Глава I. Дифференциальные уравнения

Литература

- 1. Демидович, Б.П. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие 3– е изд., стер. / Б.П. Демидович, В.П. Моденов. - СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 288 с. – ISBN 978-5-8114-0677-7.
- 2. Матросов В. Л. , Асланов Р. М. , Топунов М. В. Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. Учебник/ М.: ВЛАДОС, 2011. - 376 с. URL: http://www.biblioclub.ru/book/116579/
- 3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке; Пер. с нем. С.В. Фомина. 6-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2003. – 576 с.
- 4. Пантелеев А.В.Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практический курс [Электронный ресурс]:учеб.пособие с мультимедиа сопровождением.- М.:Логос, 2011.-384 с.
- 5.Берман Г.Н.Сборник задач по курсу математического анализа.-М., 2005.

- **§1. Основные понятия теории ОДУ.**
- Df1. *Дифференциальное уравнение* (*ДУ*) – равенство, содержащее неизвестную функцию под знаком производной или дифференциала.

$y' + 5xy = x^2 - ОДУ,\ y = y(x) - неизвестная$

$функция$

$y''_{xx} + y''_{tt} = 0 - ДУ\ в\ частных\ производных$

- Df2. *Порядком* дифференциального уравнения называется максимальный порядок производной, который встречается в уравнении.

$$x^2 + y^2 + y' = 0$$

$$y'' - 3xy' - x^3y^2 = 0$$

$$(x^2 + 1)dy - ydx = 0$$

$$dy = y'dx$$

$$y' = f(x, y)$$

где

- Df3. *Общим решением* дифференциального уравнения ого порядка называется его решение, выраженное явно относительно неизвестной функции и содержащее независимых произвольных постоянных, т.е. имеющее вид

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ —

независимые произвольные постоянные

- Пример 1. $y'' = x^3 + 4.$ (*)
- Решение.
- $$y' = \int (x^3 + 4) dx,$$

$$y' = \frac{x^4}{4} + 4x + C_1,$$

$$y = \int (\frac{x^4}{4} + 4x + C_1) dx,$$

$$y = \frac{x^5}{20} + 2x^2 + C_1 x + C_2$$

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из общего решения подстановкой вместо произвольных постоянных определённых чисел.

- Df4.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из общего решения подстановкой вместо произвольных постоянных определённых чисел.

$y=\frac{x^5}{20}+2x^2+3x+1$ - частное решение уравнения (*),

$$C_1=3, C_2=1$$

Общим интегралом дифференциального уравнения является его общее решение, выраженное в виде неявной функции.
Общий интеграл дифференциального уравнения n – ого порядка задаётся соотношением

- Df5. ***Общим интегралом*** дифференциального уравнения является его общее решение, выраженное в виде неявной функции.
  Общий интеграл дифференциального уравнения n – ого порядка задаётся соотношением

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

Например
,

$$y - \frac{x^5}{20} - 2x^2 - C_1 x - C_2 = 0$$

- общий интеграл уравнения (*).

$$\Phi(x, y, C) = 0 \qquad \varphi(x, y) = C$$

$$y' = 4x$$

$$y = \int 4x\,dx$$

$$y = 2x^2 + C$$

$$y - 2x^2 = C \qquad y - 2x^2 - C = 0$$

Таблица производных

1. $c' = 0$, *где с-число*			7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	8. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$, **где** $0 \angle a \neq 1$		$(e^x)' = e^x$	9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, **где** $0 \angle a \neq 1$		$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $(\sin x)' = \cos x$			11. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
6. $(\cos x)' = -\sin x$			12. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Рассмотрим примеры применения формулы (2) данной таблицы.

$\int 0dx = C$ (C - **произвольная постоянная**)	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int dx = x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$

Примеры. **Вычислить интеграл.**

д/з

- 1) $x^2 y' = y^2 + 1$

2) $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$

3) $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x$

4) $y' - 2y = e^{2x}$

5) $y' = \dfrac{y}{x} - 5$