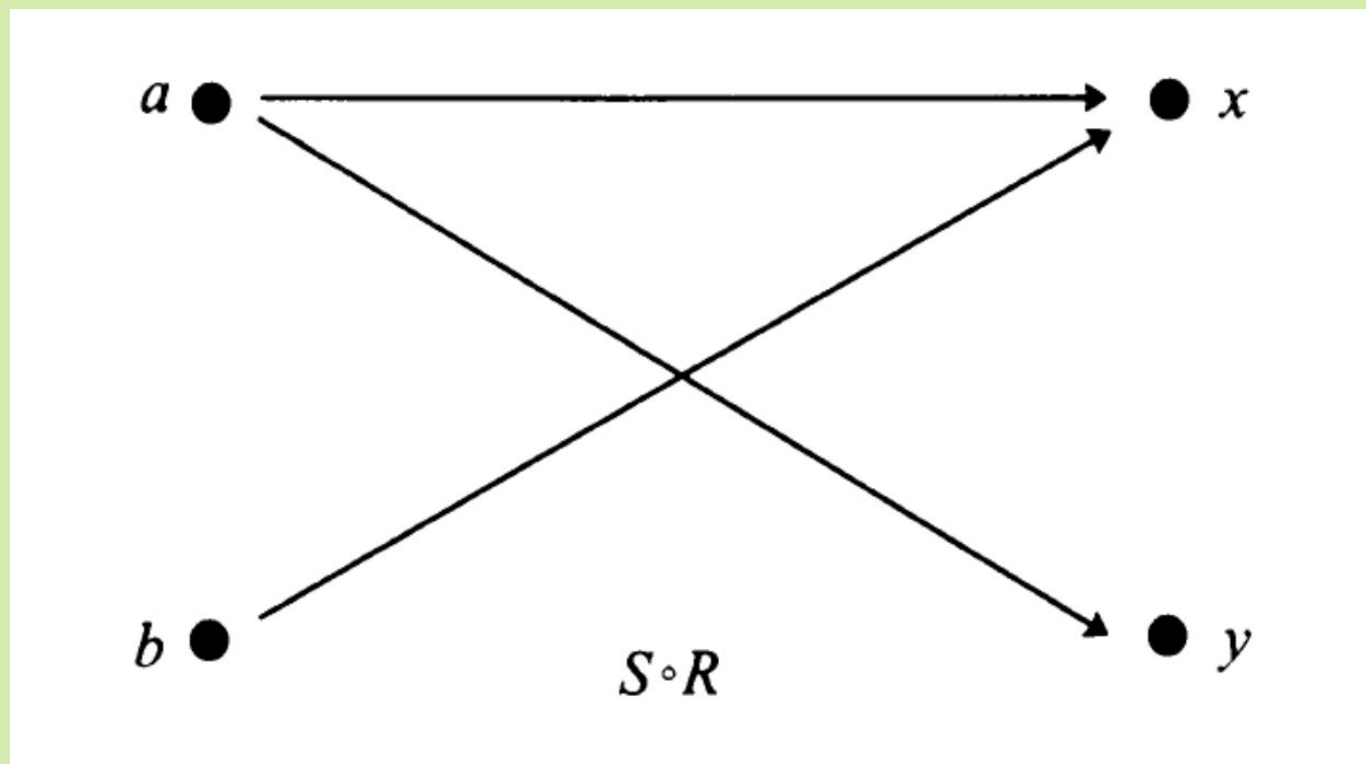
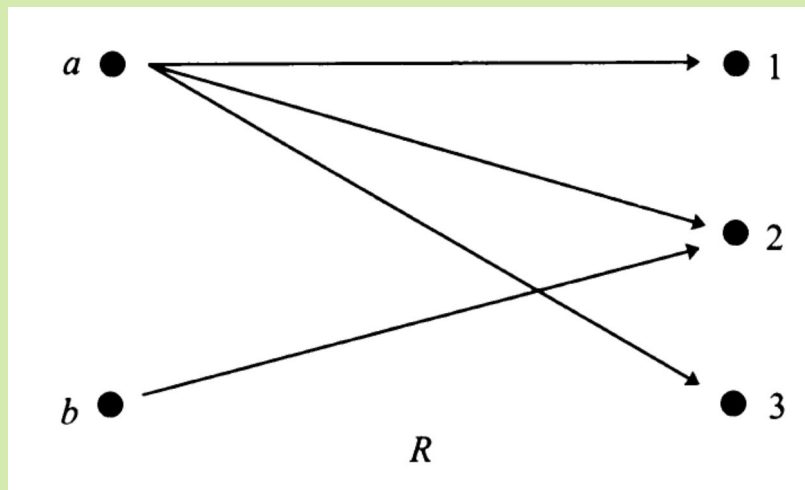
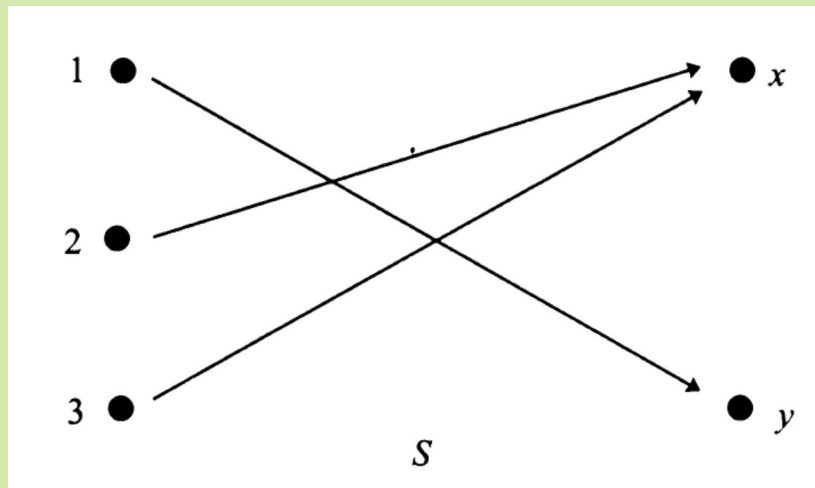
Если $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, то композицией R и S называется следующее отношение:

$$S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \exists b \in B: (a, b) \in R, (b, c) \in S\}.$$

Например:

$$R = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 2)\}, S = \{(1, y), (2, x), (3, x)\}.$$

$$S \circ R = \{(a, y), (a, x), (b, x)\}$$



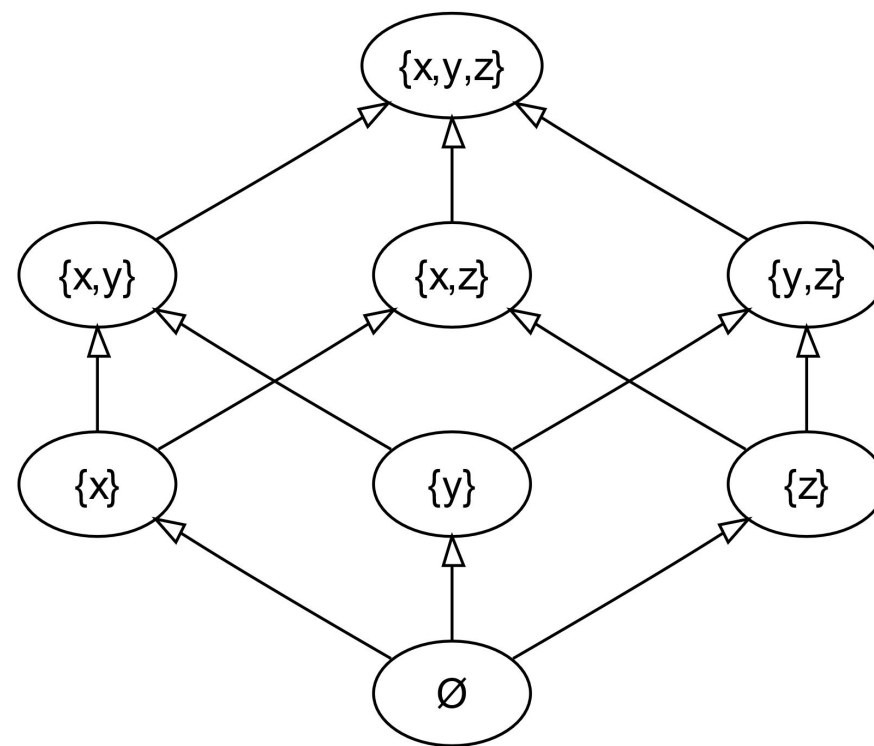
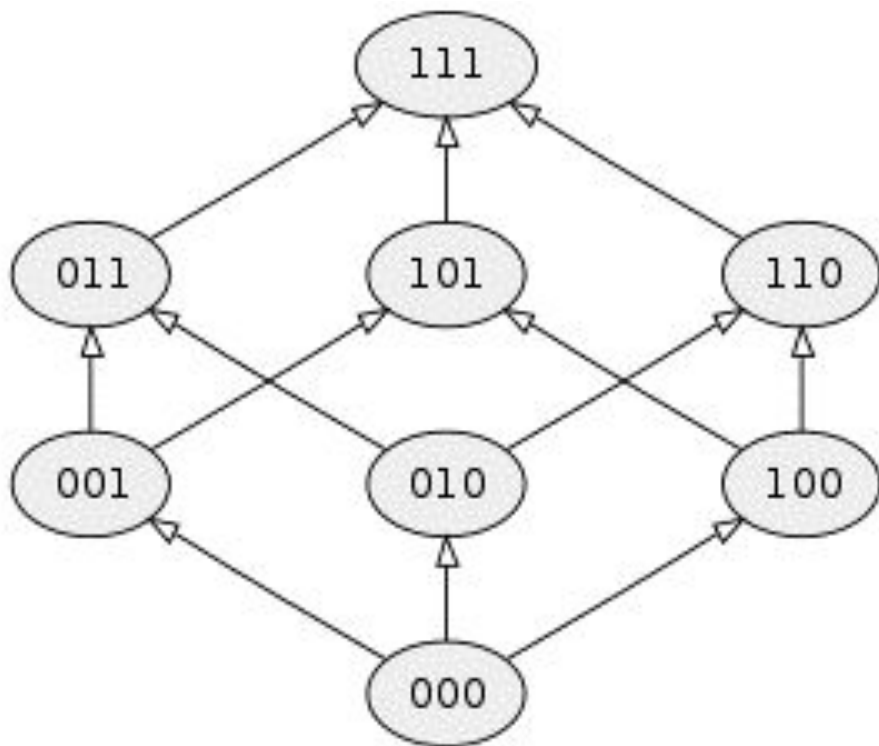
Бинарное отношение и его свойства

Бинарным отношением называется отношение $R \subseteq A \times A = A^2$.

1. Рефлексивность: $\forall a \in A, (a, a) \in R, \forall a \in A,$
2. Антирефлексивность: $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \Rightarrow a \neq b,$
3. Симметричность: $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R,$
4. Антисимметричность: $\forall a, b \in A, ((a, b) \in R) \wedge ((b, a) \in R) \Rightarrow a = b,$
5. Асимметричность: $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R,$
6. Транзитивность: $\forall a, b \in A, ((a, b) \in R) \wedge ((b, c) \in R) \Rightarrow (a, c) \in R,$
7. Антитранзитивность: $\forall a, b \in A, ((a, b) \in R) \wedge ((b, c) \in R) \Rightarrow (a, c) \notin R,$
8. Связность: $\forall a, b \in A \Rightarrow ((a, b) \in R) \vee ((b, a) \in R).$

Виды отношений

1. Эквивалентности — рефлексивное, симметричное, транзитивное:
 - a) равенство чисел,
 - b) равномощность множеств,
 - c) параллельность прямых.
2. Нестромого (частичного) порядка — рефлексивное, антисимметричное, транзитивное:
 - a) отношения больше или равно, меньше или равно для чисел,
 - b) отношение предшествования на наборах булевых значений,
 - c) отношение несобственного подмножества для подмножеств \mathbb{U} ,
 - d) отношение делимости на множестве натуральных чисел.
3. Строгого порядка — антирефлексивное, асимметричное, транзитивное:
 - a) отношения больше и меньше для чисел,
 - b) лексикографический порядок слов в словаре.



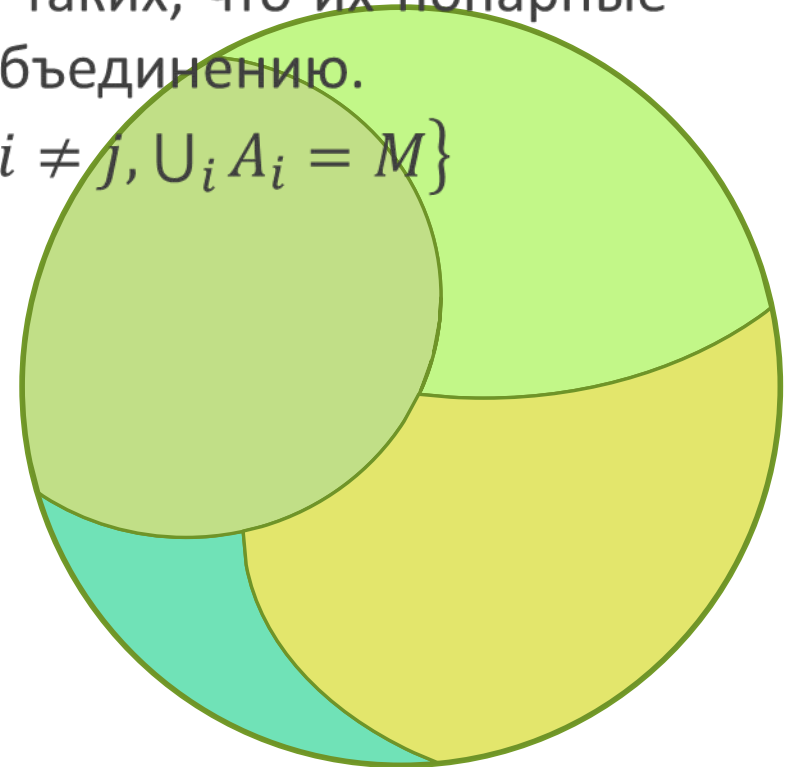
Пример

Разбиение множества

Для некоторого множества M разбиением называется некоторое множество $\{A_i\}$ его непустых подмножеств $A_i \subseteq M$ таких, что их попарные пересечения пусты, а само множество M равно их объединению.

$$A(M) = \{A_i \mid A_i \in \mathcal{B}(A), A_i \neq \emptyset, A_i \cap A_j = \emptyset : i \neq j, \cup_i A_i = M\}$$

A_i – класс разбиения, блок разбиения.



Фактор-множество

Если на множестве A задано отношение эквивалентности, то оно разбивает множество на классы эквивалентности. Класс эквивалентности, порождённый элементом a : $[a]_R = \{x \in A \mid (x, a) \in R\}$.

Фактор-множеством по отношению R называется множество A_R всех классов эквивалентности.



Отображения (функции)

Отображение (функция)

Отображением, или функцией $f: X \rightarrow Y$ называется такое подмножество множества $X \times Y$, что для любых пар $(x', y') \in f$, $(x'', y'') \in f$ из условия $y' \neq y''$ следует, что $x' \neq x''$. То есть каждому элементу из множества X сопоставлено не более одного элемента множества Y . Если каждому элементу множества X сопоставлен элемент из Y , то функция называется полностью определённой, иначе – частично определённой.

Для пары (x, y) :

x – аргумент функции, или прообраз y ,

y – значение функции, или образ x .

$D(f)$ - область определения функции (domain) – множество всех прообразов элементов множества Y .

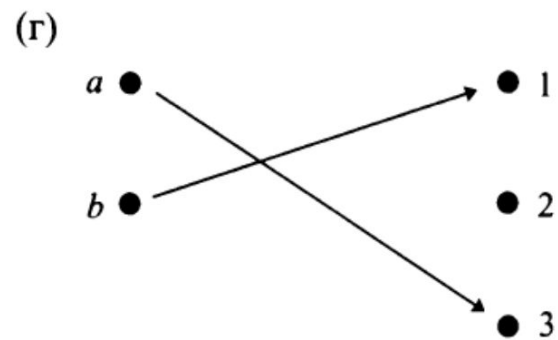
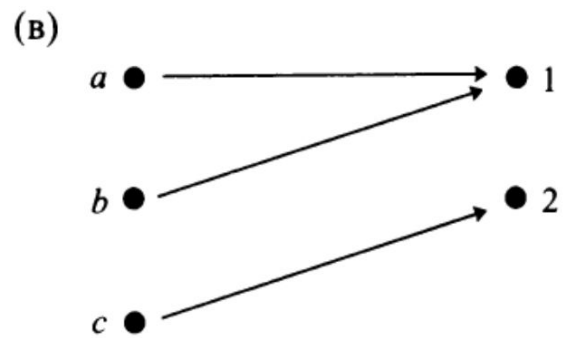
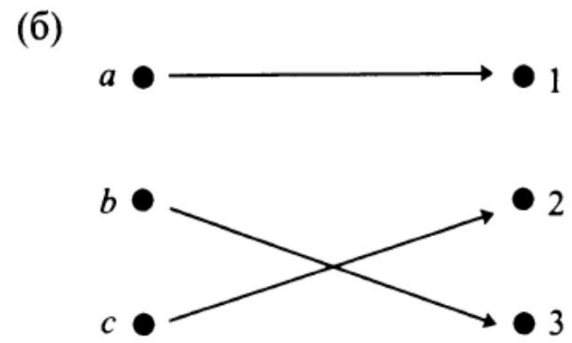
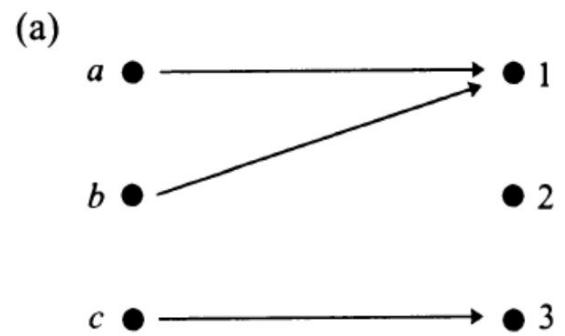
$E(f)$ - область значений функции (range) – множество всех образов элементов множества X .

Инъекция, сюръекция, биекция

Если при отображении $f: X \rightarrow Y$ область значений $E(f)$ совпадает с множеством Y , то отображение называется сюръективным (отображением "на").

Если при отображении $f: X \rightarrow Y$ различным элементам множества X соответствуют различные элементы множества Y ($x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x'')$), то отображение называется инъективным (отображением "в").

Если отображение одновременно инъективно и сюръективно, то его называют биективным.



Пример

Обратная функция

Если отношение $f^{-1}: Y \rightarrow X$, является отображением (функцией), то она называется обратной функцией, а функция f – обратимой.

ТЕОРЕМА. Если функция $f: X \rightarrow Y$ является биекцией, то обратное отношение f^{-1} является функцией из Y в X , причём биективной.

ТЕОРЕМА. Если $f: X \rightarrow Y$ — биекция, то

a) $f(f^{-1}(y)) = y$ для $\forall y \in Y$;

b) $f^{-1}(f(x)) = x$ для $\forall x \in X$.

Композиция функций

Если заданы функции $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$, то их композицией также является функция $g \circ f: X \rightarrow Z$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Бесконечные множества

Конечные и бесконечные множества

КОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО

- Множество, количество элементов которого конечно.
- Множество, мощность которого равна мощности множества $\{x \mid 1 \leq x \leq n, n \in \mathbb{N}\}$.

БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО

- Множество, не являющееся конечным.
- Множество, мощность которого не меньше мощности множества натуральных чисел.
- Множество, для которого существует биекция с некоторым его собственным подмножеством.

Равномощность множеств

Множества A и B называются равномощными, если существует биективное (взаимно-однозначное) отображение множества A на множество B .

Отношение равномощности множеств является отношением эквивалентности (обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности).

Бесконечные множества

СЧЁТНОЕ МНОЖЕСТВО

- Бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами.
- Множество, для которого можно задать биекцию с множеством натуральных чисел.
- Бесконечное множество, равномощное множеству натуральных чисел.

Мощность множества обозначается \aleph_0 .

НЕСЧЁТНОЕ МНОЖЕСТВО

КОНТИНУАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО (КОНТИНУУМ)

- Бесконечное множество, превосходящее по мощности счётное.
- Множество, для которого можно установить биекцию с множеством действительных чисел.
- Бесконечное множество, мощность которого эквивалентна мощности множества действительных чисел.

Континуумом также называется мощность данного множества $c = 2^{\aleph_0}$

Мощность множества

- Класс эквивалентности по отношению равномощности.

Специальные функции

Перестановка – биективная функция на некотором множестве ($f: A \rightarrow A$).

Функционал – отображение между множеством функций и множеством чисел (функционал качества).

Оператор – отображение между двумя множествами функций.

Бинарная операция

Бинарной операцией на множестве S называется функция $f: S \times S \rightarrow S$.

Бинарная операция обладает свойством замкнутости: $a, b \in A \Rightarrow f(a, b) \in S$.

Универсальная алгебра

Универсальной алгеброй \mathcal{A} называется некоторое множество S , называемое *носителем* алгебры, с определённым на нём множеством операций F – *сигнатурой* данной алгебры ($\mathcal{A} = (S, F)$).

Универсальная алгебра, сигнатура которой состоит из единственной бинарной операции называется *группоидом*.

Полугруппа

Множество S с введённой на нём ассоциативной бинарной операцией (группоид) $(a * b) * c = a * (b * c)$ называется *полугруппой* $(S, *)$.

Если для $\forall a, b \in S$ выполняется свойство коммутативности: $a * b = b * a$, то полугруппа называется *абелевой*, или *коммутативной*.

Полугруппа, содержащая нейтральный элемент ($\exists e \in S: a * e = e * a = a$), называется *моноидом* (S^1) .

Группа

Если для полугруппы выполнены условия:

- 1) ассоциативности: $(a * b) * c = a * (b * c)$,
- 2) наличие нейтрального элемента: $\exists e \in S: \forall a \in S (e * a = a * e = a)$,
- 3) наличие обратного элемента: $\forall a \in S \Rightarrow \exists a^{-1} \in S: (a * a^{-1} = a^{-1} * a = e)$,

то она называется *группой*.

Если выполняется условие коммутативности, то группа называется абелевой.

Пример 1

Сигнатура: $\mathcal{B}(M), M = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

Бинарная операция: \cup

Ассоциативность:

Коммутативность:

Нейтральный элемент: \emptyset

Обратный элемент:

Пример 2

Сигнатура: Множество матриц действительных чисел размерности 2×2 .

Бинарная операция: \cdot

Ассоциативность:

Коммутативность:

Нейтральный элемент: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Обратный элемент:

Пример 3

Сигнатура: $S = \{i, -i, 1, -1\}$.

Бинарная операция: \cdot

Ассоциативность:

Коммутативность:

Нейтральный элемент: **1**

Обратный элемент:

Пример 4

Сигнатура: \mathbb{N}

Бинарная операция: a^b

Ассоциативность: \otimes

Коммутативность: \otimes

Нейтральный элемент: \otimes

Обратный элемент: \otimes

Пример 5

Сигнатура: \mathbb{Z}

Бинарная операция: $+$

Ассоциативность:

Коммутативность:

Нейтральный элемент: 0

Обратный элемент:

Операции коммутативной группы

	АДДИТИВНАЯ	МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ
Обозначение операции:	$+ \quad (a + b)$	$\cdot \quad (a \cdot b, ab)$
Нейтральный элемент:	$0 \quad (a + 0 = 0 + a = a)$	$1 \quad (a \cdot 1 = 1 \cdot a = a)$
Противоположный элемент:	$-a \quad (-a + a = a + (-a) = 0)$	$a^{-1} \quad (a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1)$

Кольцо

Кольцом называется множество S с введёнными на нём аддитивной (+) и мультипликативной (\cdot) бинарными операциями и выполняющимися условиями:

- 1) Относительно операции + множество является абелевой группой,
- 2) Операция \cdot коммутативна ($a \cdot b = b \cdot a$),
- 3) Выполняются законы дистрибутивности:

$$\forall a, b, c \in S \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Пример 1

Сигнатура: Множество матриц действительных чисел размерности 2×2 .

Бинарные операции: $+$, \cdot

Ассоциативность $+$: \checkmark

Коммутативность $+$: \checkmark

Нейтральный элемент, относительно $+$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Обратный элемент, относительно $+$: $-\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$

Дистрибутивность:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C,$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Поле

Если кольцо имеет мультипликативный нейтральный элемент (единицу), оно называется *кольцом с единицей*.

Если операция умножения коммутативна, кольцо называется *коммутативным*.

Коммутативное кольцо называется *полем*, если его ненулевые элементы образуют группу, относительно операции умножения.

Примеры

- 1) Множество рациональных чисел \mathbb{Q} с операциями $+$, \cdot .
- 2) Множество вещественных чисел \mathbb{R} с операциями $+$, \cdot .
- 3) Множество $\mathbb{B}^2 = \{0,1\}$ с операциями \oplus , \wedge .

Источники

- Аляев Ю. А., Тюрин С. Ф. Дискретная математика и математическая логика.
- Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.
- Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1.
- Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов.
- Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов.