

Лекция № 10

Непрерывность функций

Лекция № 10

Непрерывность функций

Учебные вопросы:

В1. Непрерывность функций в точке и на множестве.

В2. Свойства непрерывных функций.

В3. Классификация точек разрыва функции.

Лекция № 10

Непрерывность функций

В1. Непрерывность функций в точке и на множестве.

Лекция № 10

Непрерывность функций

В1. Непрерывность функций в точке и на множестве.

Определение 1. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если она определена в этой точке и ее окрестности, существует предел функции и он равен значению функции в этой точке, то есть*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ или } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$$

Лекция № 10

Непрерывность функций

Определение 2. Если $f(x)$ – непрерывна $\forall x \in X$, то говорят, что она непрерывна на X и пишут $f(x) \in C_X$

Лекция № 10

Непрерывность функций

Теорема 1. Для того, чтобы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ необходимо и достаточно, чтобы бесконечно малому Δx соответствует бесконечно малое Δy .

Лекция № 10

Непрерывность функций

Пример 1. Исследовать функцию $y=x$ на непрерывность.

Пример 2. Исследовать функцию $y = \sin(x)$ на непрерывность.

Лекция № 10

Непрерывность функций

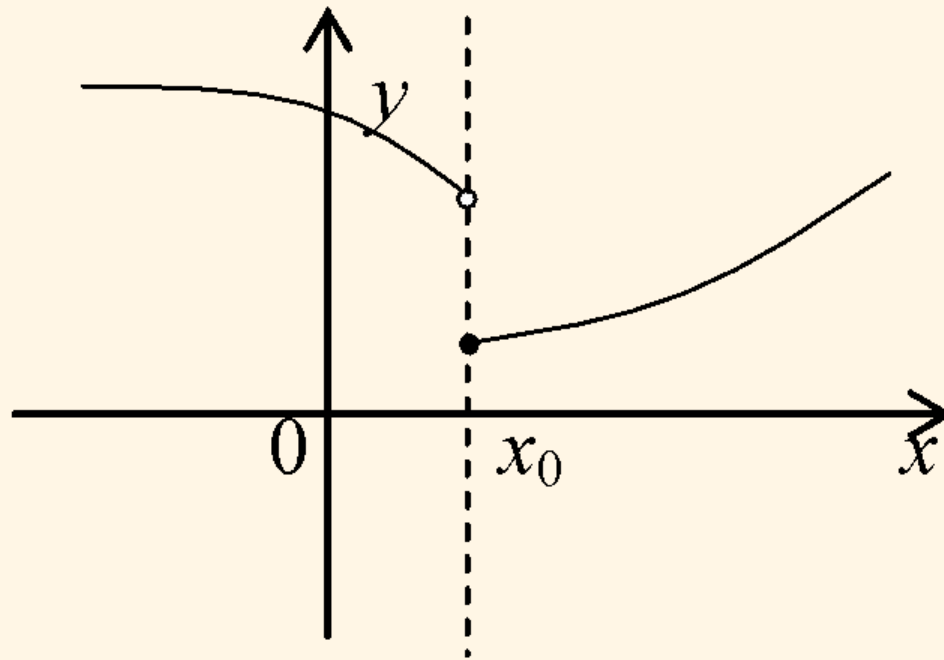


Рисунок 1

Лекция № 10

Непрерывность функций

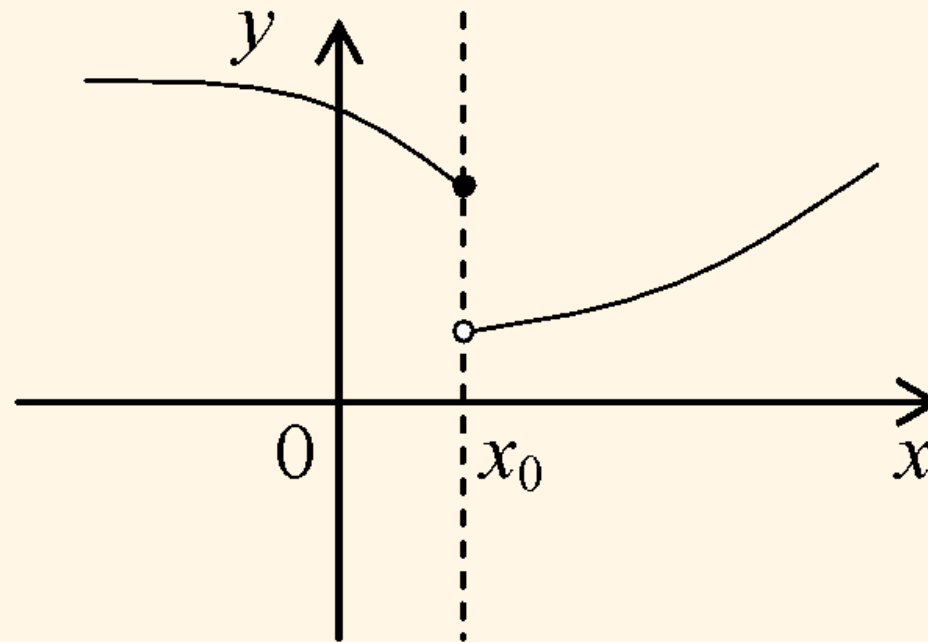


Рисунок 2

Лекция № 10

Непрерывность функций

Определение 3. *Функция $f(x)$ - непрерывна в точке x_0 , если она непрерывна и слева и справа в точке x_0 , т.е.*

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$

- необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке .

Лекция № 10

Непрерывность функций

В2. Свойства непрерывных функций

Теорема 2. Если $U(x)$, $V(x)$ непрерывны в точке x_0 , то функции $U \pm V$, $U \cdot V$, U/V , ($V(x_0) \neq 0$) непрерывны в точке x_0 .

Лекция № 10

Непрерывность функций

Теорема 3. Если функция $f(u)$ непрерывна в точке u_0 , а функция $u=\varphi(x)$ – непрерывна в точке x_0 , ($\varphi(x_0)=u_0$), тогда сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Лекция № 10

Непрерывность функций

Теорема 4. Основные элементарные функции (степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрическим) непрерывны в своей области определения.

Лекция № 10

Непрерывность функций

Свойства функций непрерывных на отрезке

Теорема 5 (Больцано-Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков, тогда между a и b найдется точка c , в которой функция обращается в нуль $f(c)=0$ ($a < c < b$).

Лекция № 10

Непрерывность функций

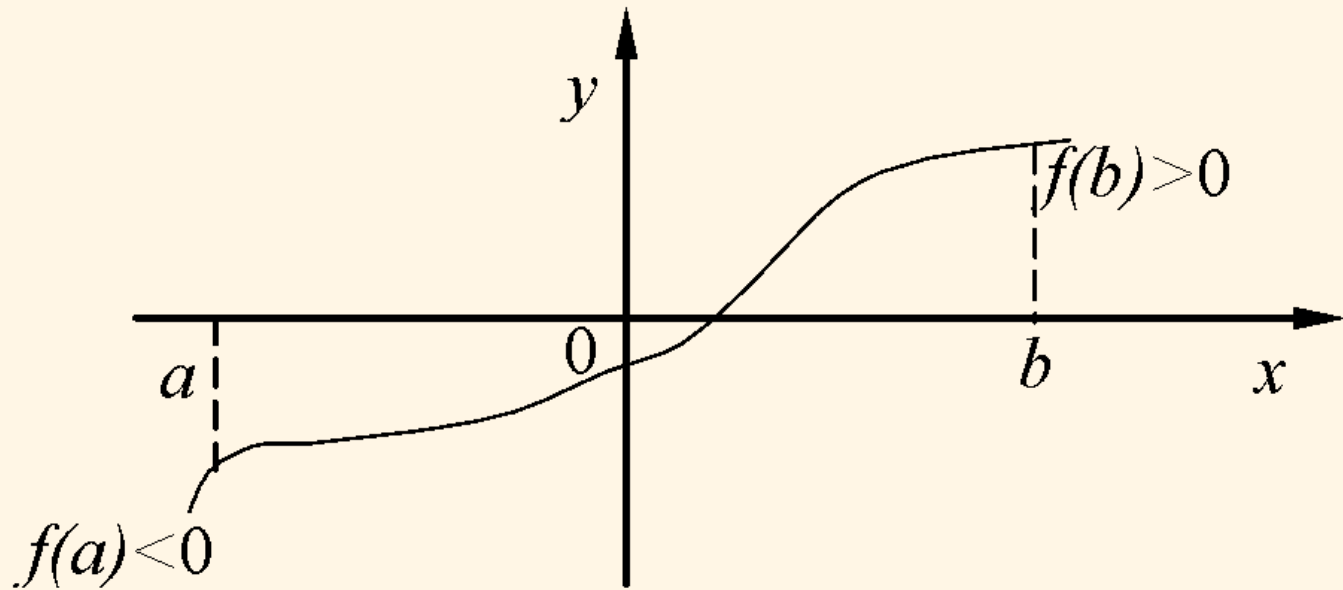


Рисунок 3

Лекция № 10

Непрерывность функций

Теорема 6 (о промежуточных значениях).
Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает неравные значения $f(a)=A$ и $f(b)=B$, то, каково бы ни было число C , лежащее между A и B , найдется такая точка c между a и b , что

$$f(c) = C.$$

Лекция № 10

Непрерывность функций

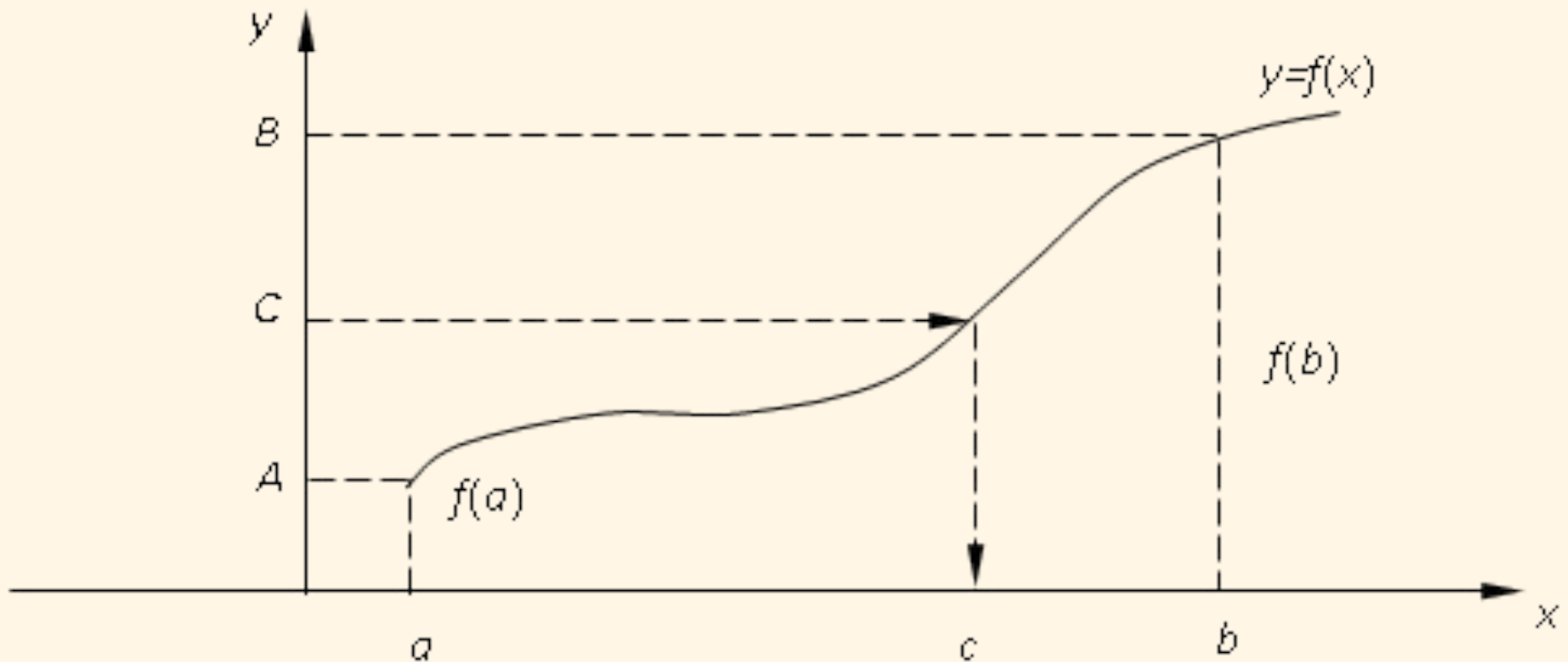


Рисунок 4

Лекция № 10

Непрерывность функций

Теорема 7. (Первая теорема Вейерштрасса)

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке $[a, b]$ выполняется условие

$$-M \leq f(x) \leq M.$$

.

Лекция № 10

Непрерывность функций

Теорема 8 (Вторая теорема Вейерштрасса).
Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она ограничена снизу и сверху, то есть существуют такие постоянные и конечные числа m и M , что

$$m \leq f(x) \leq M \text{ при } a \leq x \leq b.$$

Лекция № 10

Непрерывность функций

В3. Классификация точек разрыва функции

Определение 4. *Точкой разрыва функции $f(x)$ называется точка x_0 , в которой функция $f(x)$ не обладает свойством непрерывности.*

Лекция № 10

Непрерывность функций

Определение 5. Если у функции $f(x)$ в точке x_0 существуют конечные левый и правый пределы $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$, но или

а) $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, или

б) $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, но либо

$f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$, либо $f(x_0)$ не существует, то точку x_0 называют **точкой разрыва первого рода**.

Лекция № 10

Непрерывность функций

Определение 6. Если в x_0 разрыв первого рода и $f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$ либо $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, а $f(x_0)$ не существует, то разрыв называется **устранимым разрывом первого рода**

Лекция № 10

Непрерывность функций

Определение 7. *Если в x_0 разрыв первого рода и $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, то разрыв называется неустранимым разрывом первого рода .*

Лекция № 10

Непрерывность функций

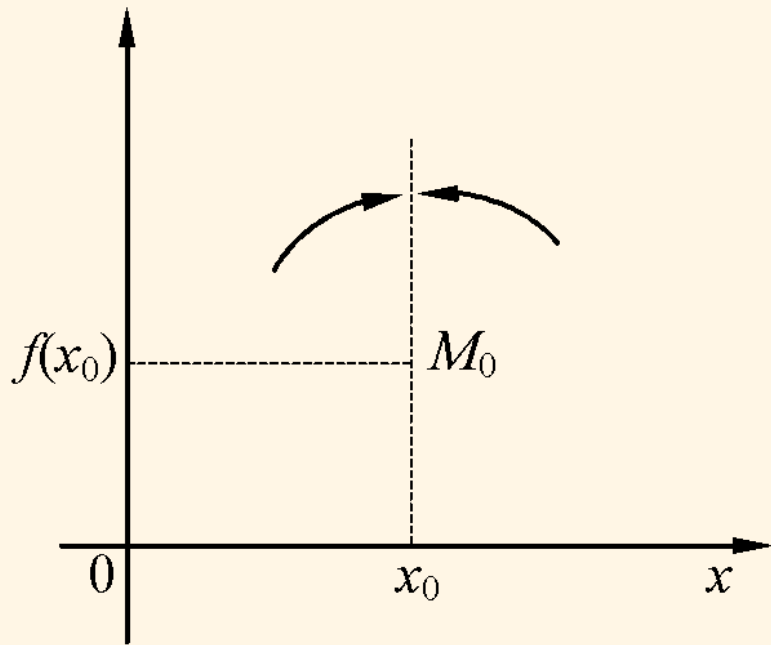


Рисунок 5

Устранимый разрыв первого рода

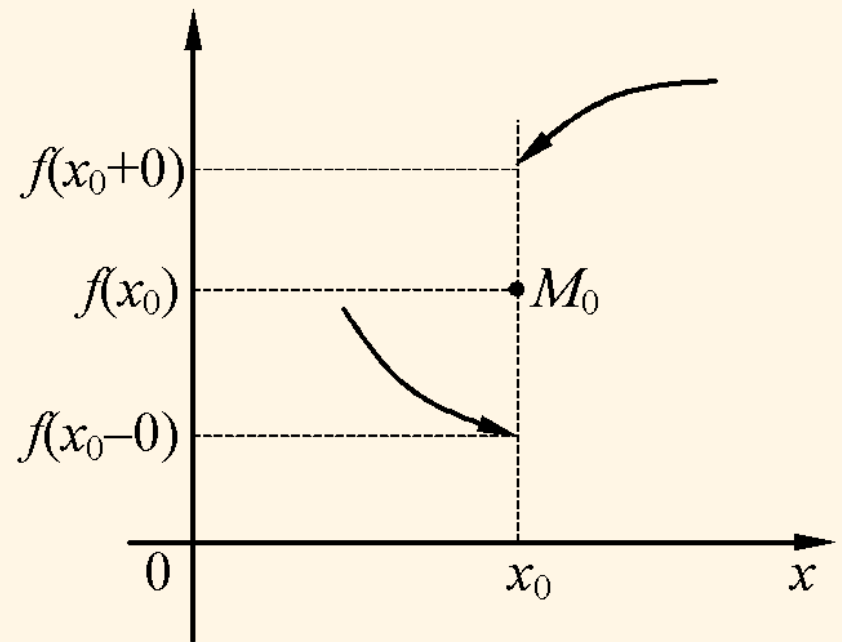


Рисунок 6

Неустранимый разрыв первого рода

Лекция № 10

Непрерывность функций

Определение 8. *Если не существует хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ или хотя бы один из них равен бесконечности, то x_0 – называют **точкой разрыва функции $f(x)$ второго рода** .*

Лекция № 10

Непрерывность функций

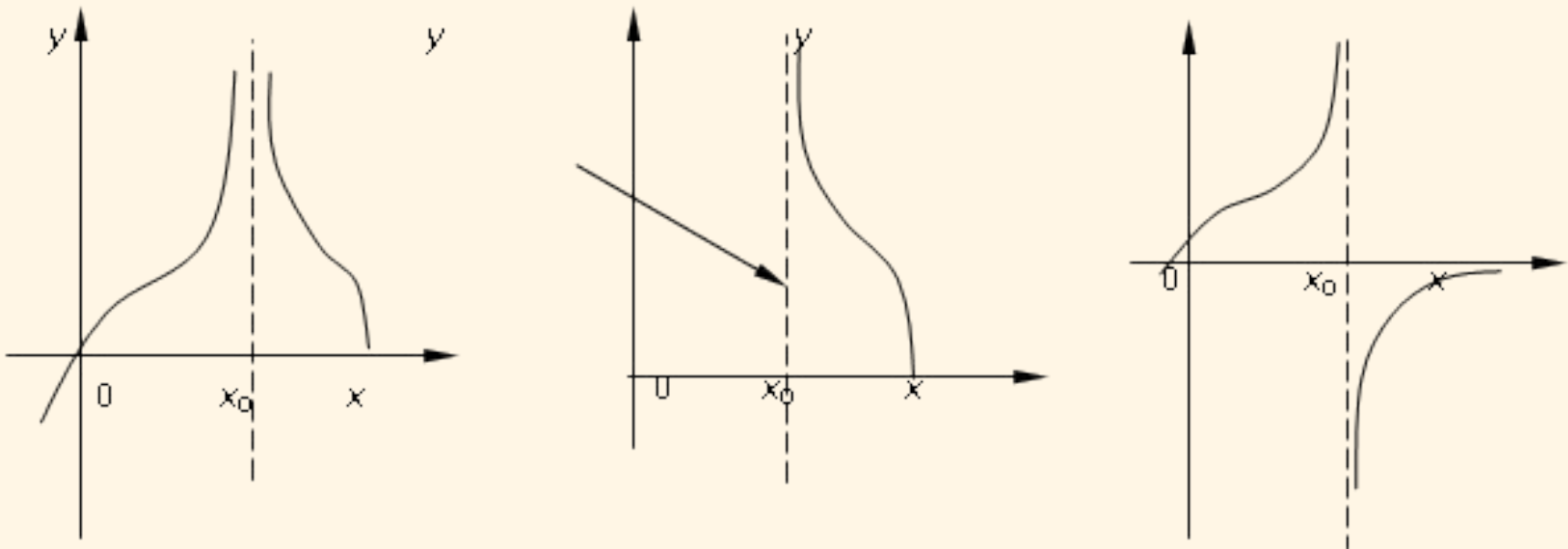


Рисунок 7 Разрыв второго рода

Лекция № 10

Непрерывность функций

Пример. Исследовать функцию $y = a^{\frac{1}{x}}$ ($a > 1$) на непрерывность.

Лекция № 10

Непрерывность функций

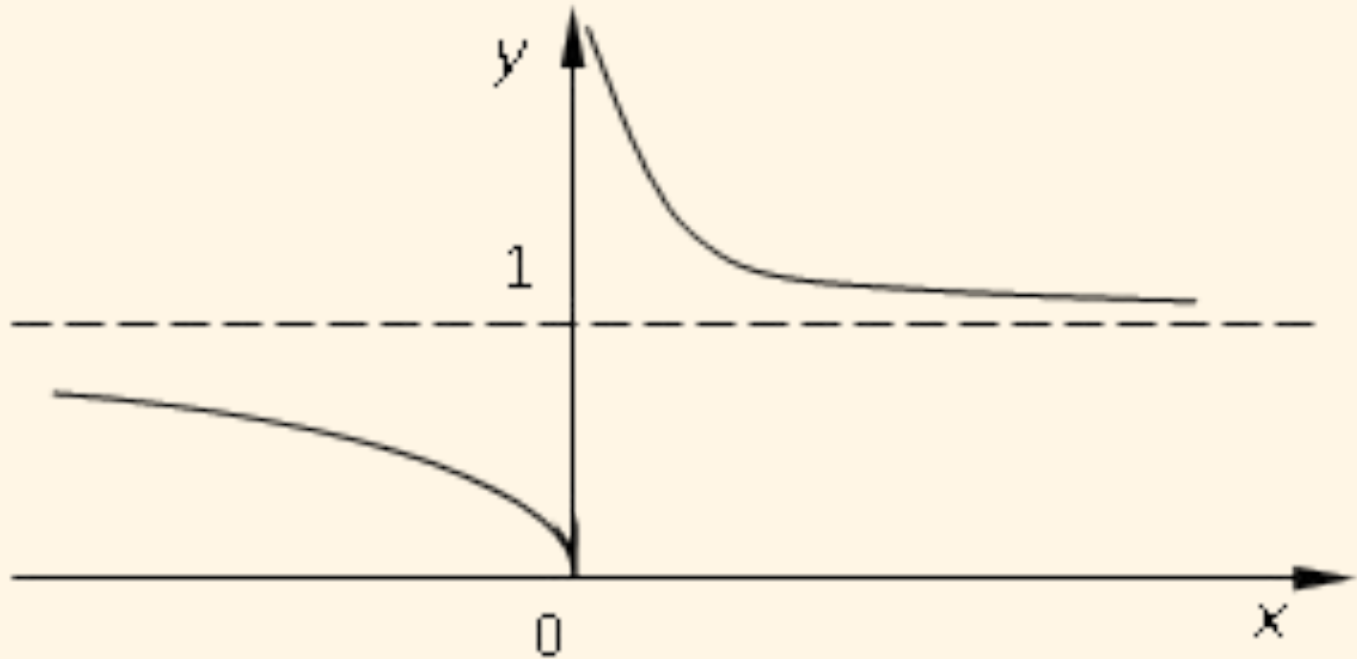


Рисунок 9

Литература

1. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, Е. В. Шикин, В. И. Заляпин
Вся высшая математика. Том 1. Учебник.
(линейная алгебра и аналитическая
геометрия, введение в математический
анализ). -М.: Едиториал УРСС, 2012 – [1],
с. 206-209; 215-216; 225-228.