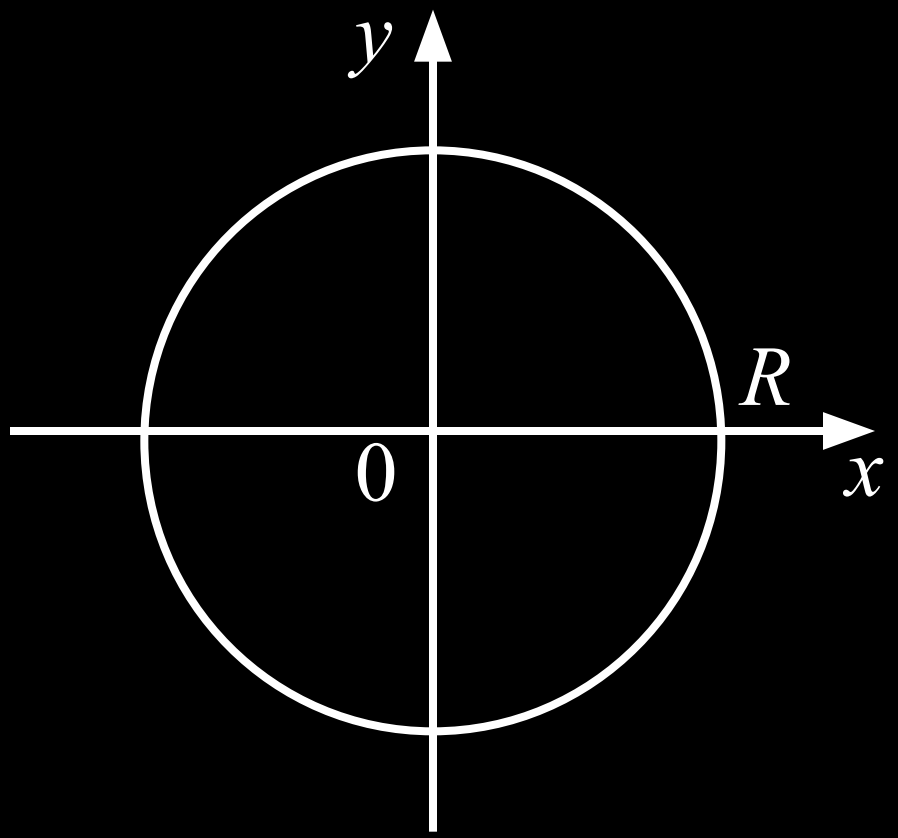
# *Лекция 7. Кривые второго порядка*

1. Окружность.
2. Эллипс.
3. Гипербола.
4. Парабола.

# п.1. Окружность.

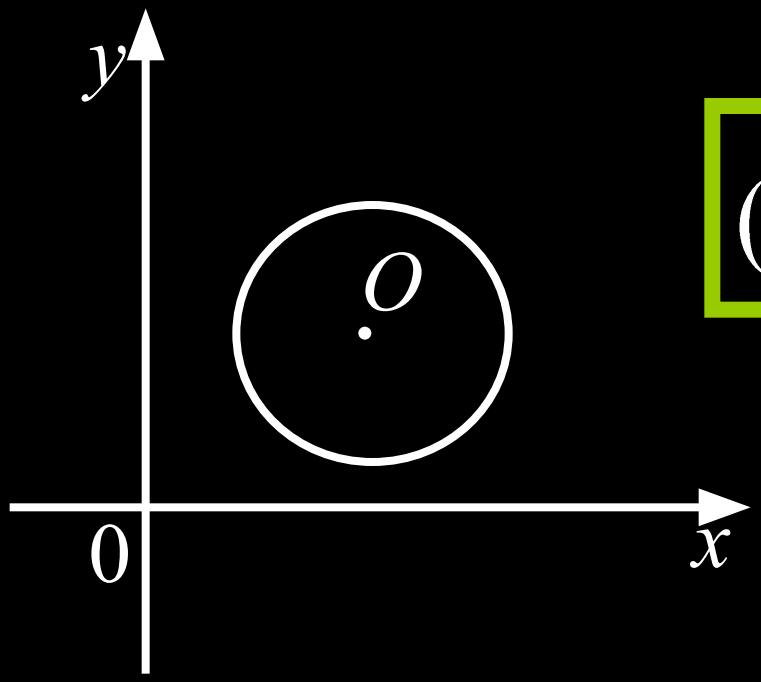
*Окружность* есть геометрическое множество точек на плоскости, равноудаленных от данной точки.

# Уравнение окружности радиуса $R$ с центром в начале координат




$$x^2 + y^2 = R^2$$

Уравнение окружности радиуса $R$ с центром в точке $O(x_0; y_0)$




$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

# п.2. Эллипс.

*Эллипс* есть геометрическое место точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a \geq b > 0.$$

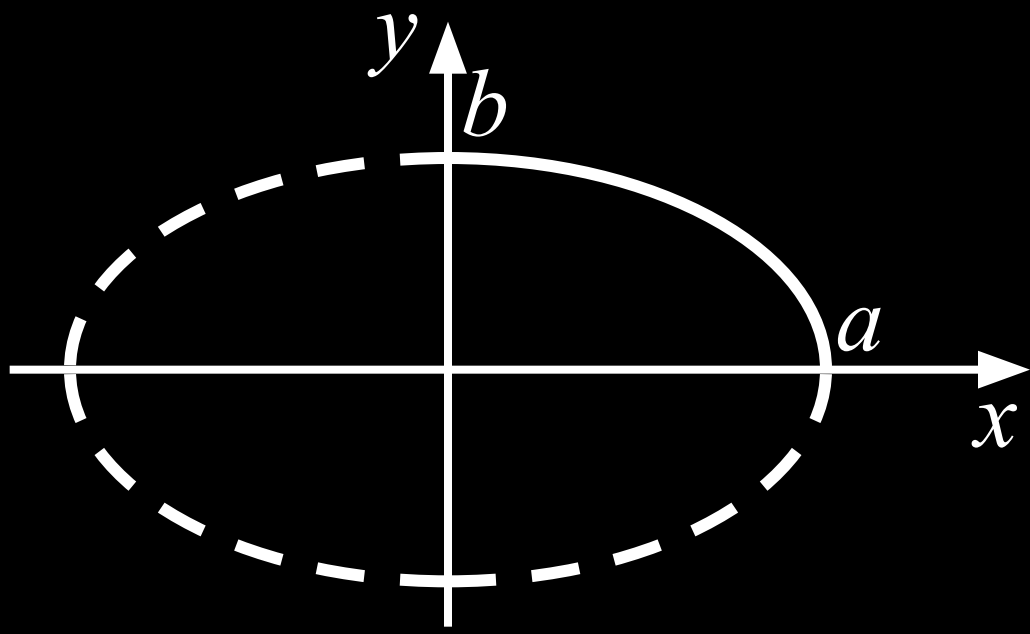
# *Свойства эллипса*

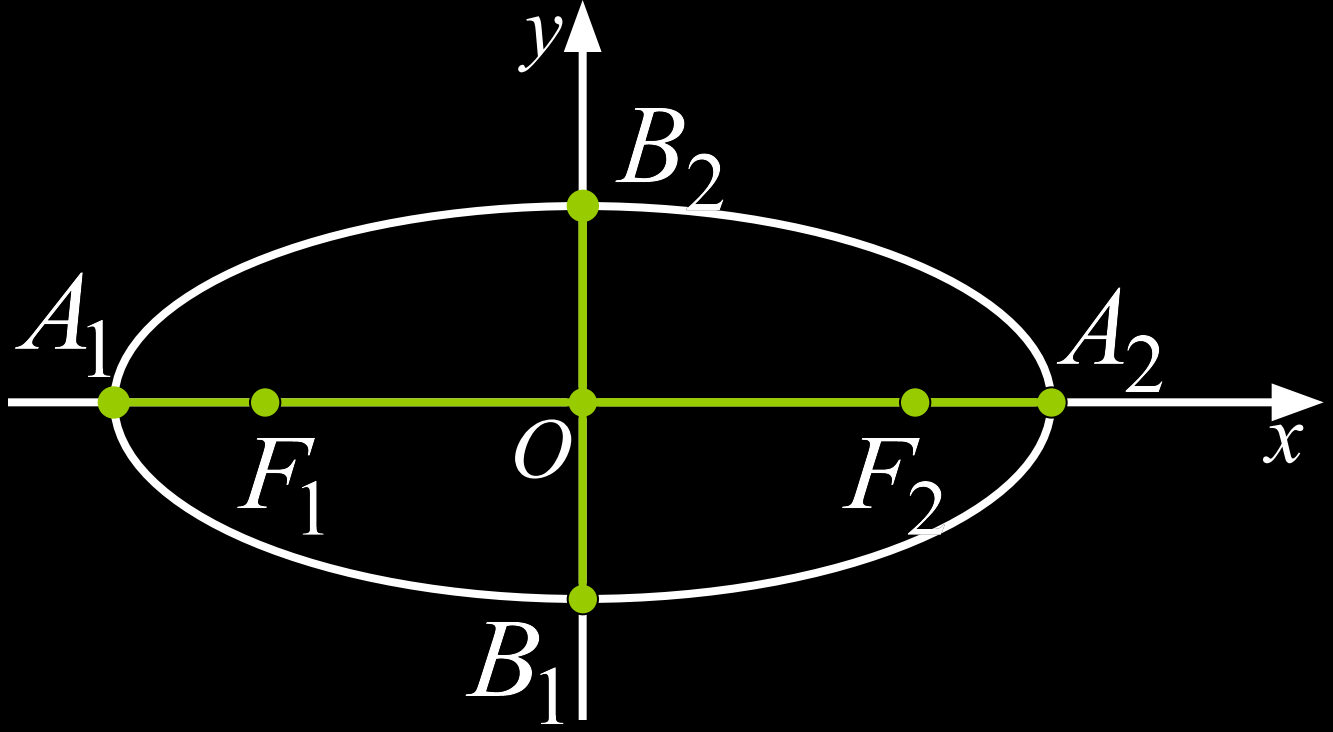
1.Симметрия относительно осей координат и начала координат.

2. $|x| \le a, |y| \le b.$

3. I-я четверть:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$






Большая полуось: $a$.

Большая ось: $2a$.

$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Малая полуось: $b$.

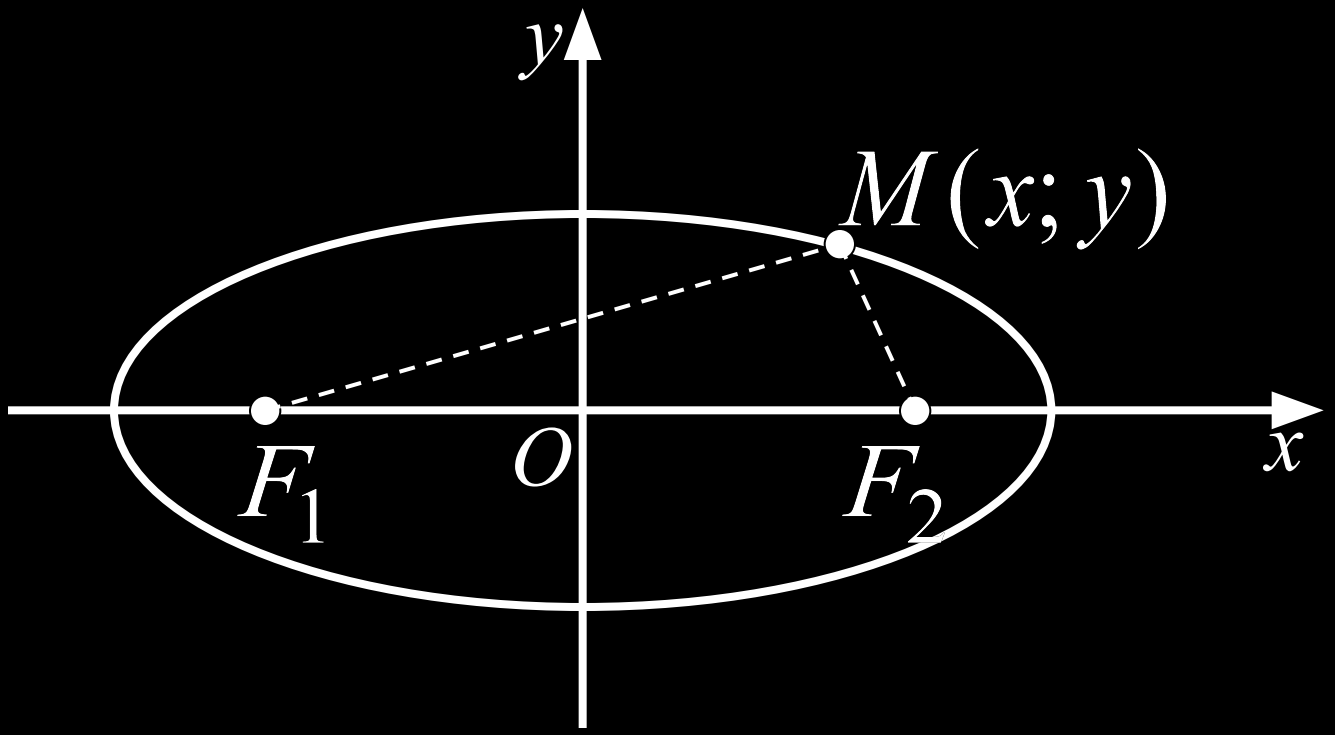
Малая ось: $2b$.

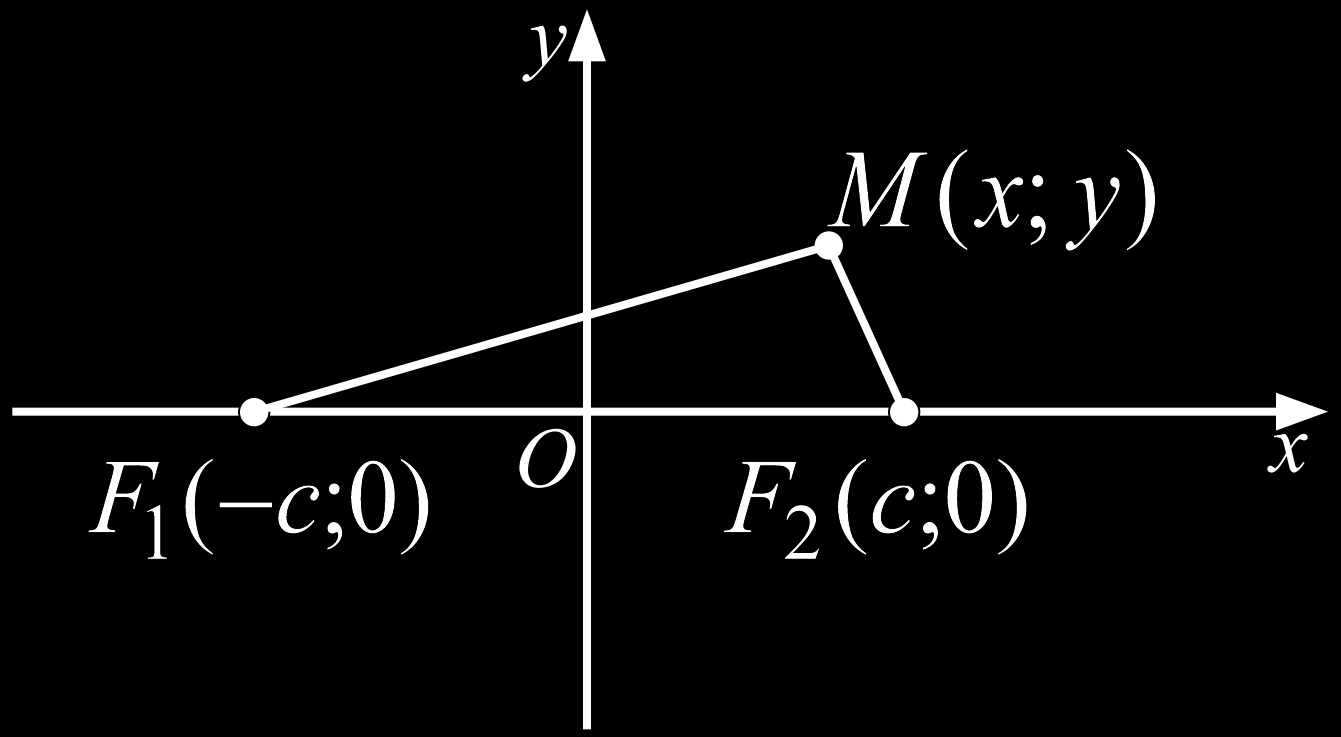
$B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.

$c^2 = a^2 - b^2$, $c < a$

Центр эллипса: $O(0;0)$.

Теорема 1. Точка $M$ плоскости принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда сумма расстояний от фокусов $F_1$ и $F_2$ до точки $M$ равна $2a$.






$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

# Доказательство.

Необходимость.

Пусть точка $M(x;y)$ лежит на эллипсе.

Покажем, что $MF_1 + MF_2 = 2a$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2 =$$

$$= b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

$$MF_1 = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} =$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \qquad y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + 2cx + a^2 - \cancel{b^2} + \cancel{b^2} - \frac{b^2 x^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + 2cx + a^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 \frac{c^2}{a^2} + 2cx + a^2} =$$

$$= \sqrt{\left( x\frac{c}{a} + a \right)^2} = \left| x\frac{c}{a} + a \right| = a + x\frac{c}{a}$$

$$MF_1 = a + x\frac{c}{a}$$

$$MF_2 = a - x\frac{c}{a}$$

Самостоятельно

$$MF_1 + MF_2 = a + x\frac{c}{a} + a - x\frac{c}{a} = 2a$$

Достаточность.

Пусть $MF_1 + MF_2 = 2a$

Покажем, что точка $M(x; y)$ лежит на эллипсе.

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(a^2 - cx\right)^2$$

$$a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

$$c^2=a^2-b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2-c^2=b^2$$

---

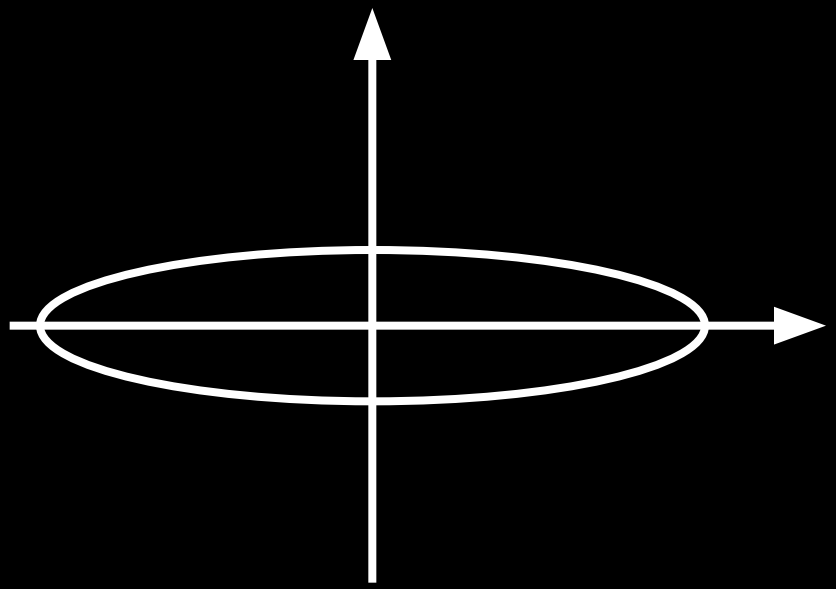
$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

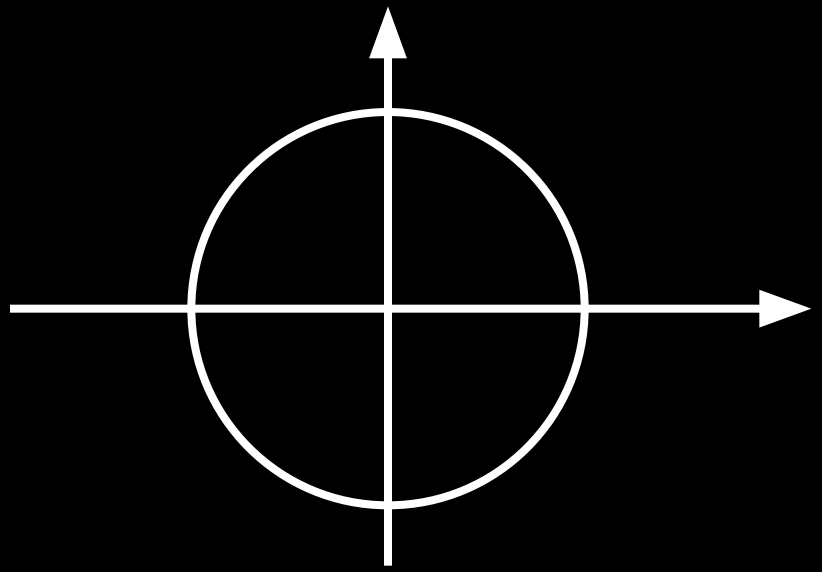
Теорема доказана.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$$ – *эксцентриситет* эллипса

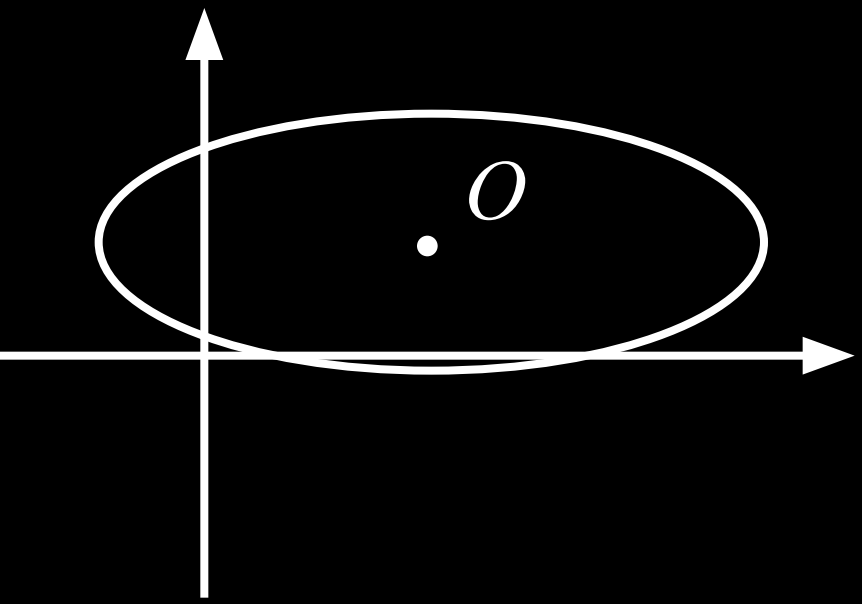
$\varepsilon \to 1$



$\varepsilon \to 0 \Rightarrow b \to a$

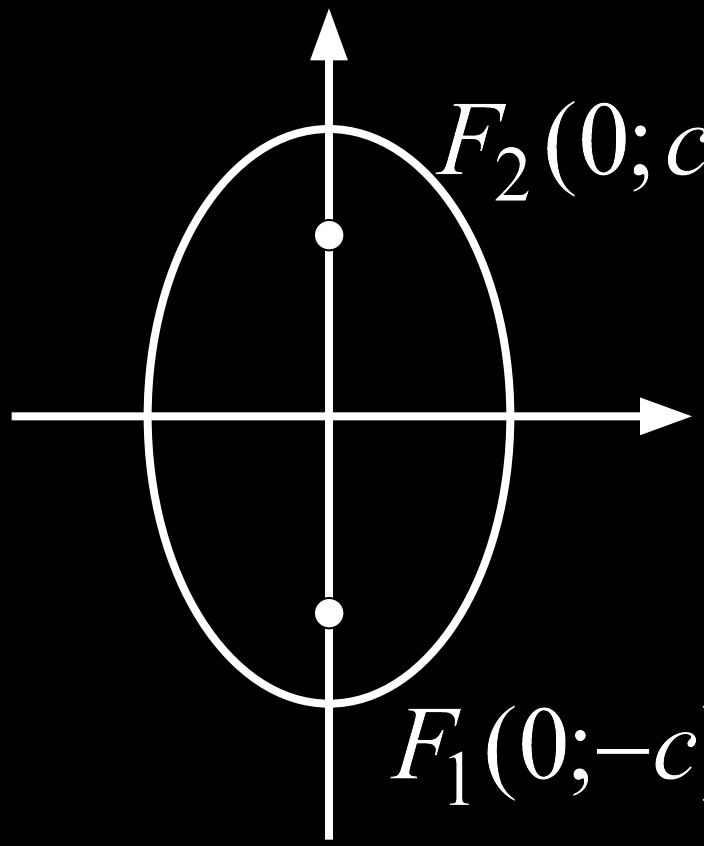


# Уравнение эллипса с центром в точке $O(x_0; y_0)$




$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

$a < b$

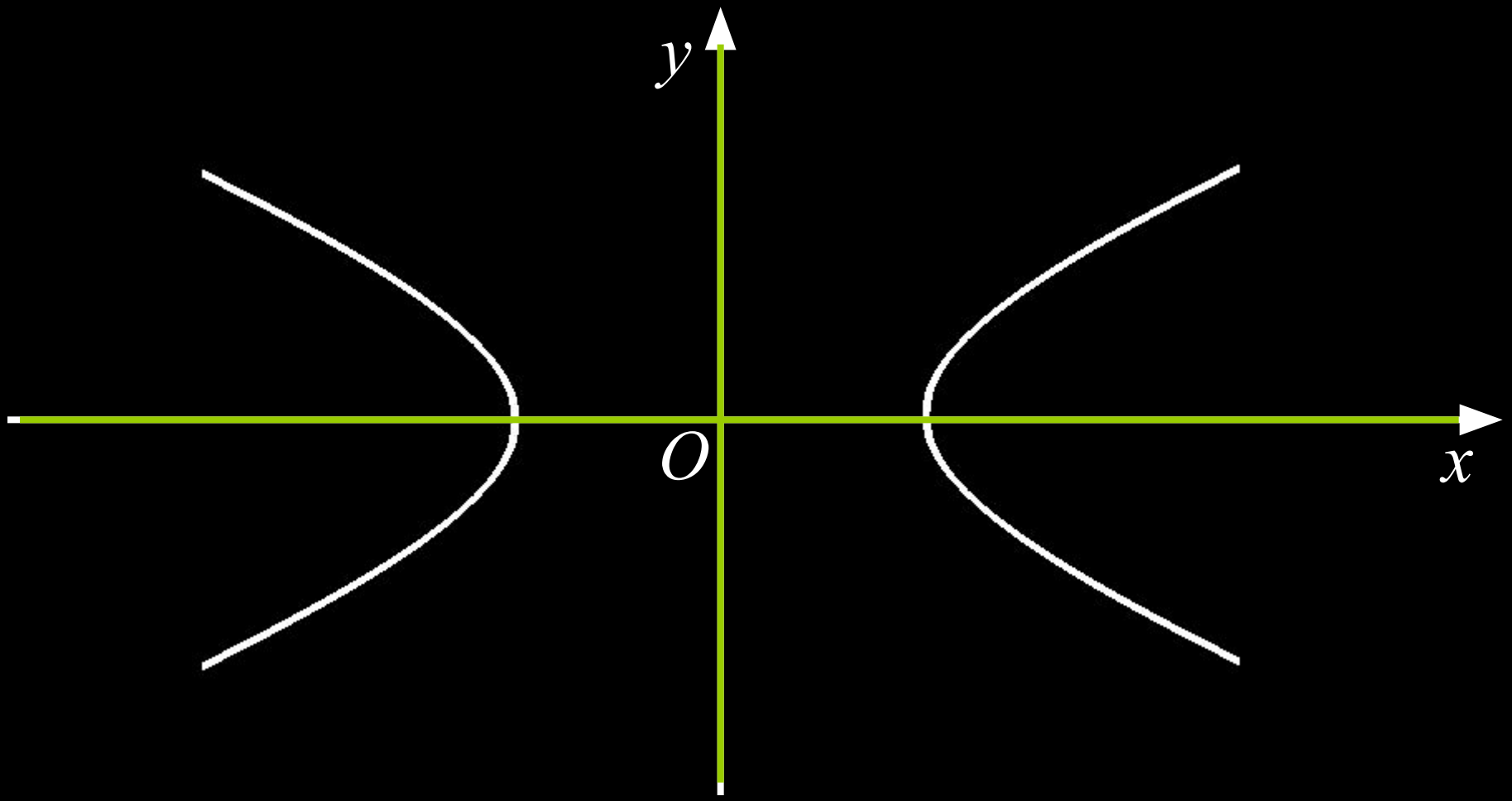



$c^2 = b^2 - a^2$

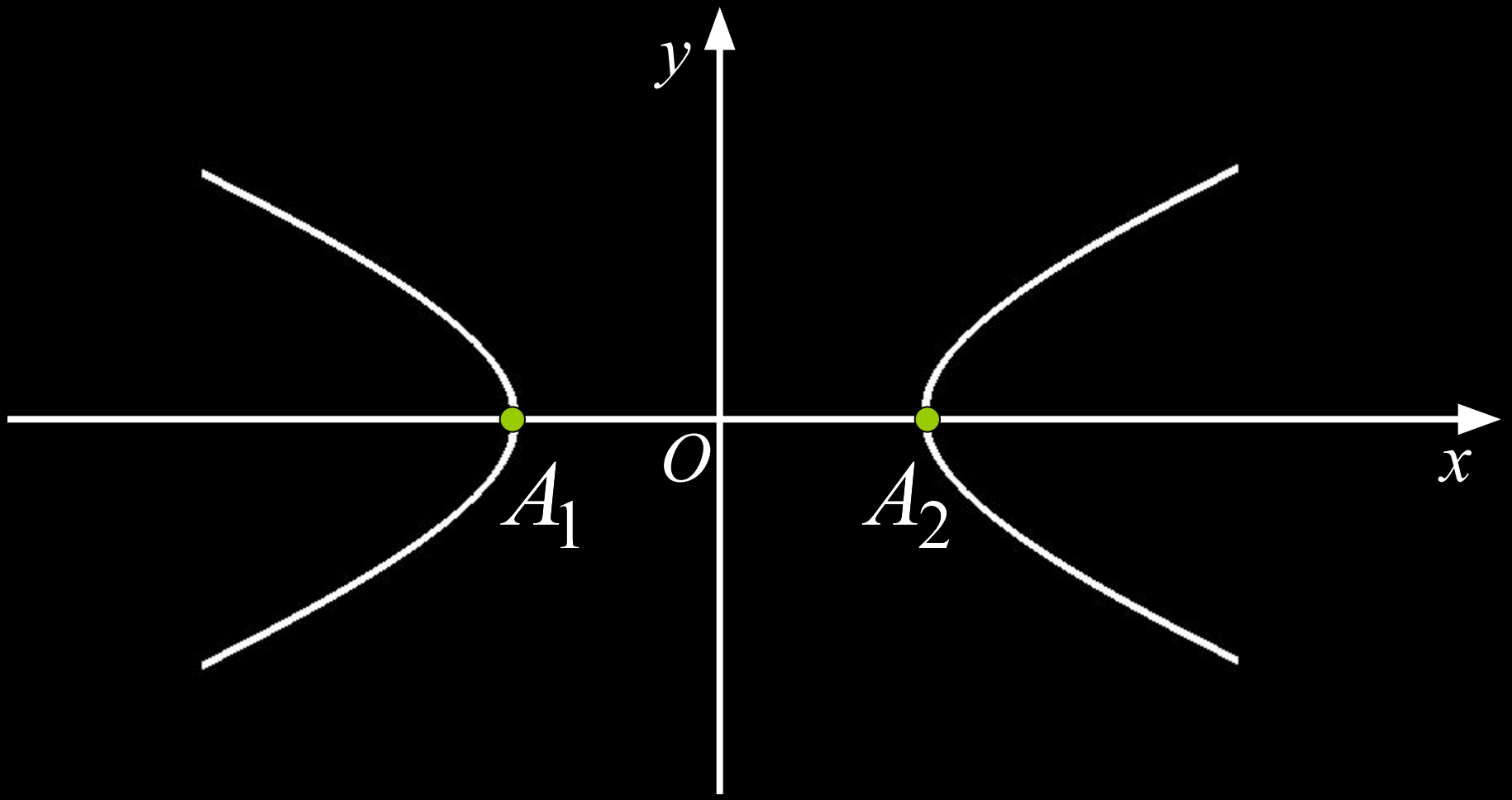
# п.3. Гипербола.

*Гипербола* есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

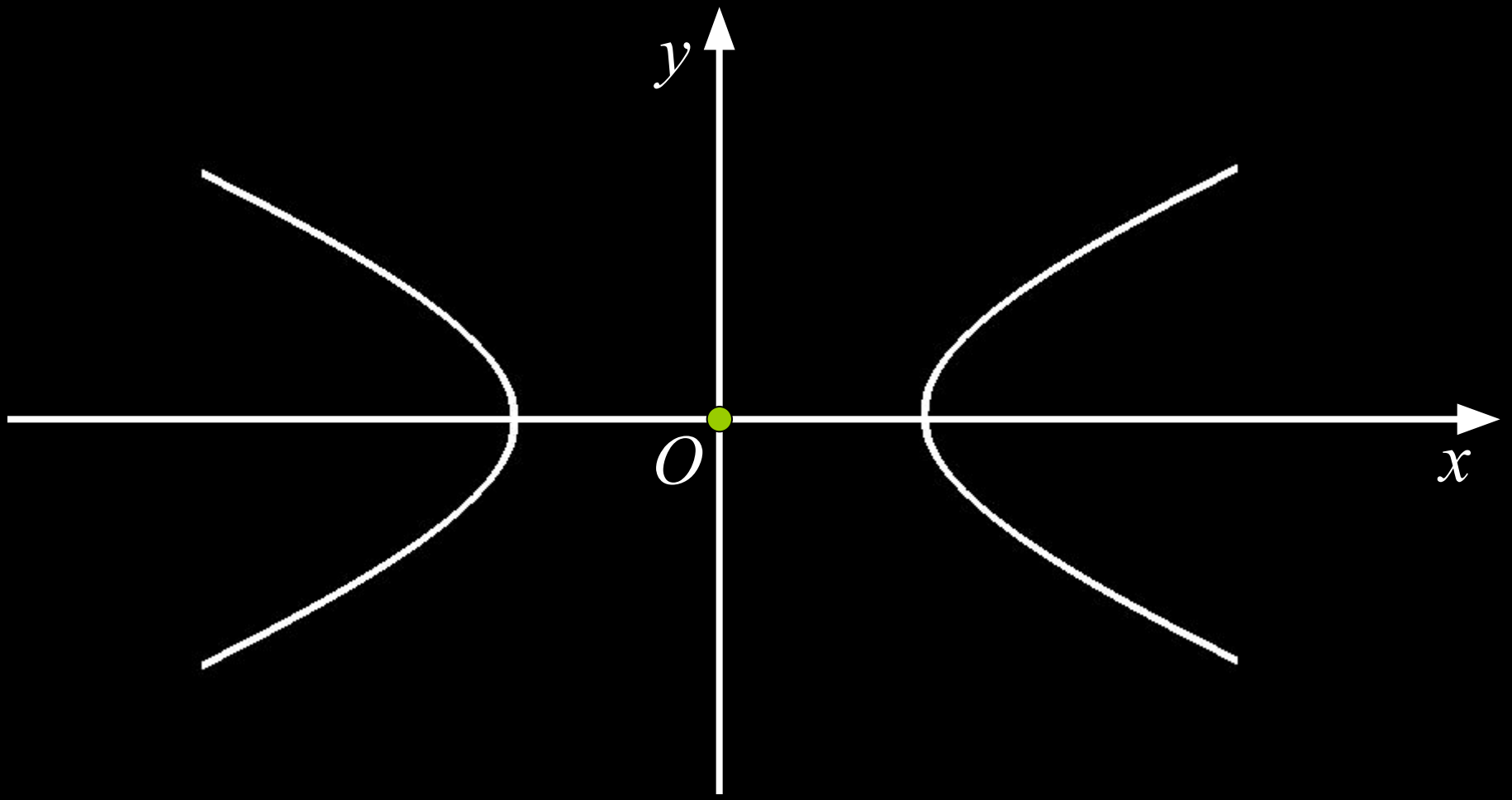
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a, b > 0.$$



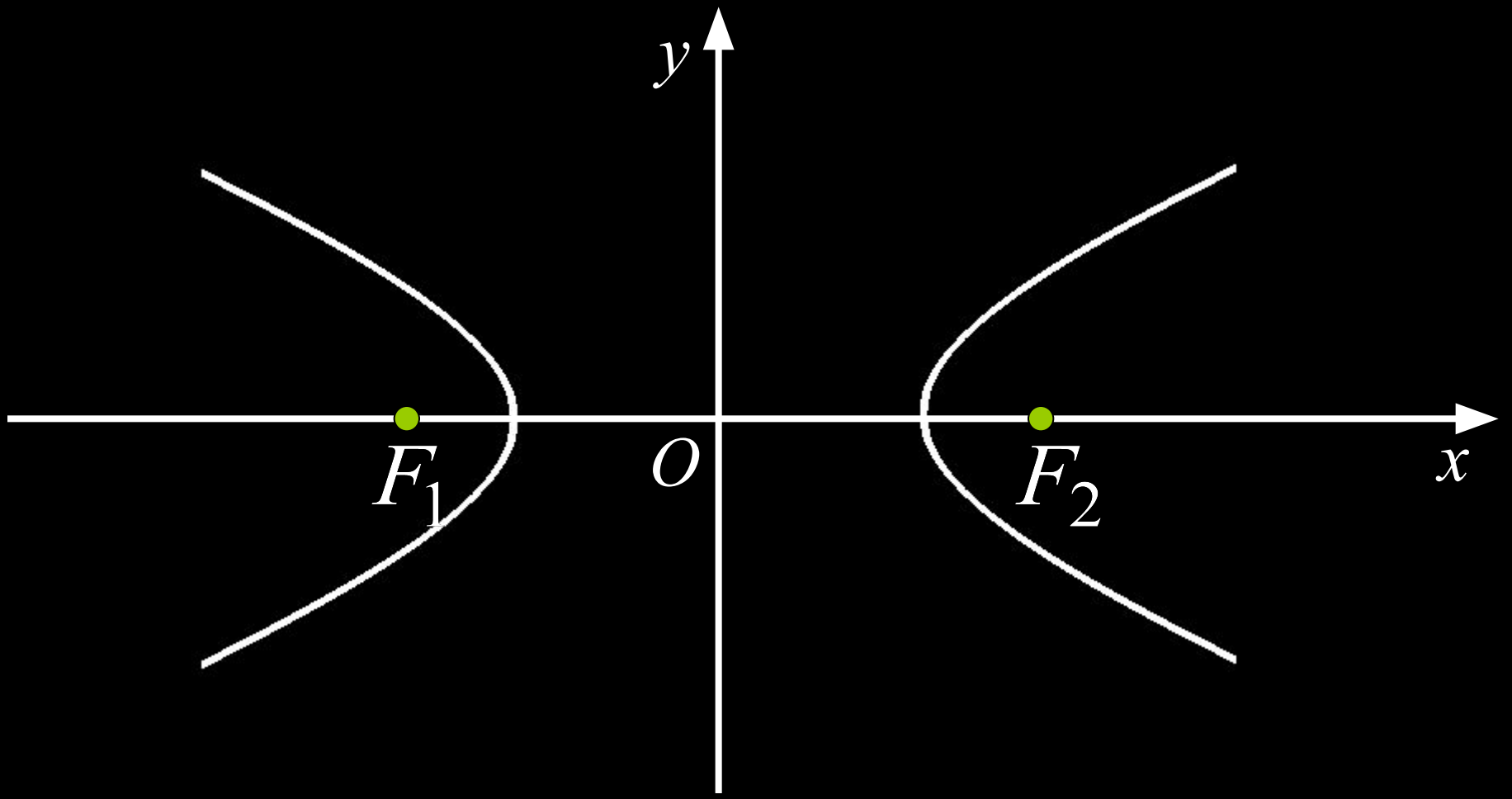

Оси гиперболы: действительная, мнимая.




Вершины гиперболы: $A_1(-a;0)$ $A_2(a;0)$

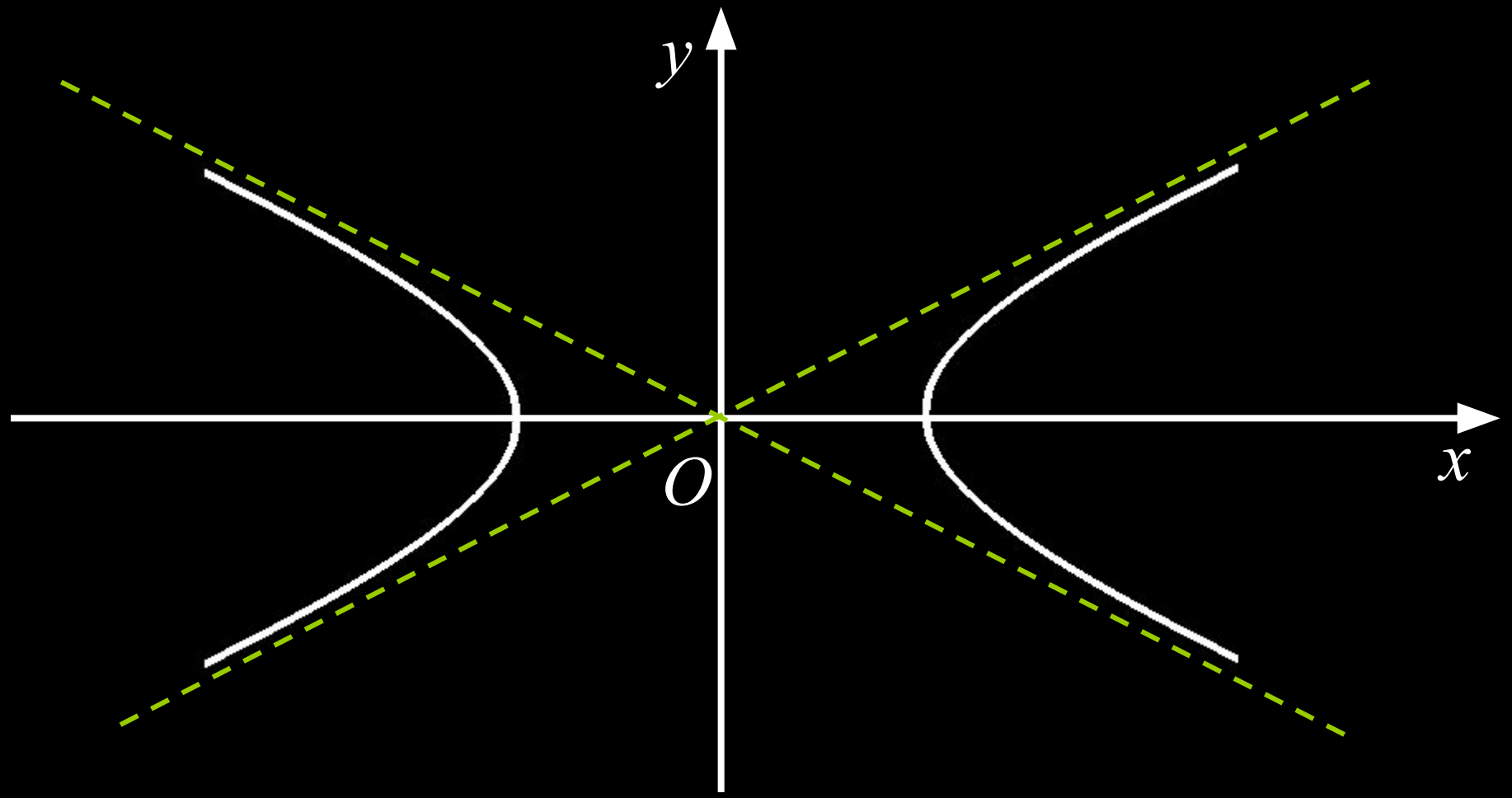



Центр гиперболы: $O(0;0)$

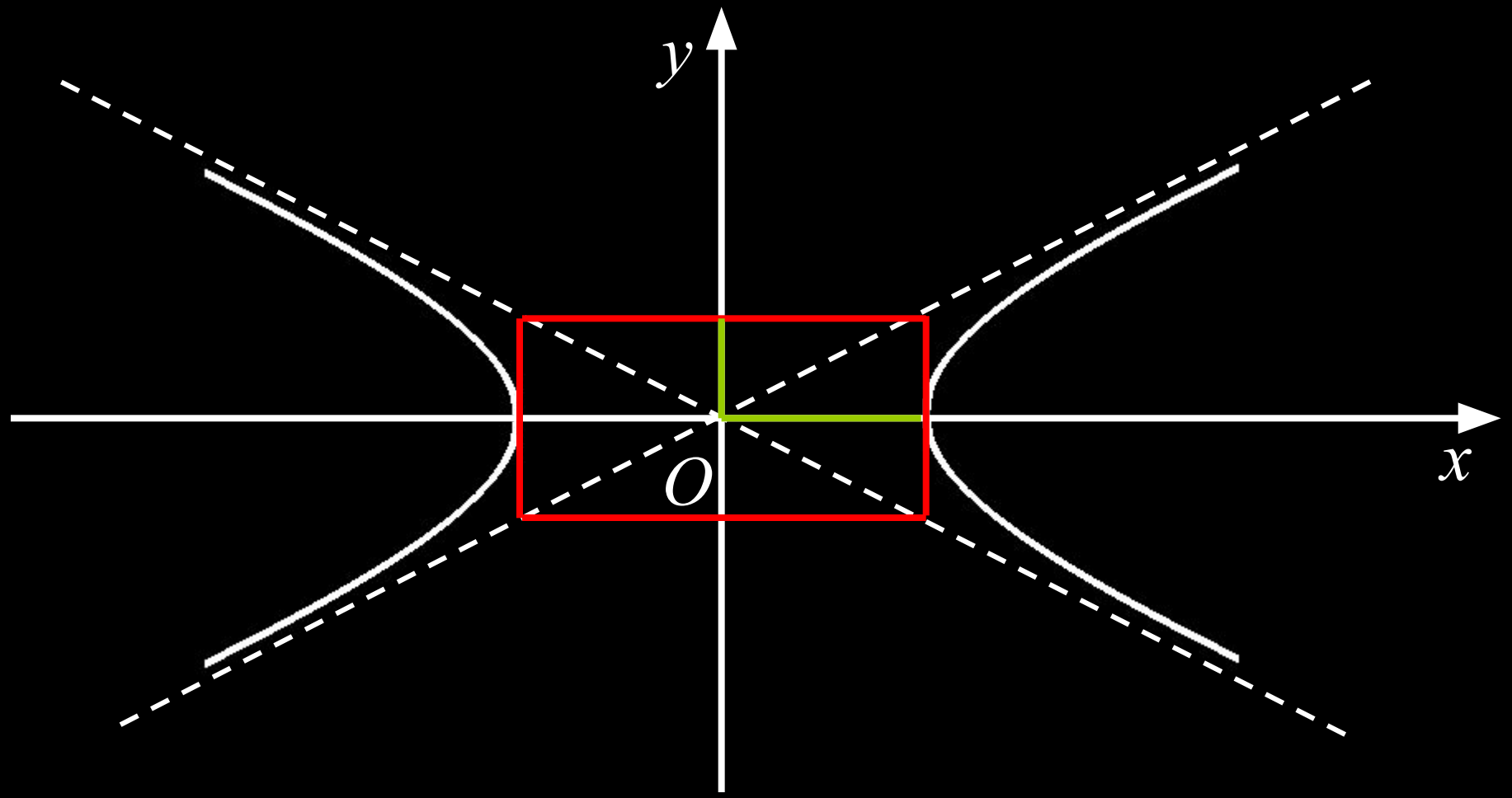



Фокусы гиперболы: $F_1(-c;0),\ F_2(c;0),$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

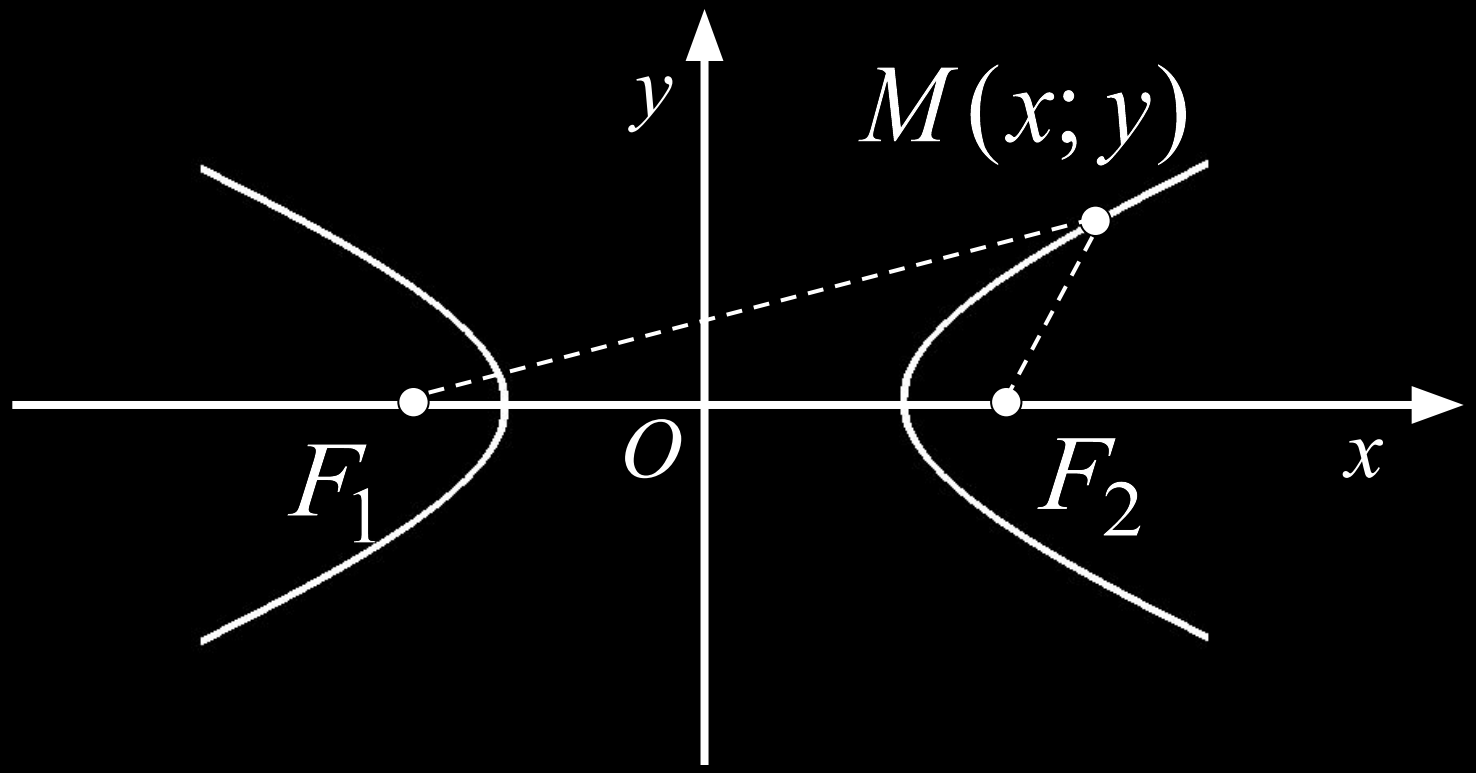



Асимптоты гиперболы: $y = \pm \frac{b}{a} x.$




Полуоси гиперболы: $a,\ b.$

Теорема 2. Точка $M$ плоскости принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда абсолютная величина разности расстояний от фокусов $F_1$ и $F_2$ до точки $M$ равна $2a$.




Доказательство самостоятельно.

# *Свойства гиперболы*

1. Симметрия относительно осей координат и начала координат.

2. Не пересекает ось $Oy$.

3. $|x| \geq a.$

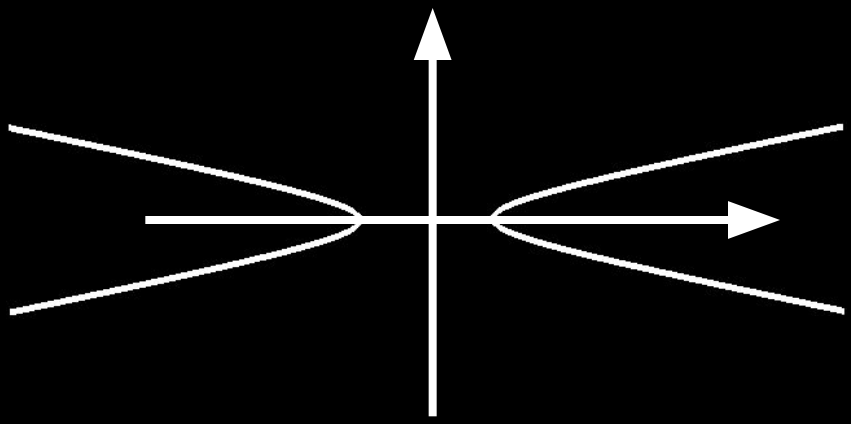
4. $a < c.$

5. $a = b$ — равнобочная гипербола.

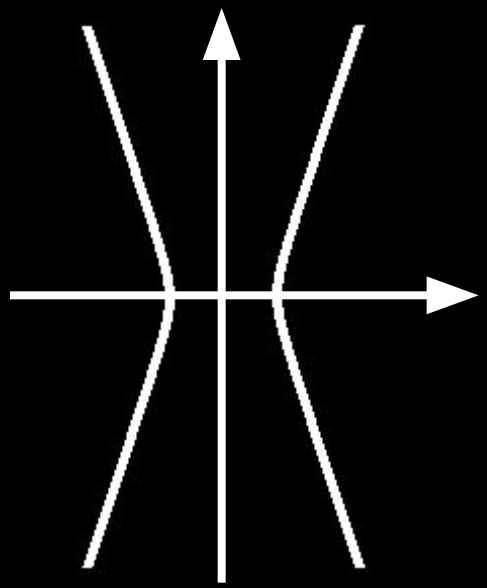
6. График гиперболы насколько угодно близко приближается к асимптотам.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$$ – *эксцентриситет* гиперболы

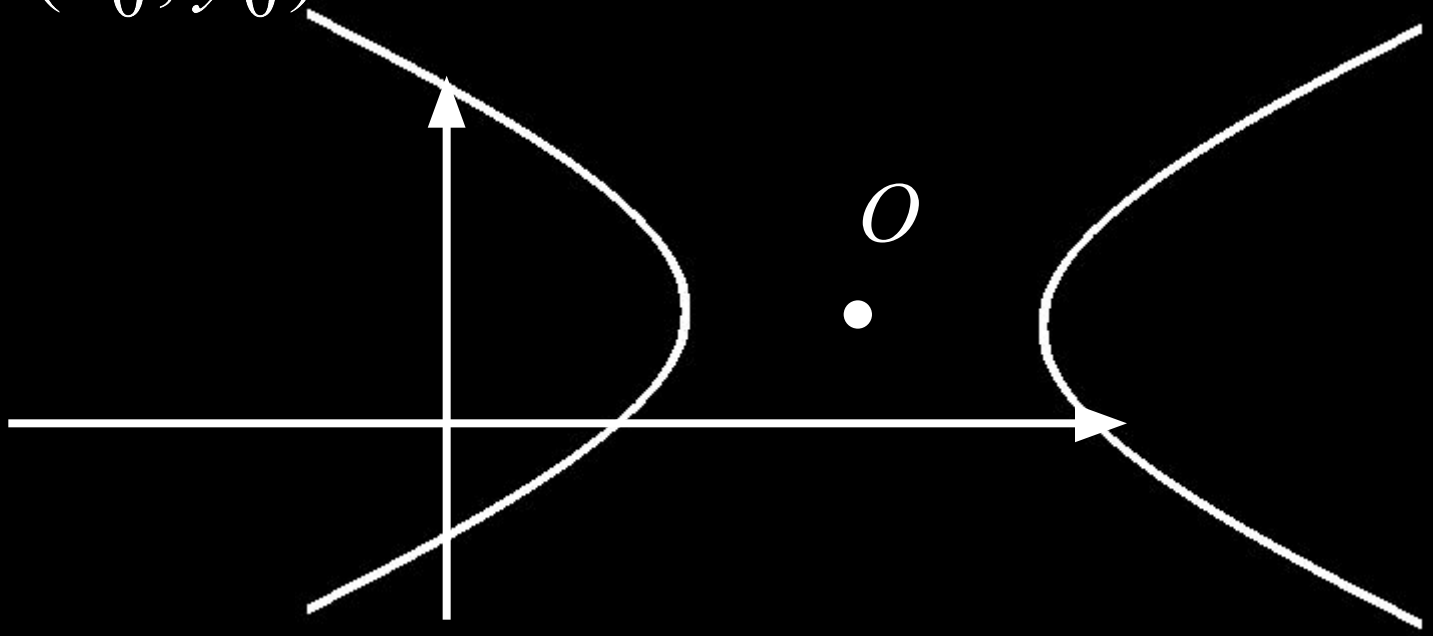
$\varepsilon \to 1$



$\varepsilon \to \infty$

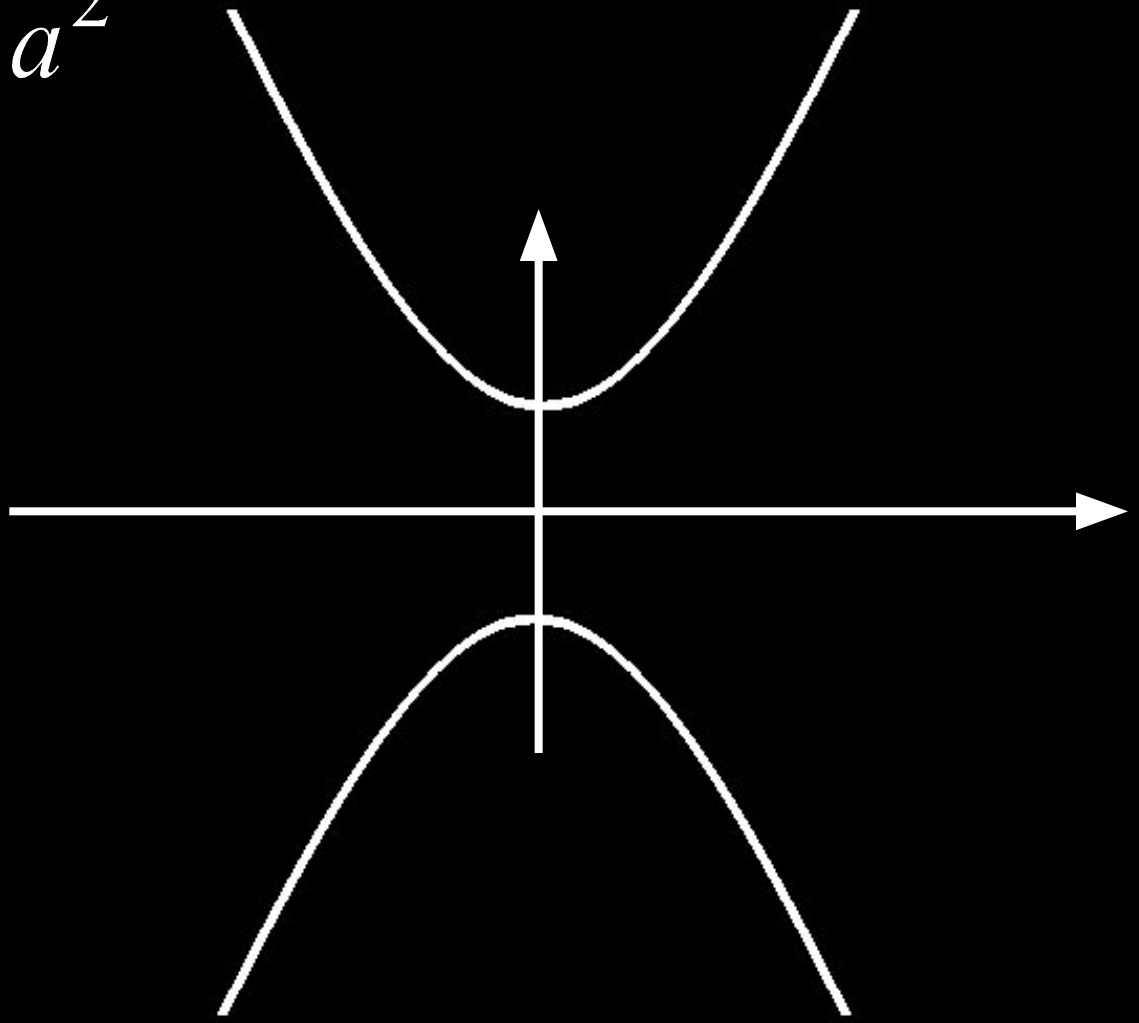


# Уравнение гиперболы с центром в точке $O(x_0; y_0)$.




$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

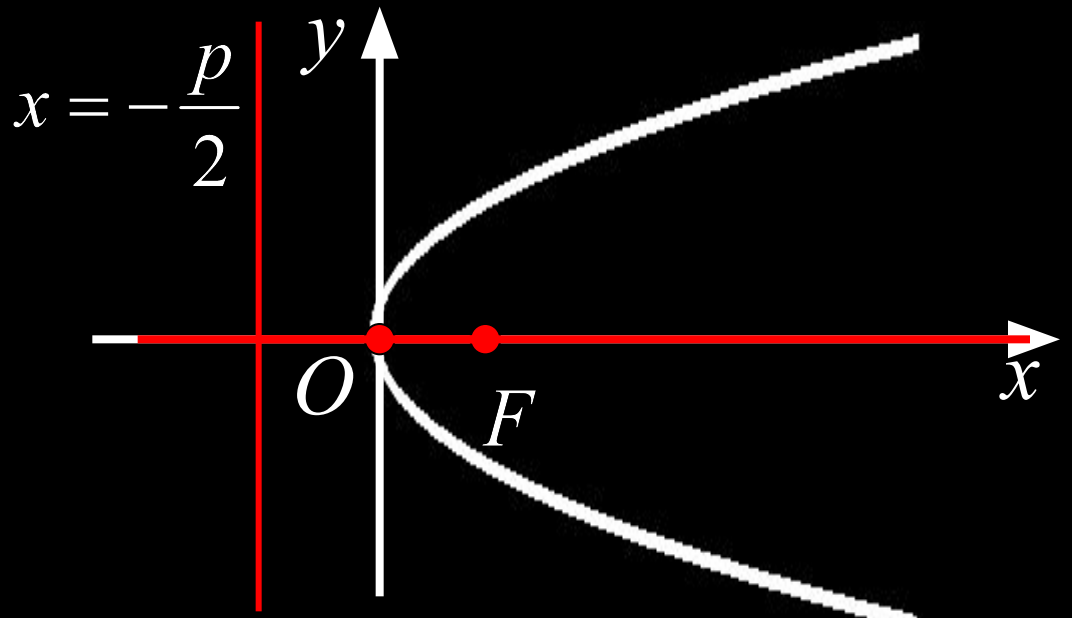
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$ — сопряженная гипербола



# п.4. Парабола.

*Парабола* есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y^2 = 2px, \quad p > 0.$$




Ось параболы: $Ox$.

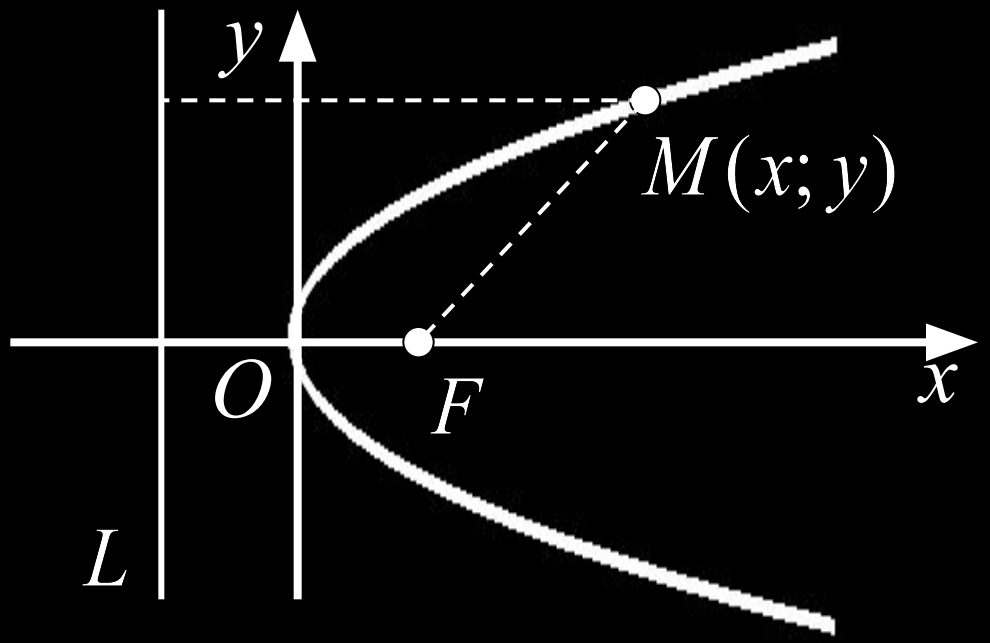
Вершина параболы: $O(0;0)$.

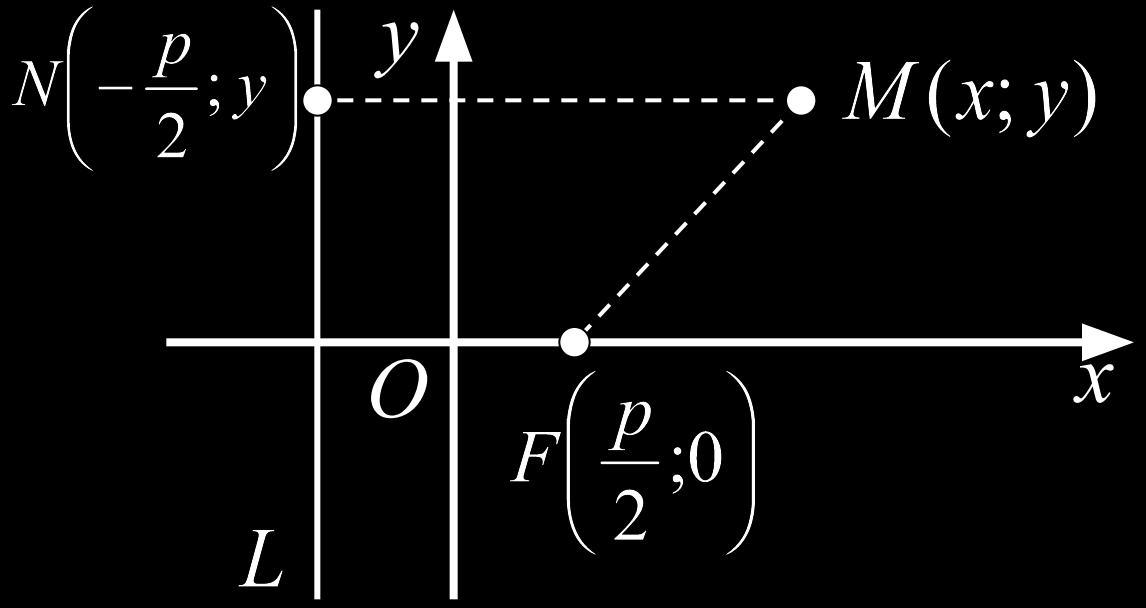
Фокус: $F\left(\frac{p}{2},0\right)$.

Директриса: $L:\ x = -\frac{p}{2}$.

Расстояние от фокуса до директрисы: $p$.

Теорема 3. Точка $M$ плоскости принадлежит параболе тогда и только тогда, когда эта точка равноудалена от фокуса $F$ и директрисы $L$.






$$MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} \qquad MN=\left|x+\frac{p}{2}\right|$$

Доказательство самостоятельно.

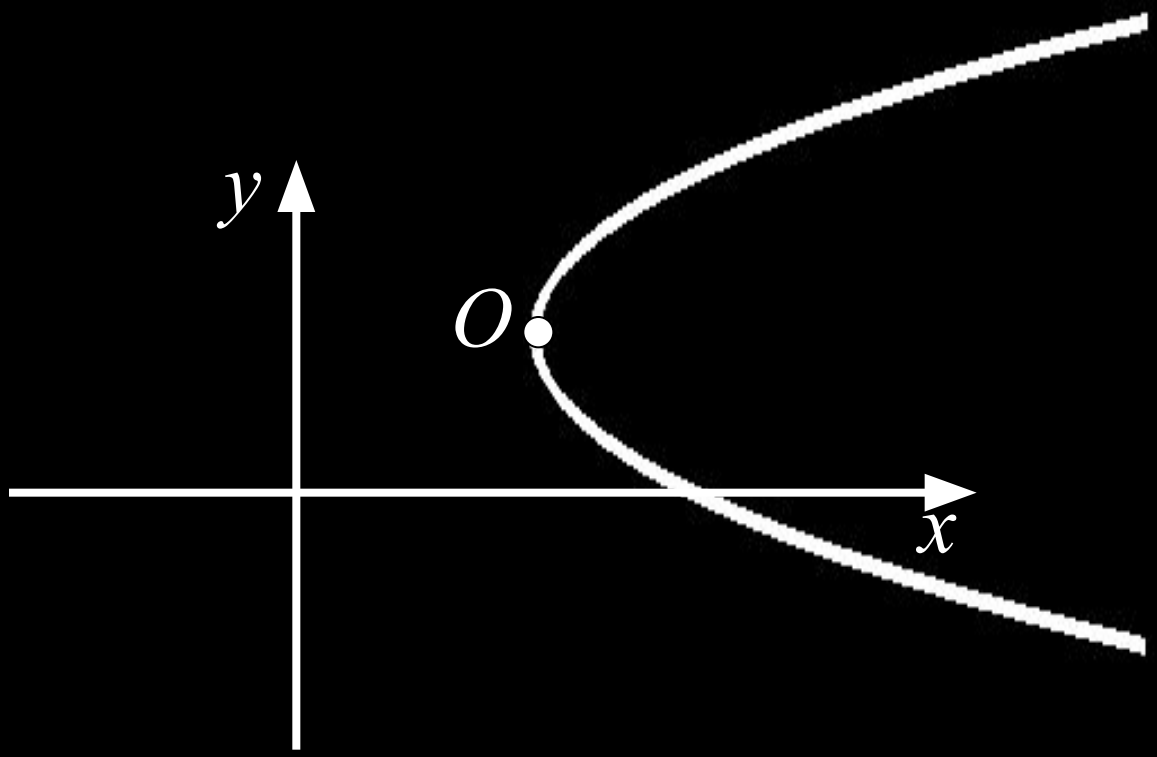
# *Свойства параболы*

1. Симметрия относительно оси $Ox$.

2. $x \geq 0$.

3. Проходит через начало координат.

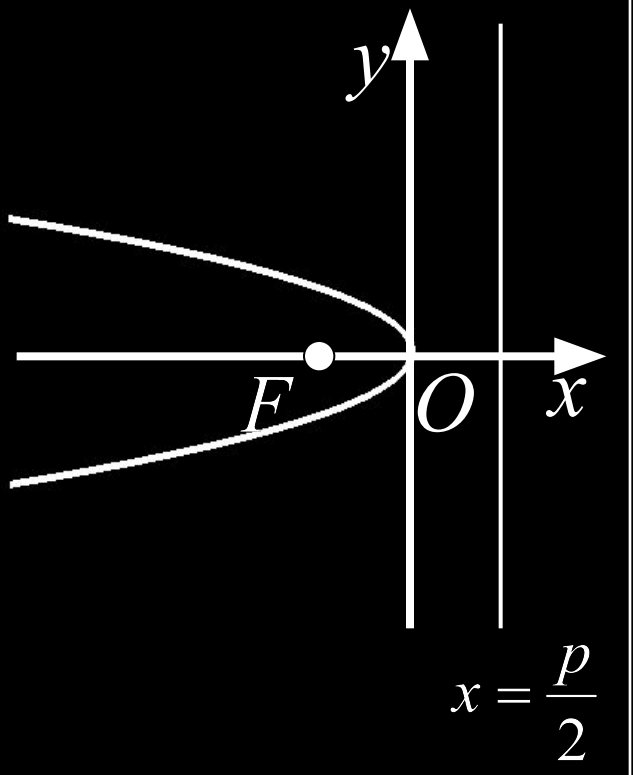
Уравнение параболы с центром в точке $O(x_0; y_0)$.



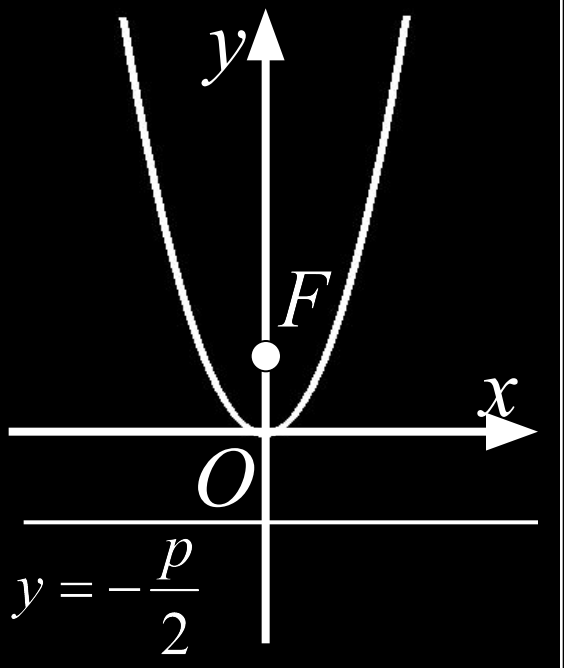

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

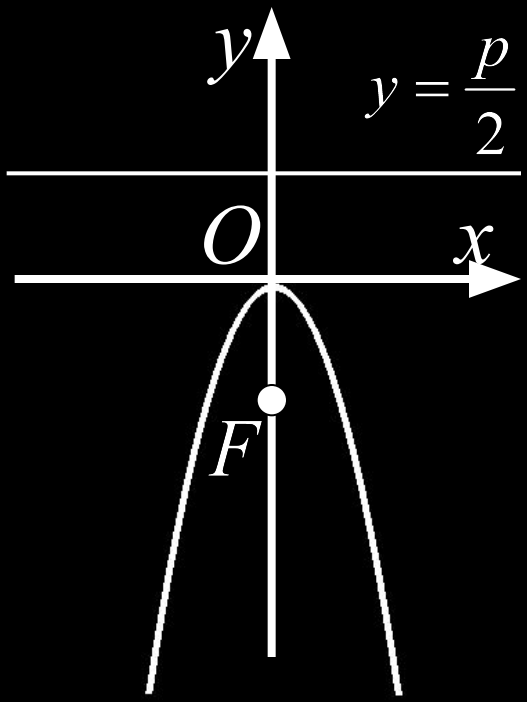
# Расположение параболы относительно осей координат

$y^2 = -2px$




$x^2 = 2py$




$x^2 = -2py$