

Глава I. Дифференциальные уравнения

Литература

- 1. Демидович, Б.П. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие 3–е изд., стер. / Б.П. Демидович, В.П. Моденов. - СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 288 с. – ISBN 978-5-8114-0677-7.
- 2. Матросов В. Л. , Асланов Р. М. , Топунов М. В. Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. Учебник/ М.: ВЛАДОС, 2011. - 376 с. URL: <http://www.biblioclub.ru/book/116579/>
- 3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке; Пер. с нем. С.В. Фомина. 6-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2003. – 576 с.
- 4. Пантелеев А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практический курс [Электронный ресурс]: учеб. пособие с мультимедиа сопровождением.- М.: Логос, 2011.-384 с.
- 5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.-М., 2005.

- **§1. Основные понятия теории ОДУ.**
- Df1. *Дифференциальное уравнение (ДУ) – равенство, содержащее неизвестную функцию под знаком производной или дифференциала.*

$y' + 5xy = x^2$ – ОДУ, $y = y(x)$ – неизвестная функция

$y''_{xx} + y''_{tt} = 0$ – ДУ в частных производных

- **Df2.** *Порядком* дифференциального уравнения называется максимальный порядок производной, который встречается в уравнении.

$$x^2 + y^2 + y' = 0$$

$$y'' - 3xy' - x^3y^2 = 0$$

$$(x^2 + 1)dy - ydx = 0$$

$$dy = y'dx$$

$$y' = f(x, y)$$

где

- Df3. *Общим решением* дифференциального уравнения *n*-го порядка называется его решение, выраженное явно относительно неизвестной функции и содержащее независимых произвольных постоянных, т.е. имеющее вид

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

где C_1, C_2, \dots, C_n —

независимые произвольные
постоянные

• Пример 1. $y'' = x^3 + 4. \quad (*)$

• Решение.

• $y' = \int (x^3 + 4) dx,$

$$y' = \frac{x^4}{4} + 4x + C_1,$$

$$y = \int \left(\frac{x^4}{4} + 4x + C_1 \right) dx,$$

$$y = \frac{x^5}{20} + 2x^2 + C_1x + C_2$$

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из общего решения подстановкой вместо произвольных постоянных определённых чисел.

- Df4.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из общего решения подстановкой вместо произвольных постоянных определённых чисел.

$$y = \frac{x^5}{20} + 2x^2 + 3x + 1 - \text{частное решение уравнения (*),}$$

$$C_1 = 3, C_2 = 1$$

Общим интегралом дифференциального уравнения является его общее решение, выраженное в виде неявной функции.

Общий интеграл дифференциального уравнения n -ого порядка задаётся соотношением

- **Df5.** **Общим интегралом** дифференциального уравнения является его общее решение, выраженное в виде неявной функции.

Общий интеграл дифференциального уравнения n -ого порядка задаётся соотношением

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

Например

'
 $y - \frac{x^5}{20} - 2x^2 - C_1x - C_2 = 0$ - общий интеграл уравнения (*)

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad \varphi(x, y) = C$$

$$y' = 4x$$

$$y = \int 4x dx$$

$$y = 2x^2 + C$$

$$y - 2x^2 = C$$

$$y - 2x^2 - C = 0$$

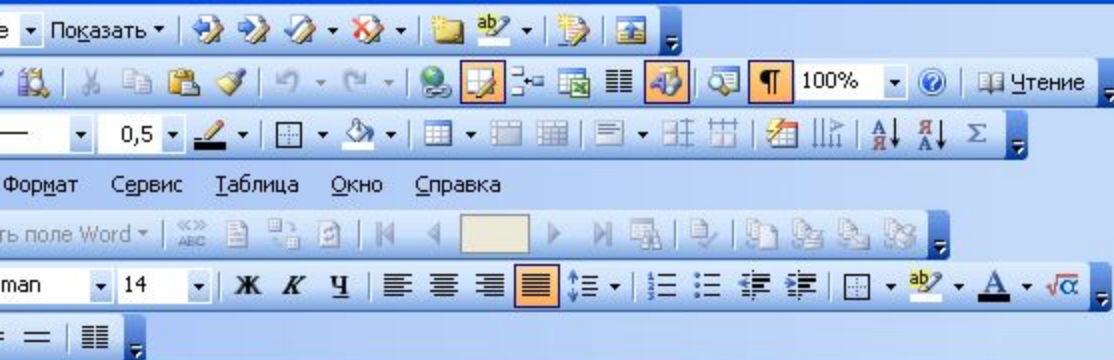


Таблица производных

1. $c' = 0$, где c - число		7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$		8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$, где $0 < a \neq 1$	$(e^x)' = e^x$	9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, где $0 < a \neq 1$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $(\sin x)' = \cos x$		11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
6. $(\cos x)' = -\sin x$		12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Рассмотрим примеры применения формулы (2) данной таблицы.

Матем - Microsoft Word

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Таблица Окно Справка

Введите вопрос

$\int 0 dx = C \cdot (C \text{ -- произвольная постоянная})$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int dx = x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$

Примеры. Вычислить интеграл.

Стр. 28 Разд 1 29/59 На 9.6см Ст 10 Кол 1 ЗАП ИСПР ВДЛ ЗАМ русский (Ро)

пуск SP LFD U2 (H:) озо - Microsoft Word 123 Microsoft PowerPoint ... Матем - Microsoft Word RU 02:29 Wed 9

Д/3

• 1) $x^2 y' = y^2 + 1$

2) $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$

3) $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$

4) $y' - 2y = e^{2x}$

5) $y' = \frac{y}{x} - 5$