

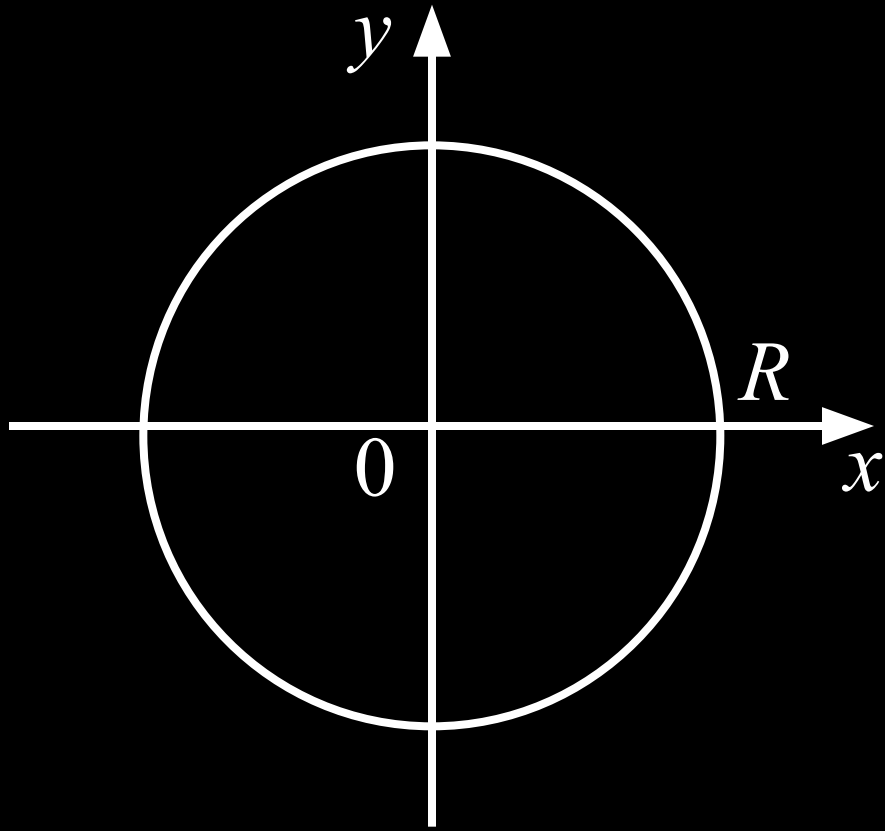
Лекция 7. Кривые второго порядка

1. Окружность.
2. Эллипс.
3. Гипербола.
4. Парабола.

п.1. Окружность.

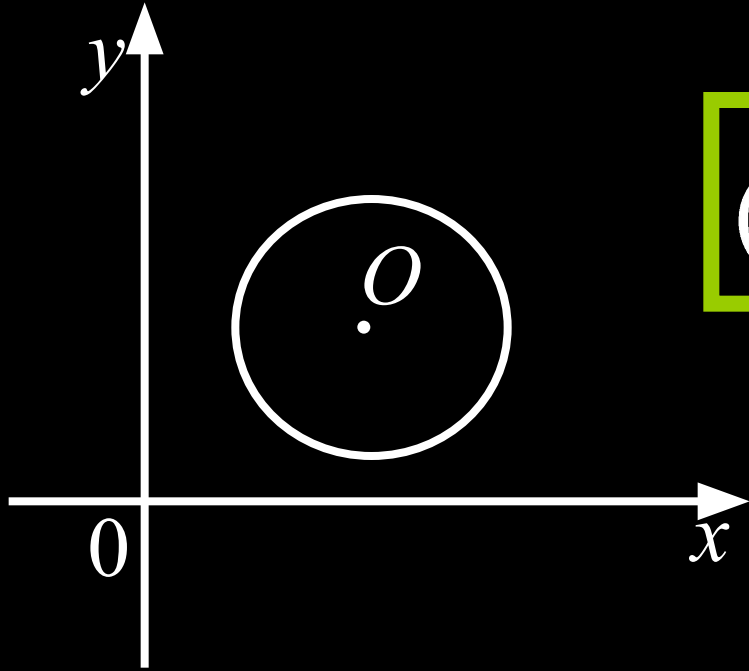
Окружность есть геометрическое множество точек на плоскости, равноудаленных от данной точки.

Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат



$$x^2 + y^2 = R^2$$

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $O(x_0; y_0)$



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

п.2. Эллипс.

Эллипс есть геометрическое место точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0.$$

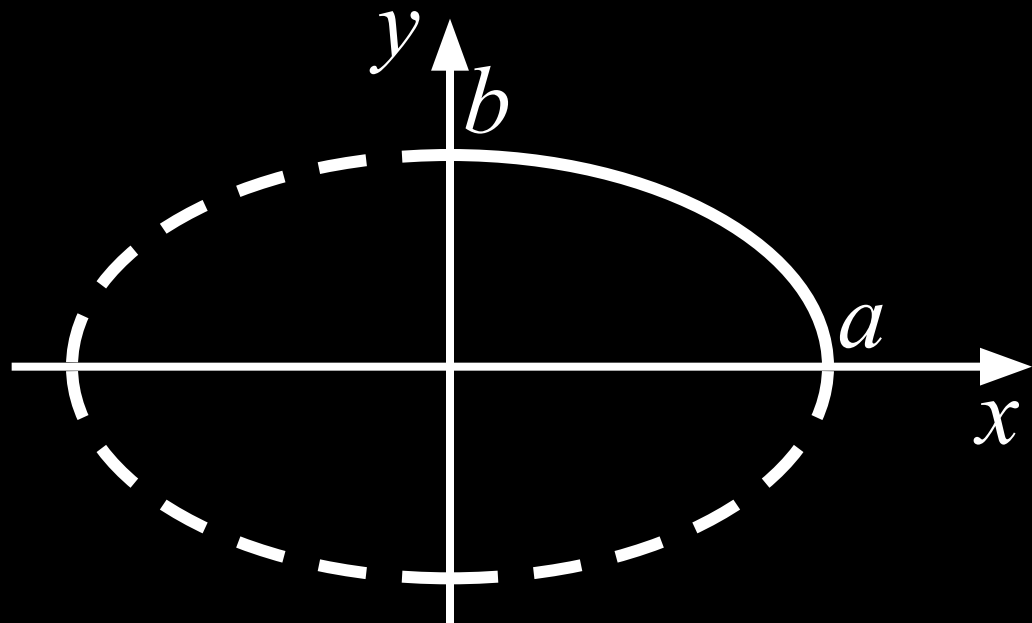
Свойства эллипса

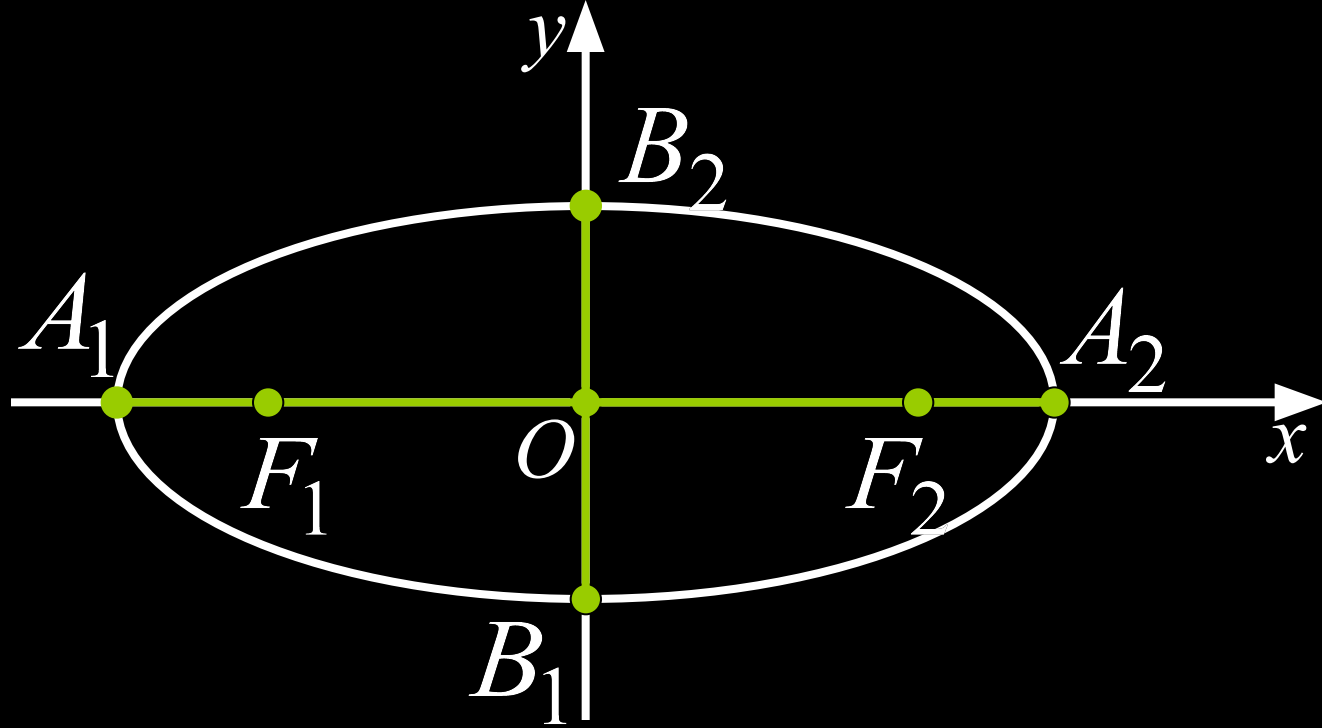
1. Симметрия относительно осей координат и начала координат.

2. $|x| \leq a, |y| \leq b.$

3. I-я четверть:

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$



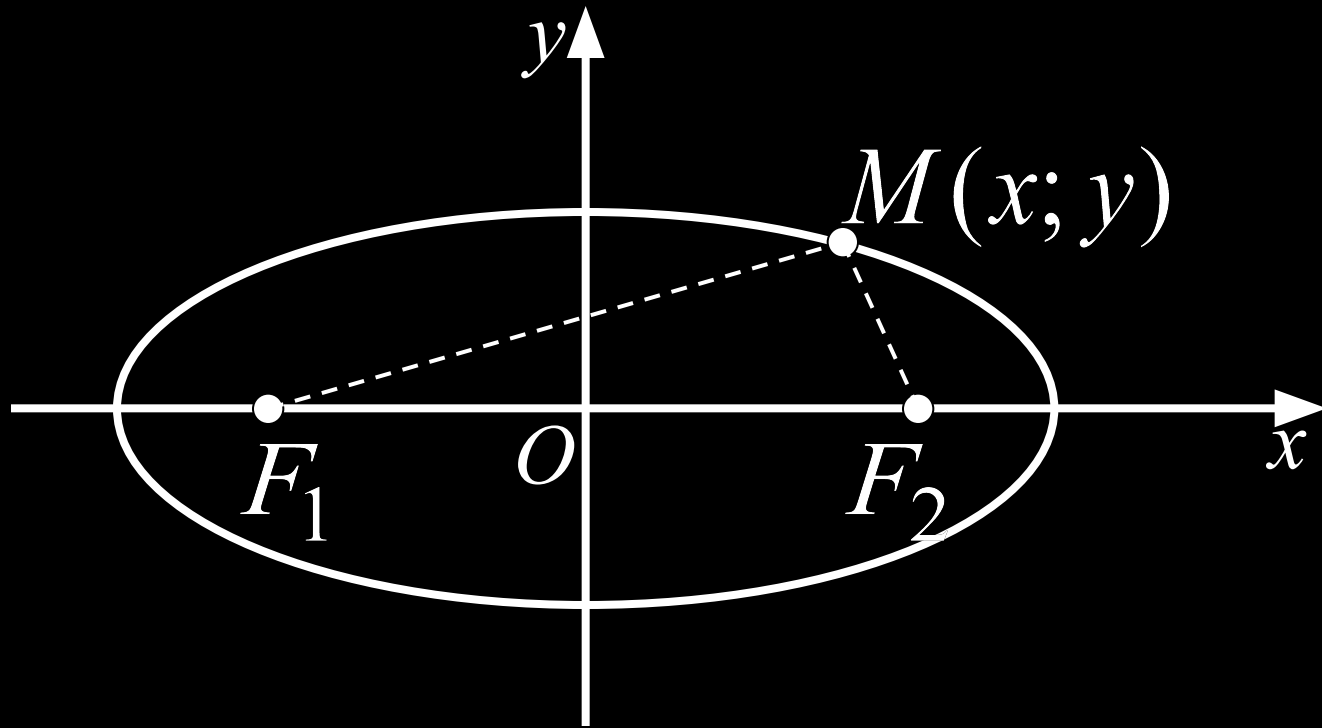


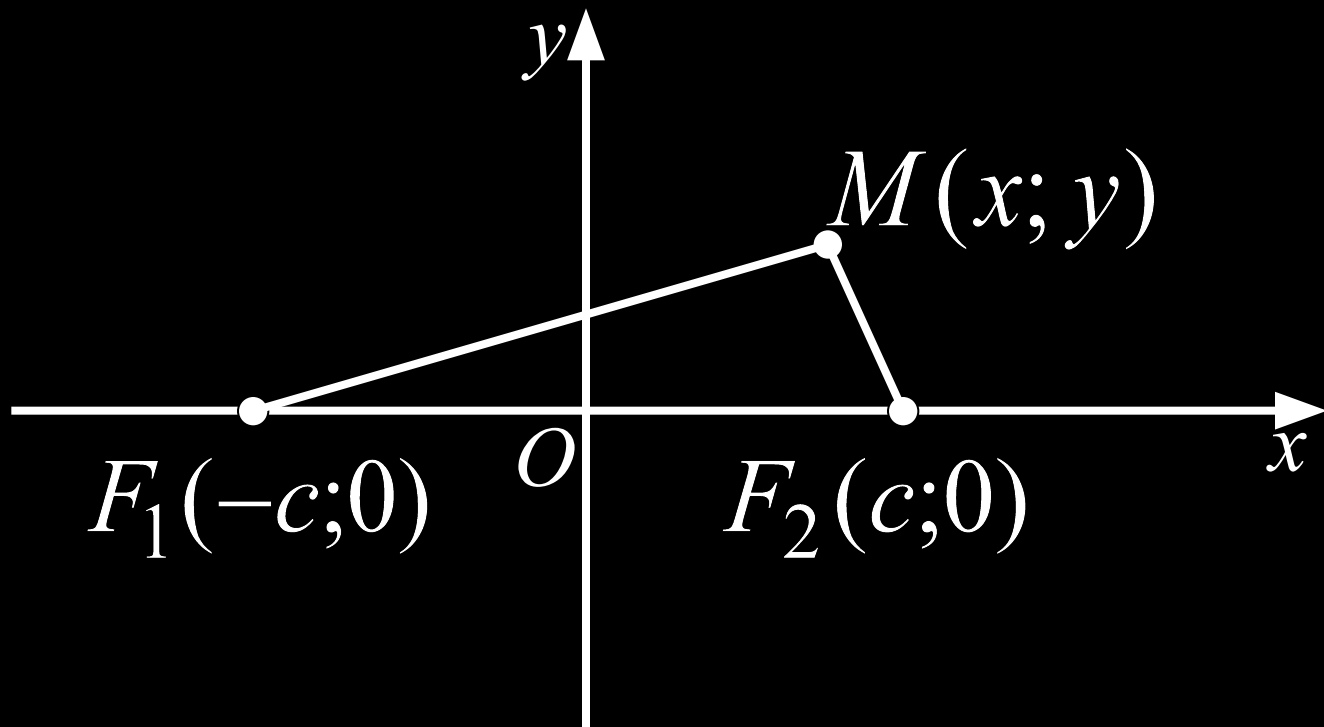
Большая полуось a : $F_1(-a; 0)$, $F_2(a; 0)$, $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$

Малая полуось b : $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Центр эллипса: $O(0; 0)$.

Теорема 1. Точка M плоскости принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда сумма расстояний от фокусов F_1 и F_2 до точки M равна $2a$.





$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Доказательство.

Необходимость.

Пусть точка $M(x; y)$ лежит на эллипсе.

Покажем, что $MF_1 + MF_2 = 2a$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\implies y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)b^2 = \\ &= b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} \end{aligned}$$

$$MF_1 = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} =$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \qquad y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

$$= \sqrt{\underline{x^2} + 2cx + a^2 - \cancel{b^2} + \cancel{b^2} - \frac{b^2 x^2}{\underline{a^2}}} =$$

$$= \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + 2cx + a^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 \frac{c^2}{a^2} + 2cx + a^2} =$$

$$= \sqrt{\left(x \frac{c}{a} + a\right)^2} = \left|x \frac{c}{a} + a\right| = a + x \frac{c}{a}$$

$$MF_1 = a + x \frac{c}{a}$$

$$MF_2 = a - x \frac{c}{a}$$

Самостоятельно

$$MF_1 + MF_2 = a + x \frac{c}{a} + a - x \frac{c}{a} = 2a$$

Достаточность.

Пусть $MF_1 + MF_2 = 2a$

Покажем, что точка $M(x; y)$ лежит на эллипсе.

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\left(\sqrt{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}} \right)^2 = 2a \sqrt{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}$$

$$\cancel{x^2} + \underline{2cx} + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - \underline{2cx} + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 = a^2 (a^2 - 2cx)^2$$

$$a^2 (x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2 cx + c^2 x^2$$

$$\underline{a^2 x^2} - \cancel{2a^2 cx} + \underline{a^2 c^2} + a^2 y^2 = \underline{a^4} - \cancel{2a^2 cx} + \underline{c^2 x^2}$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \implies a^2 - c^2 = b^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

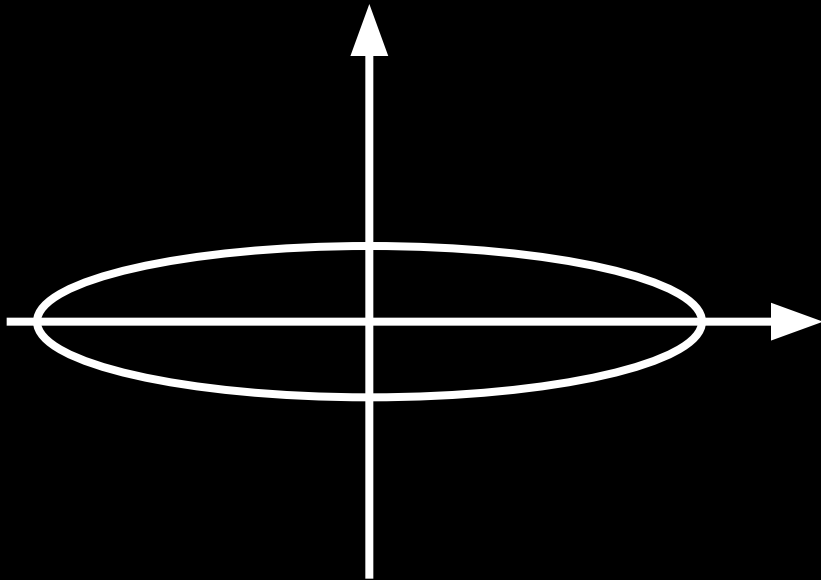
$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Теорема доказана.

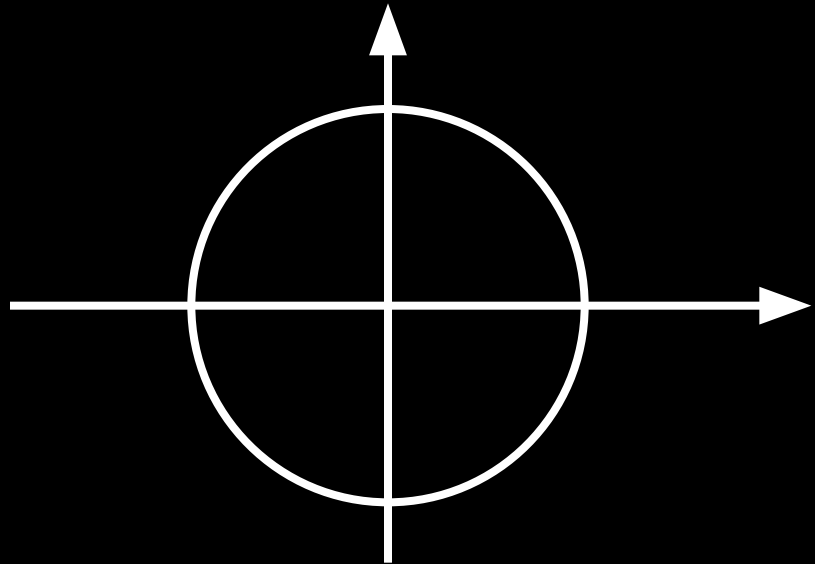
$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$$

— эксцентриситет эллипса

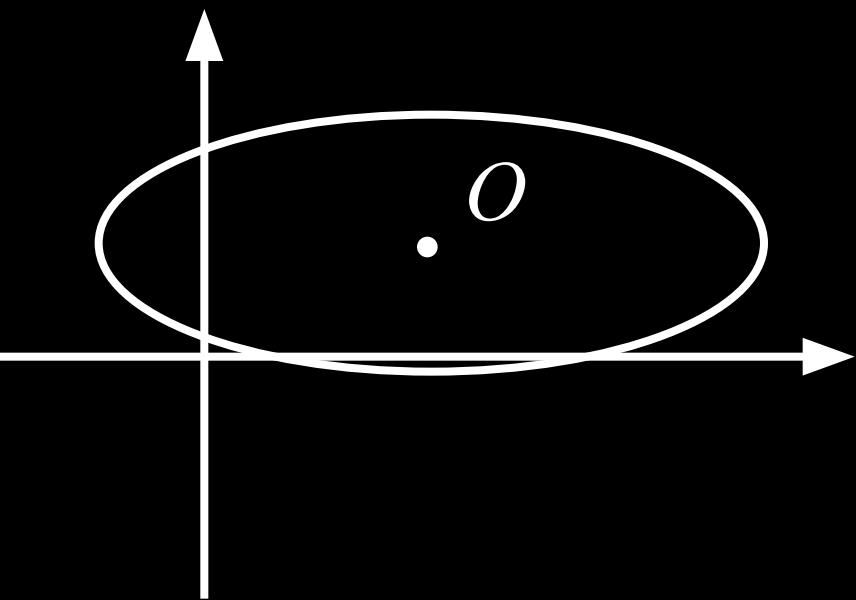
$$\varepsilon \rightarrow 1$$



$$\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow b \rightarrow a$$

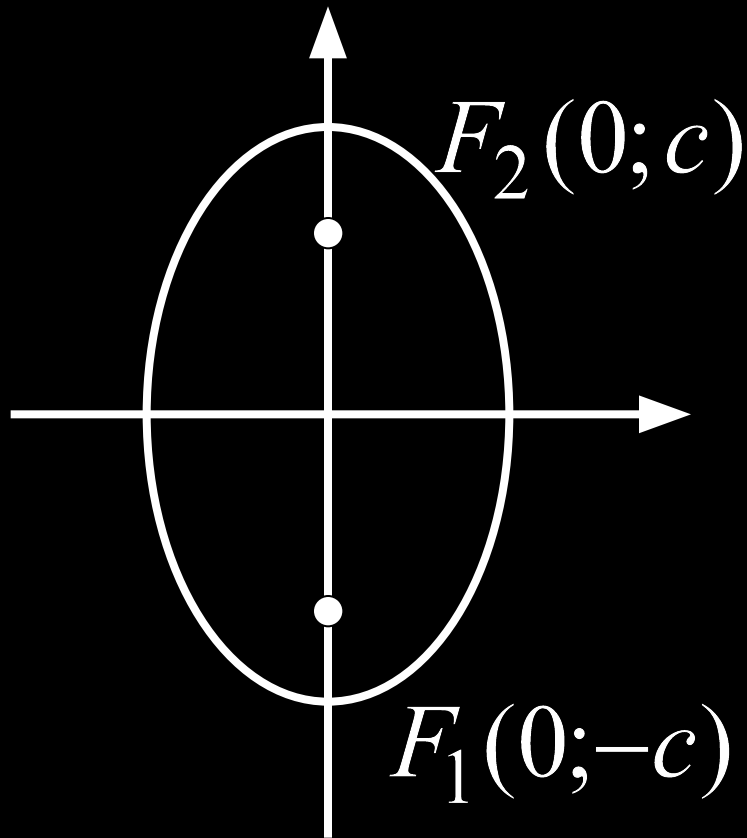


Уравнение эллипса с центром в точке $O(x_0; y_0)$



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$a < b$$



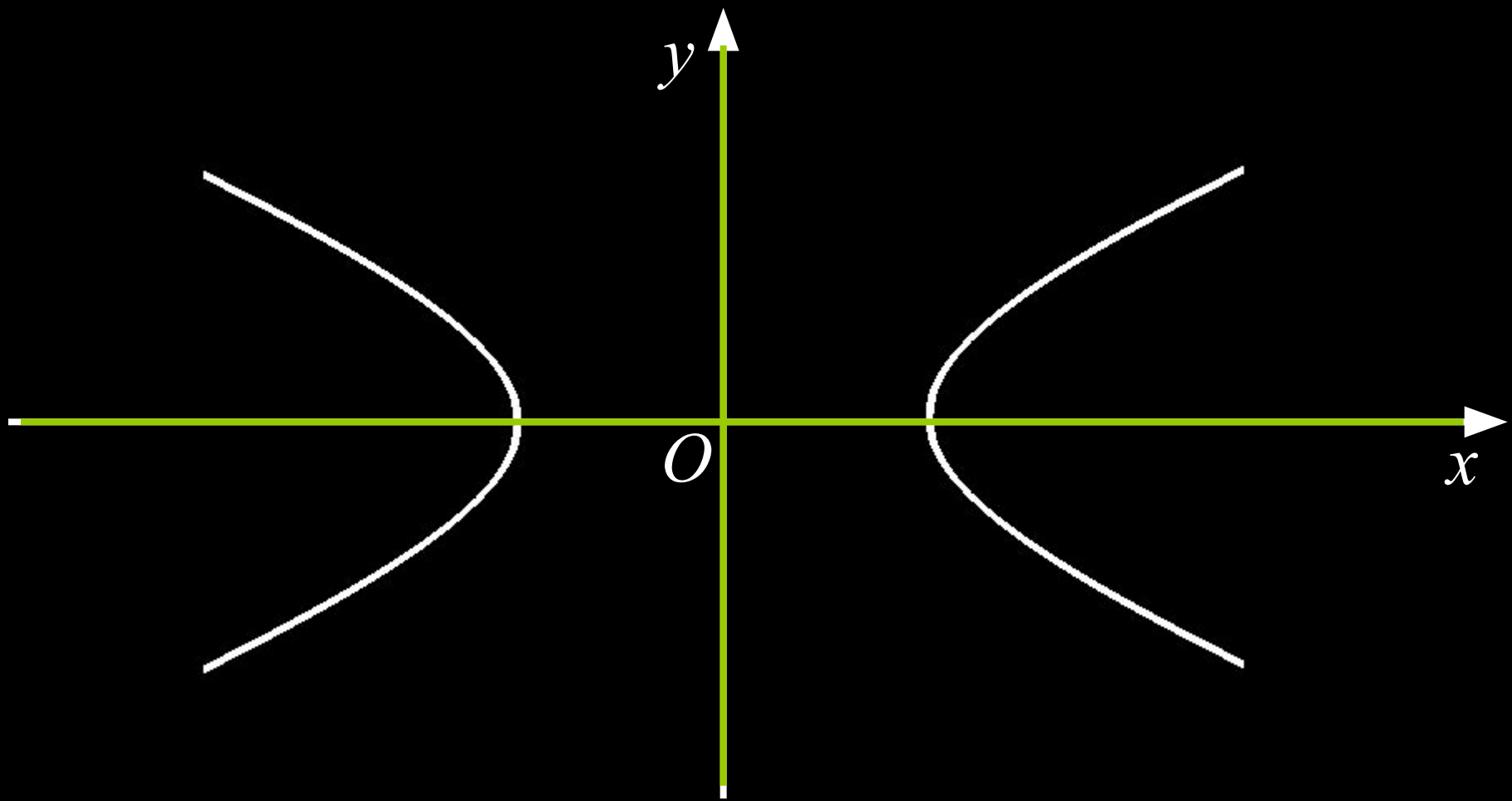
$$c^2 = b^2 - a^2$$

п.3. Гипербола.

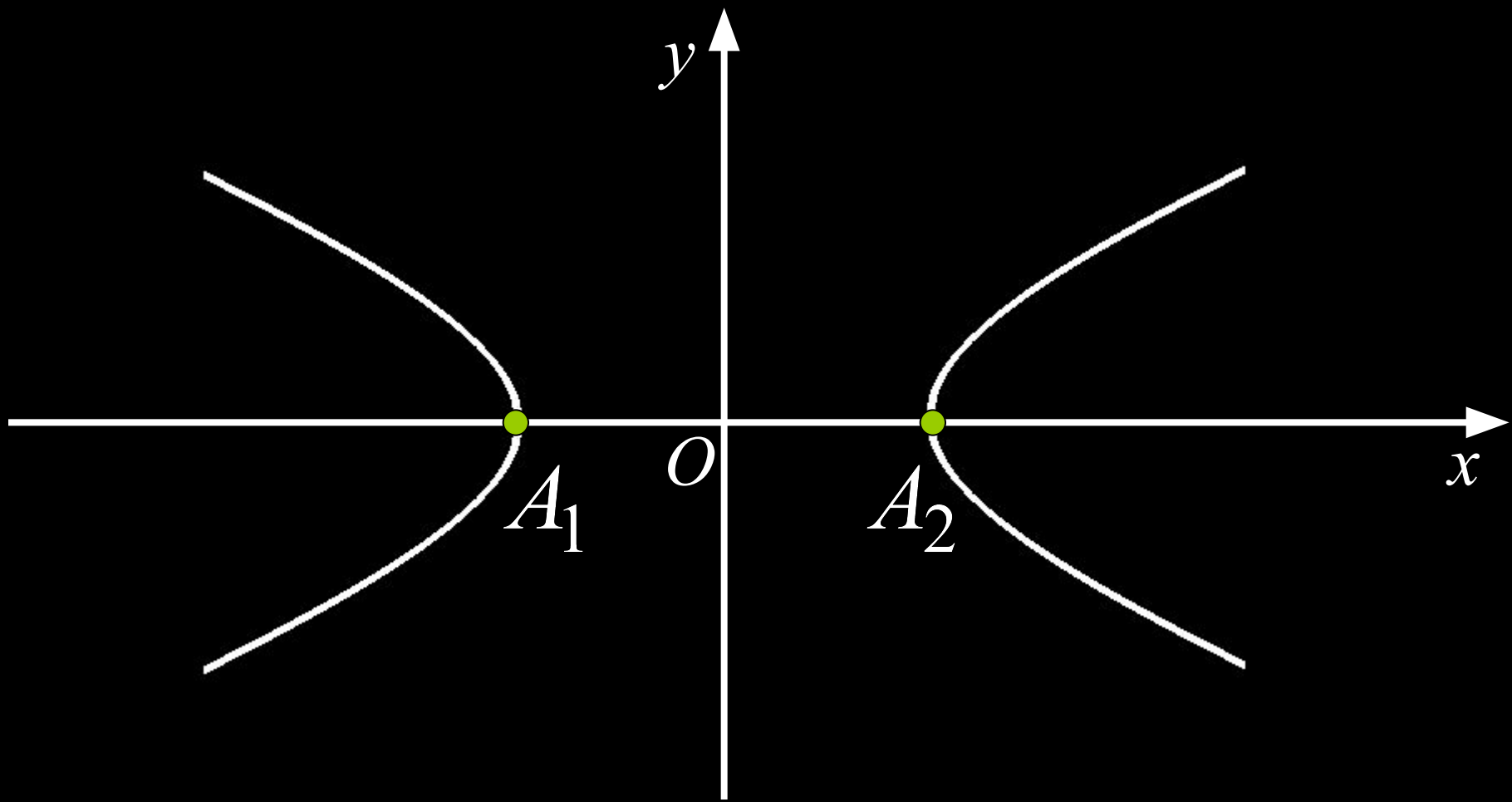
Гипербола есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

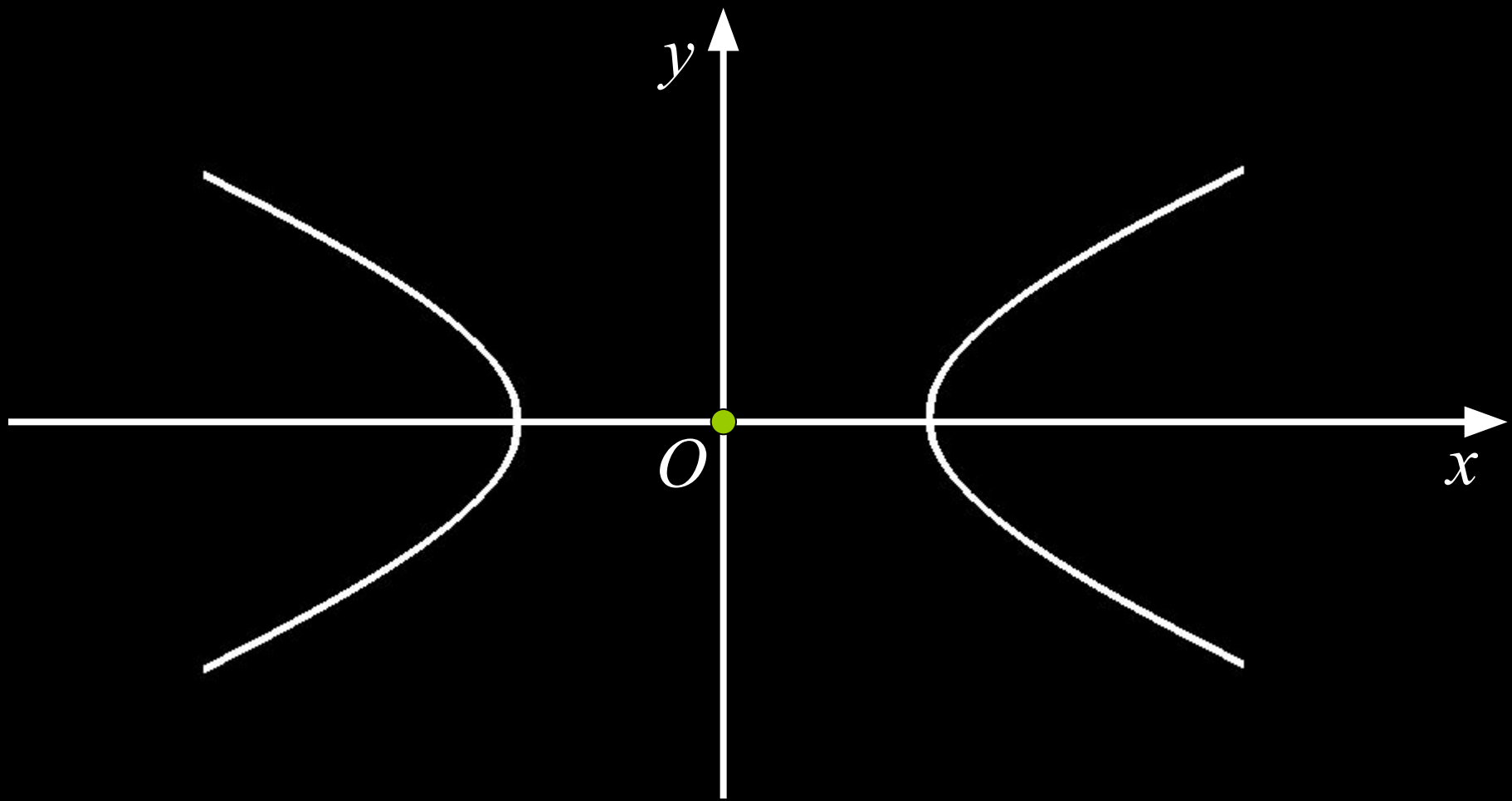
$$a, b > 0.$$



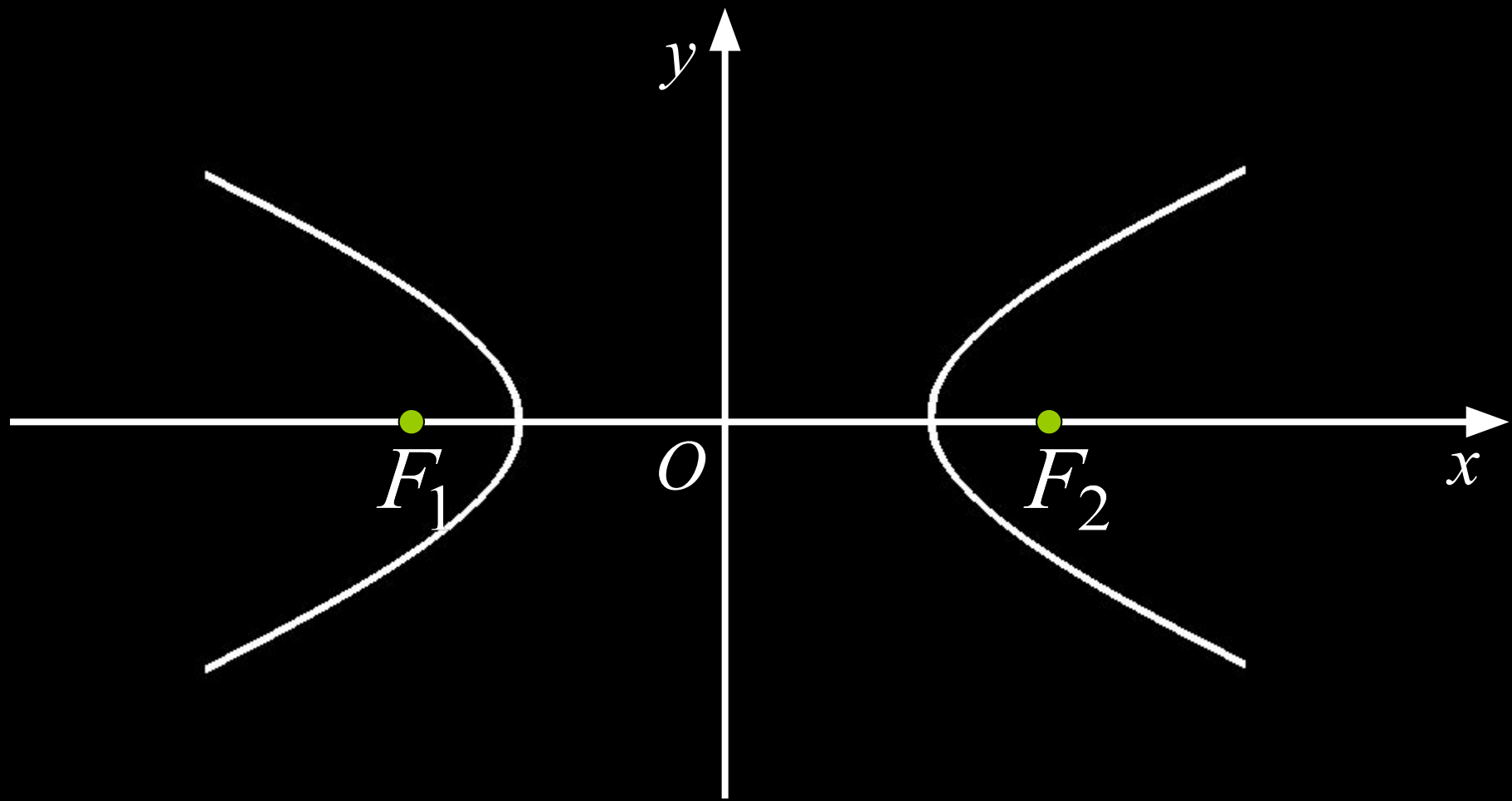
Оси гиперболы: действительная, мнимая.



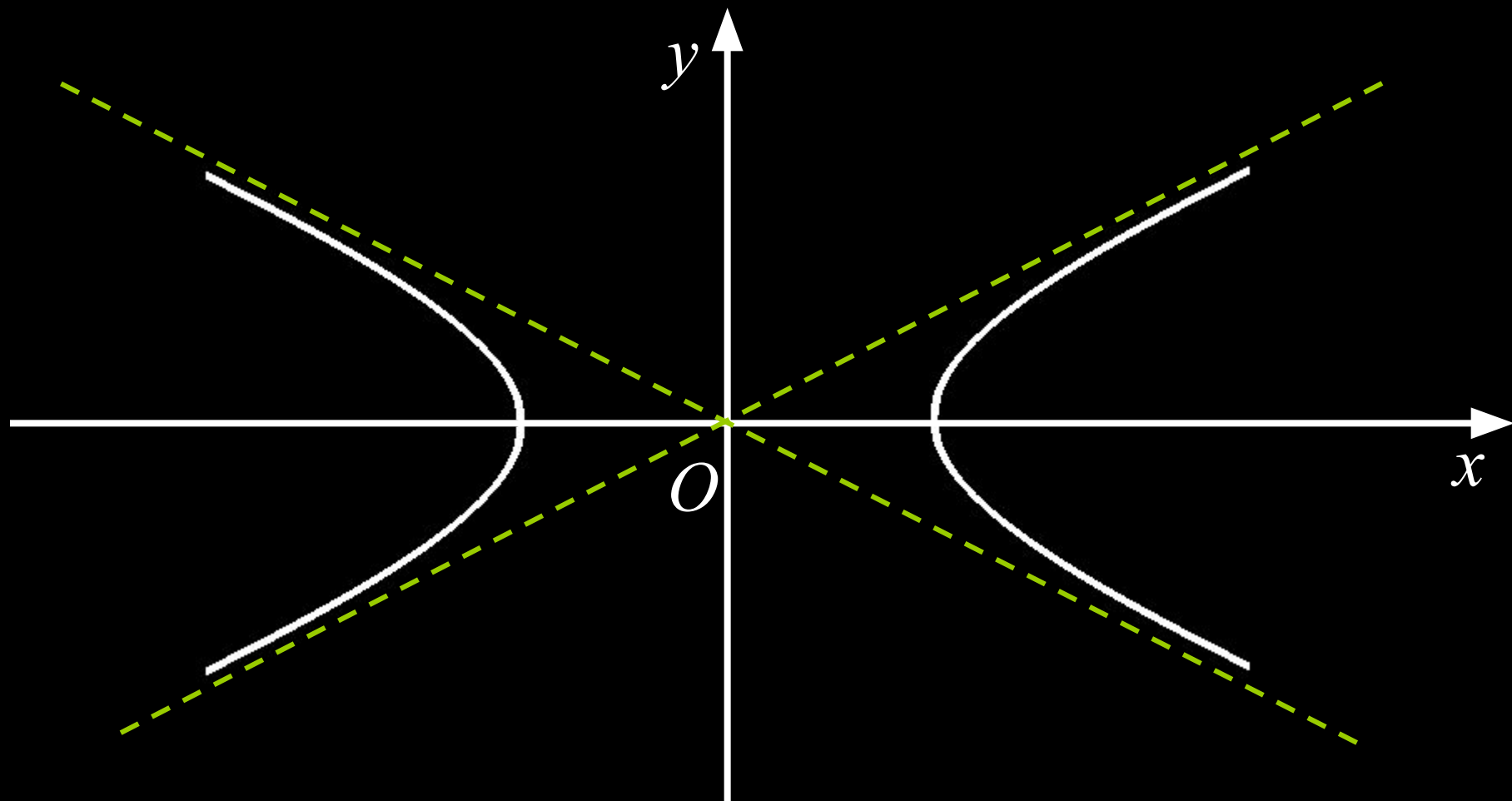
Вершины гиперболы: $A_1(-a;0)$ $A_2(a;0)$



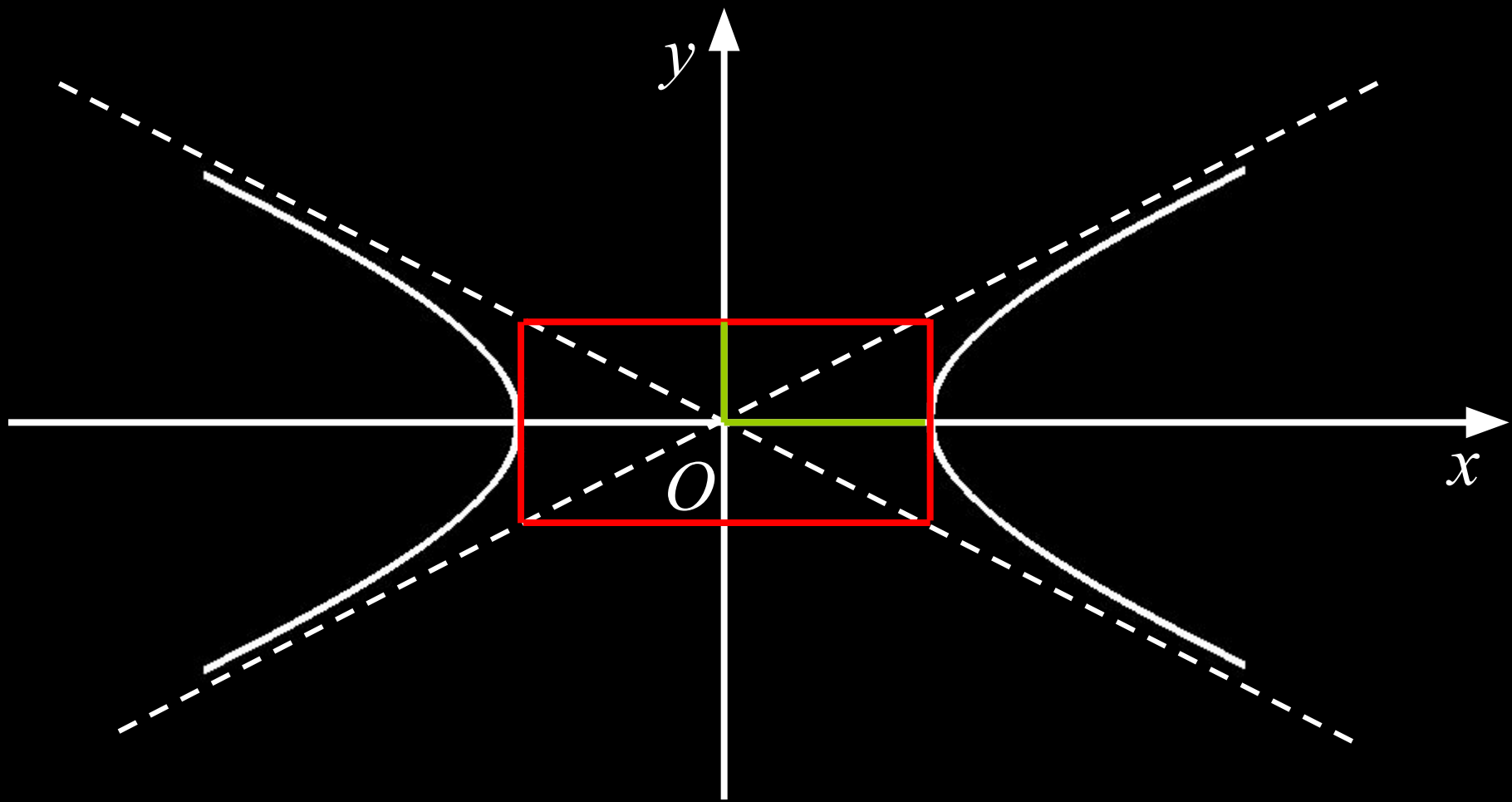
Центр гиперболы: $O(0;0)$



Фокусы гиперболы: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$,
 $c^2 = a^2 + b^2$.

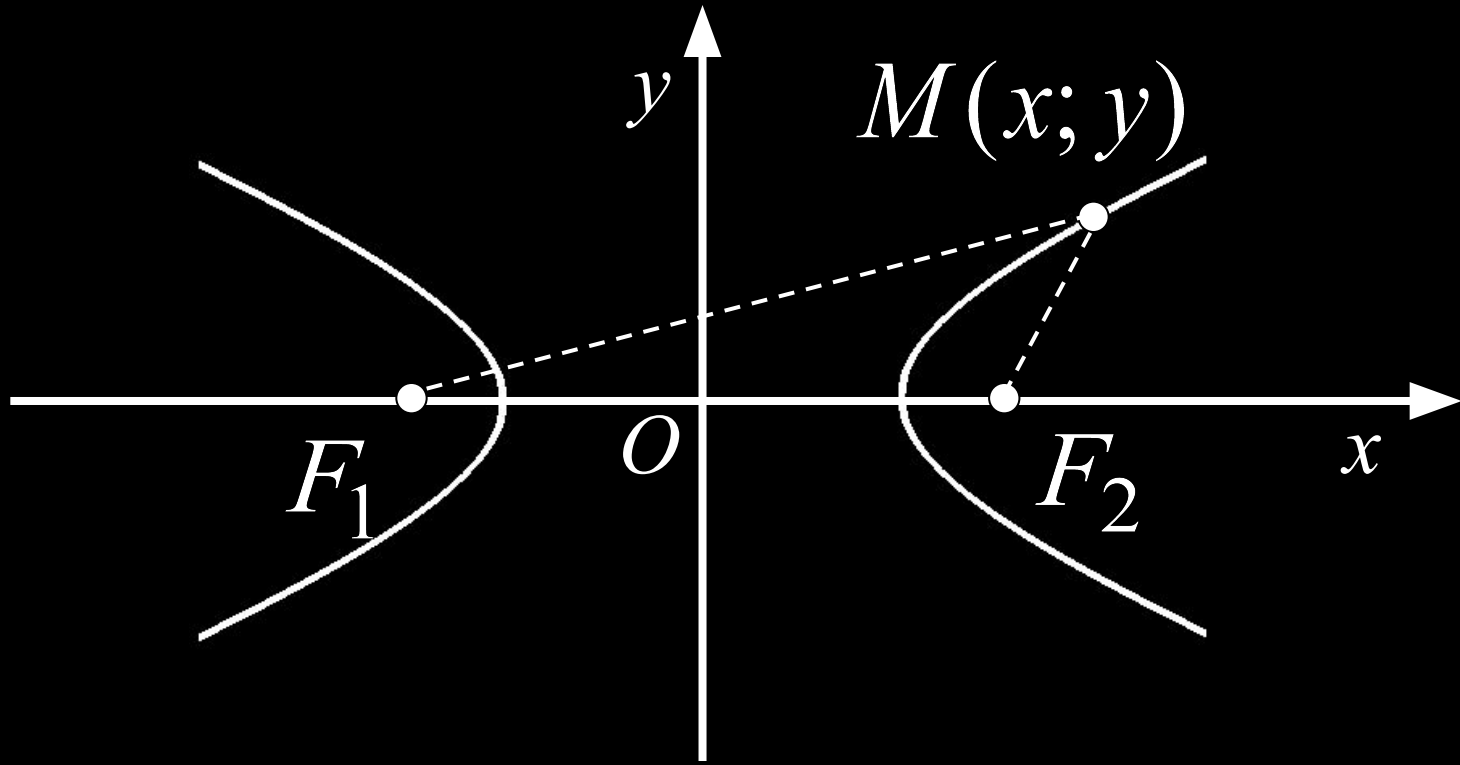


Асимптоты гиперболы: $y = \pm \frac{b}{a} x.$



Полуоси гиперболы: a, b .

Теорема 2. Точка M плоскости принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда абсолютная величина разности расстояний от фокусов F_1 и F_2 до точки M равна $2a$.



Доказательство самостоятельно.

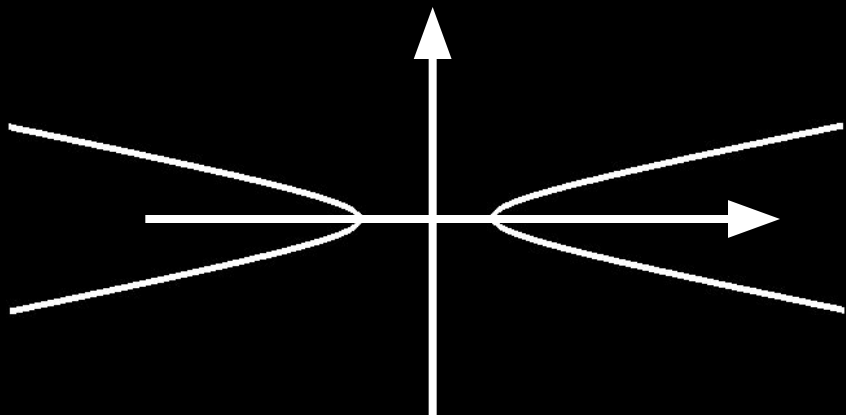
Свойства гиперболы

1. Симметрия относительно осей координат и начала координат.
2. Не пересекает ось Oy .
3. $|x| \geq a$.
4. $a < c$.
5. $a = b$ — равнобочная гипербола.
6. График гиперболы насколько угодно близко приближается к асимптотам.

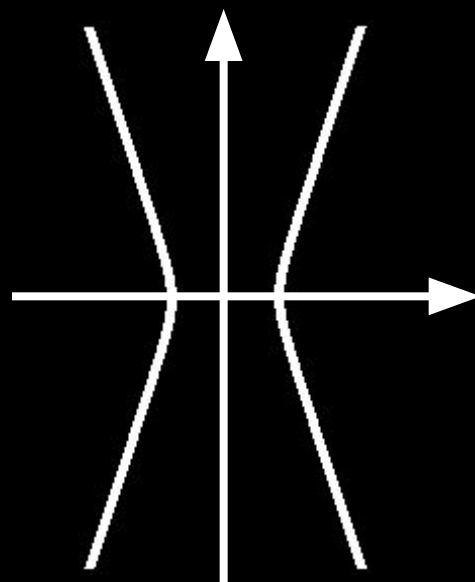
$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$$

– эксцентриситет гиперболы

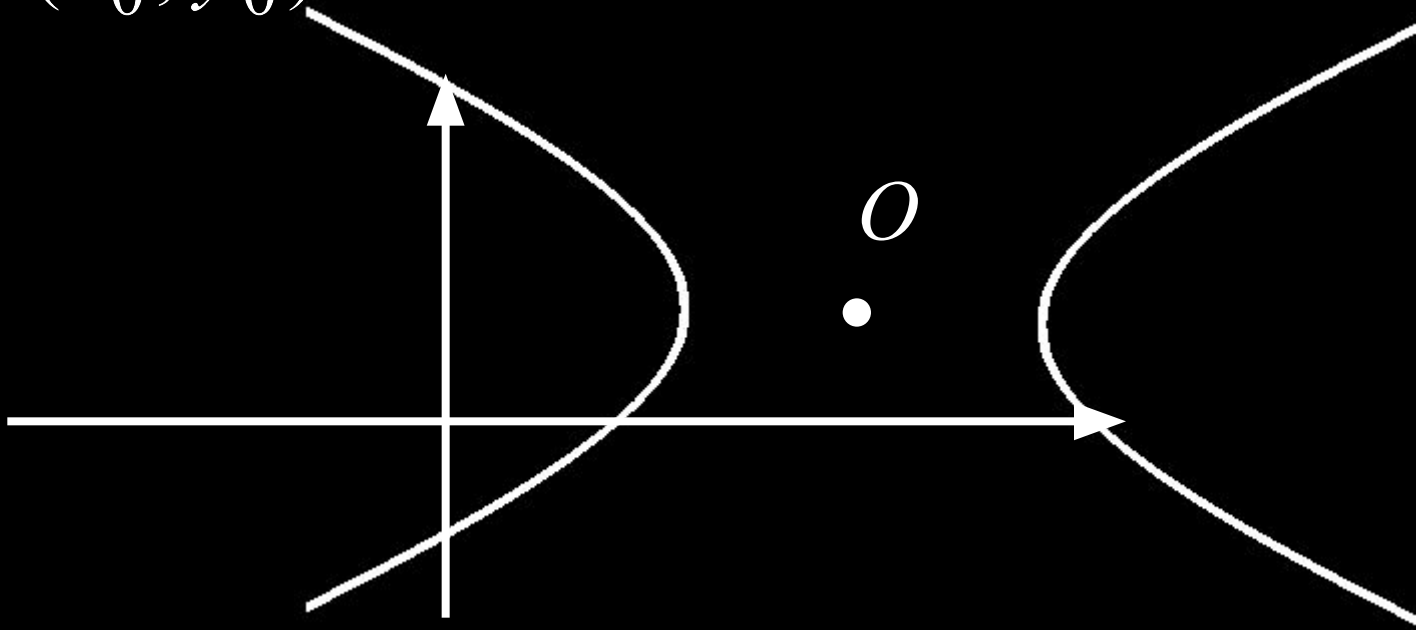
$\varepsilon \rightarrow 1$



$\varepsilon \rightarrow \infty$

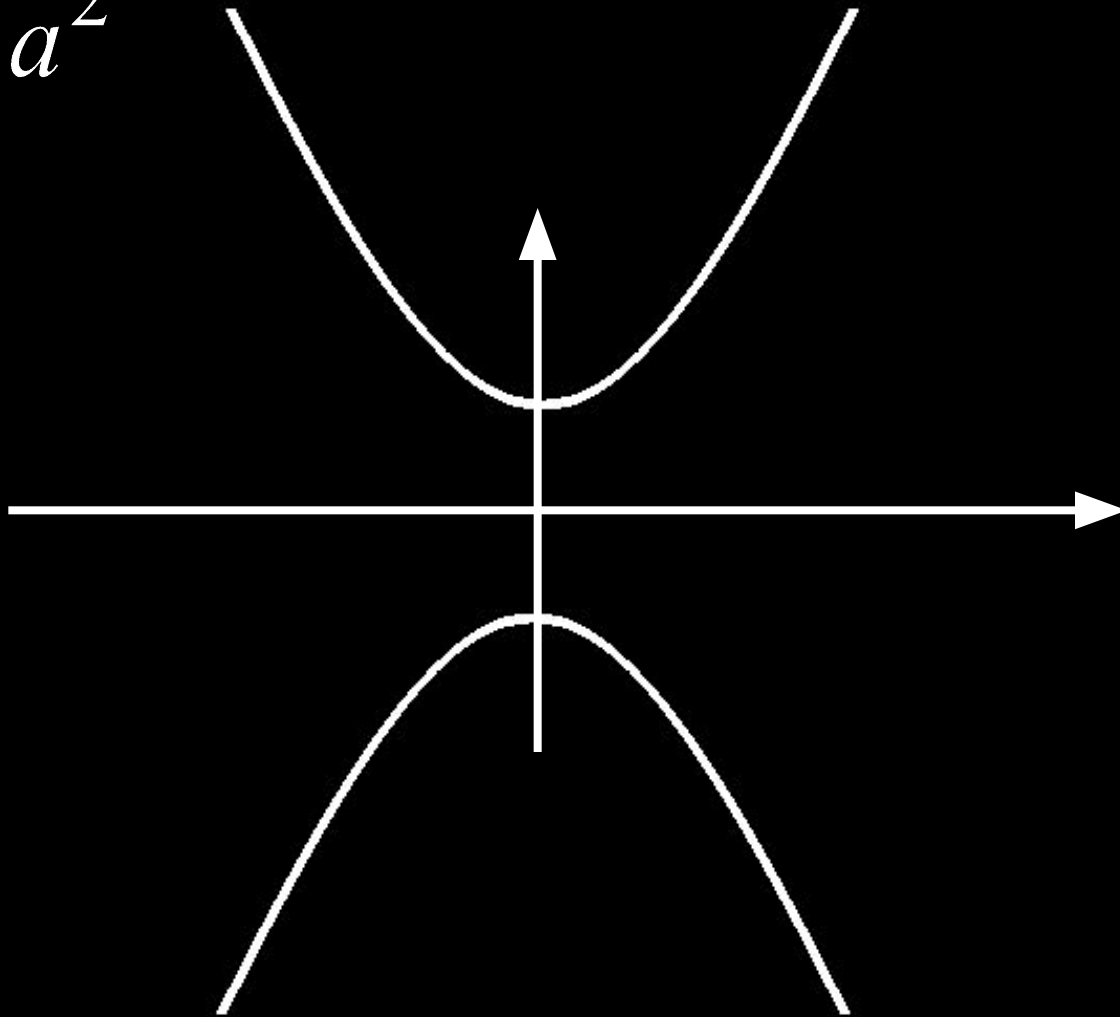


Уравнение гиперболы с центром в точке $O(x_0; y_0)$.



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

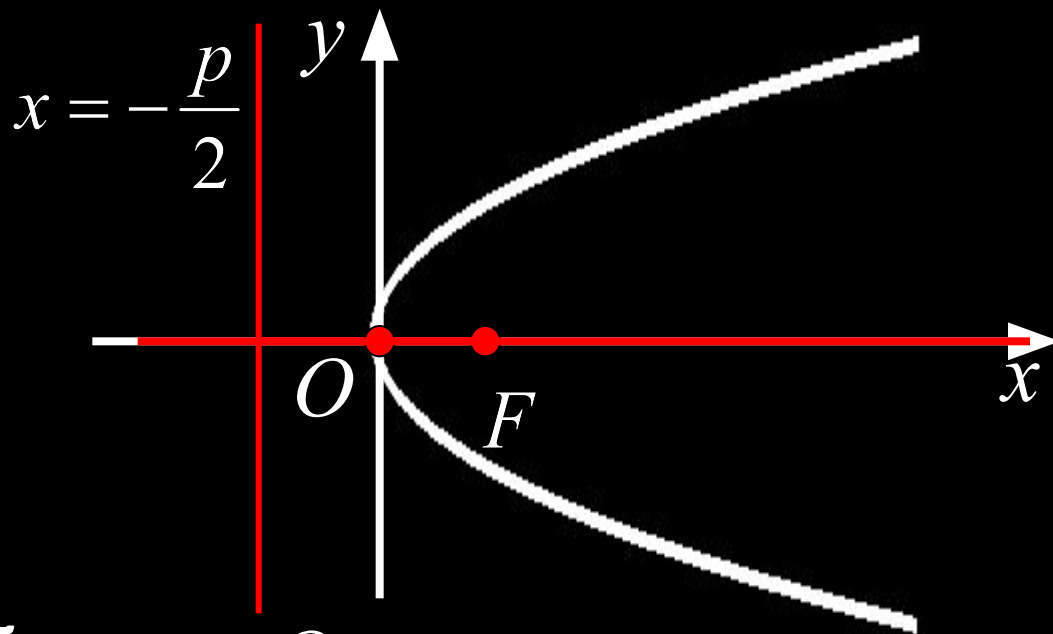
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{— сопряженная гипербола}$$



п.4. Парабола.

Парабола есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y^2 = 2px, \quad p > 0.$$



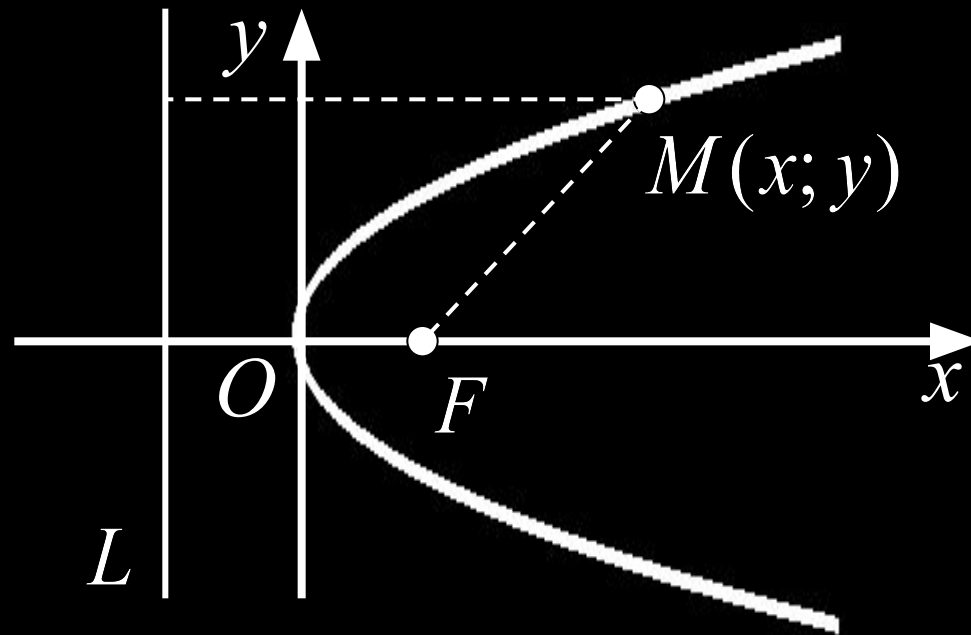
Ось параболы: Ox .

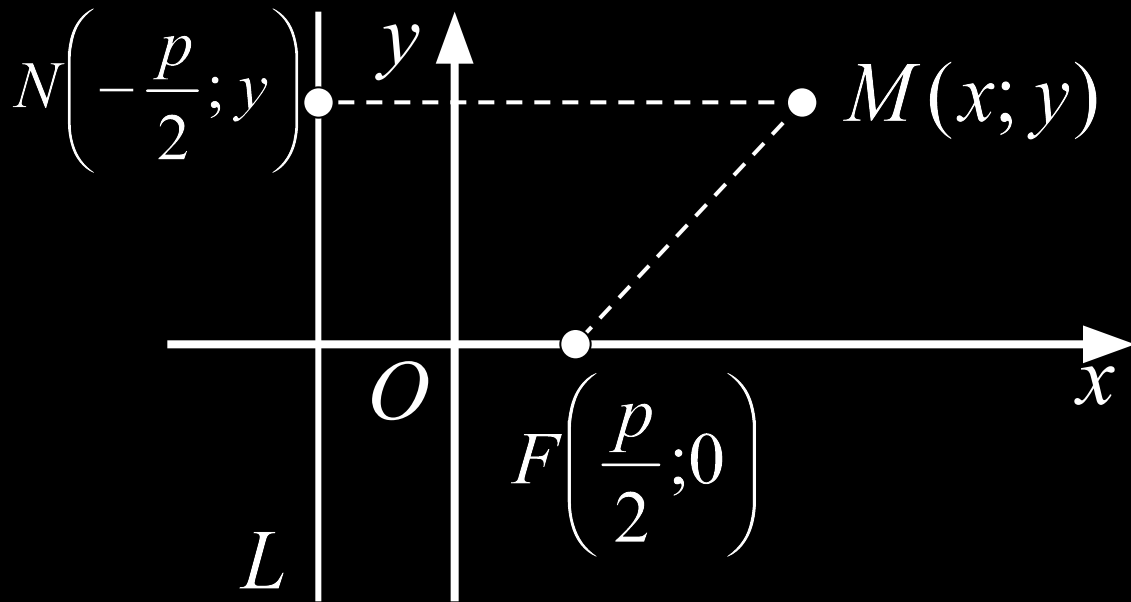
Вершина параболы: $O(0;0)$.

Фокус: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Директриса: $L: x = -\frac{p}{2}$.

Расстояние от фокуса до директрисы: p .

Теорема 3. Точка M плоскости принадлежит параболе тогда и только тогда, когда эта точка равноудалена от фокуса F и директрисы L .





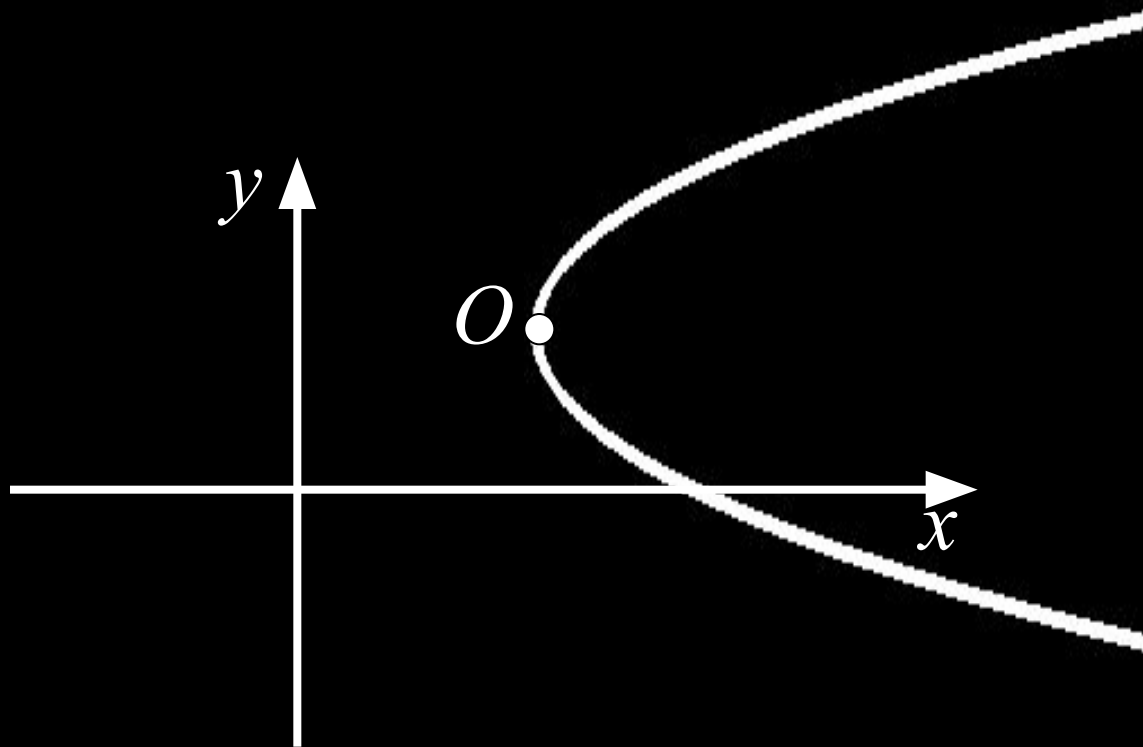
$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \quad MN = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

Доказательство самостоятелно.

Свойства параболы

1. Симметрия относительно оси Ox .
2. $x \geq 0$.
3. Проходит через начало координат.

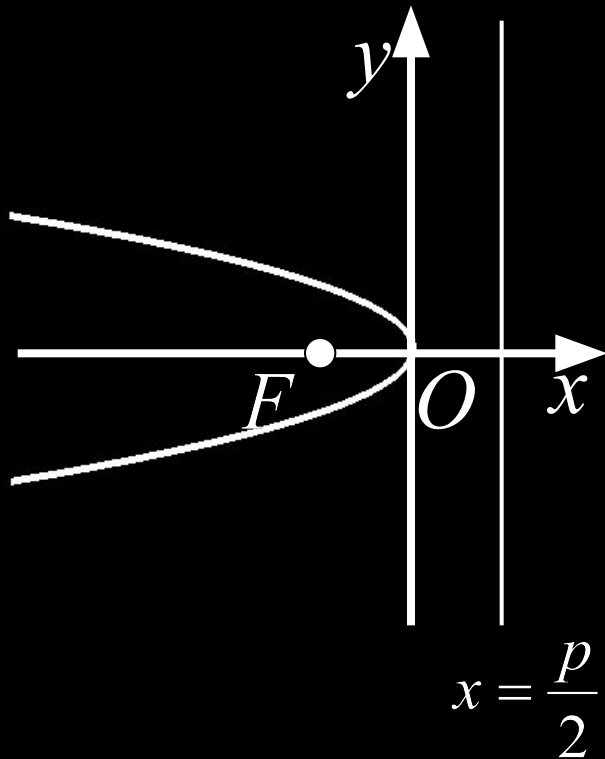
Уравнение параболы с центром в точке $O(x_0; y_0)$.



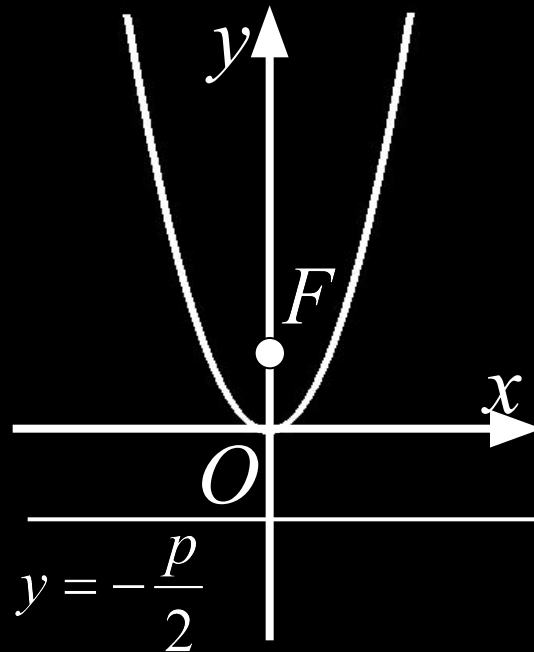
$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Расположение параболы относительно осей координат

$$y^2 = -2px$$



$$x^2 = 2py$$



$$x^2 = -2py$$

