Лекция № 10

Непрерывность функций

Лекция № 10

Непрерывность функций

Учебные вопросы:

В1. Непрерывность функций в точке и на множестве.

В2. Свойства непрерывных функций.

В3. Классификация точек разрыва функции.

Лекция № 10

Непрерывность функций

В1. Непрерывность функций в точке и на множестве.

Лекция № 10

Непрерывность функций

В1. Непрерывность функций в точке и на множестве.

Определение 1. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена в этой точке и ее окрестности, существует предел функции и он равен значению функции в этой точке, то есть*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

Лекция № 10

Непрерывность функций

Определение 2. *Если* $f(x)$ *– непрерывна* $\forall x \in X$, *то говорят, что она непрерывна на* X *и пишут* $f(x) \in C_X$.

Лекция № 10

Непрерывность функций

Теорема 1. Для того, чтобы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ необходимо и достаточно, чтобы бесконечно малому Δx соответствует бесконечно малое Δy.

Лекция № 10

Непрерывность функций

Пример 1. Исследовать функцию $y=x$ на непрерывность.

Пример 2. Исследовать функцию $y = \sin(x)$ на непрерывность.

Лекция № 10

Непрерывность функций

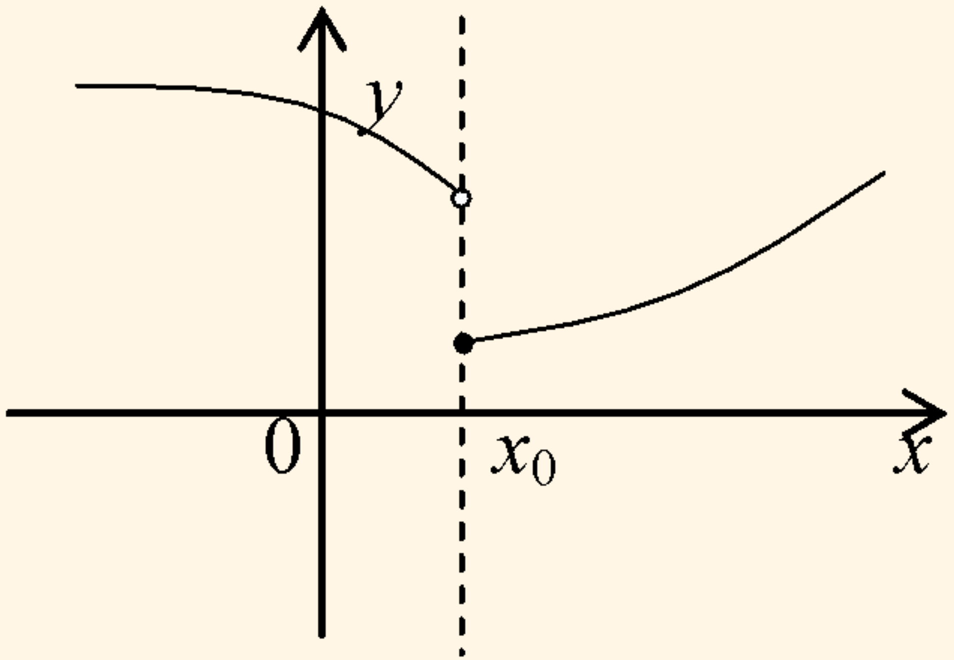

Рисунок 1

Лекция № 10

Непрерывность функций

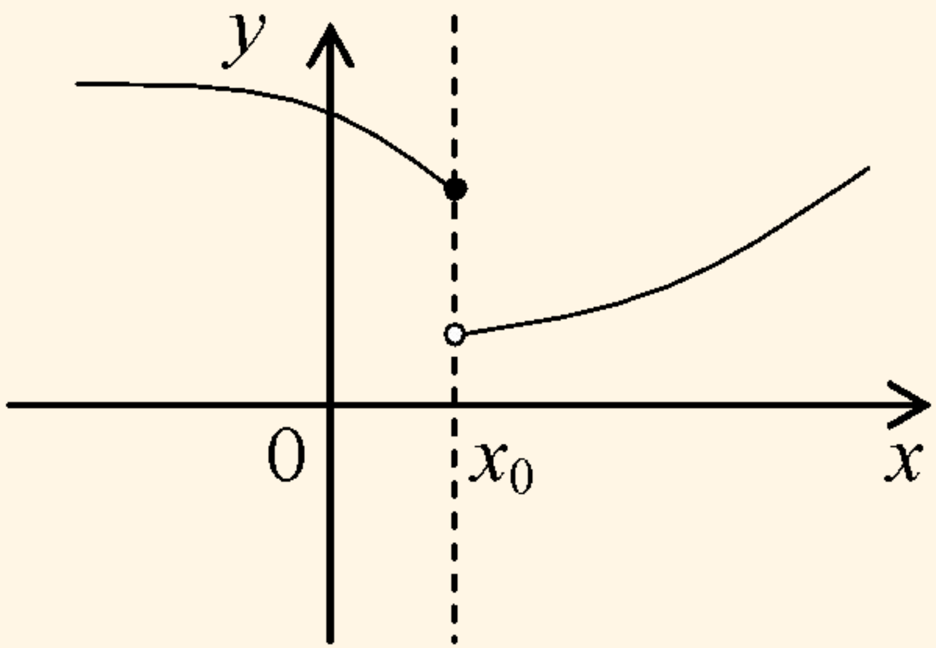

Рисунок 2

Лекция № 10

Непрерывность функций

Определение 3. *Функция f(x) - непрерывна в точке x_0, если она непрерывна и слева и справа в точке x_0 , т.е.*

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$

- ***необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке*** .

Лекция № 10

Непрерывность функций

В2. Свойства непрерывных функций

Теорема 2. Если $U(x)$, $V(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $U \pm V$, $U \cdot V$, U/V, $(V(x_0) \neq 0)$ непрерывны в точке x_0.

Лекция № 10

Непрерывность функций

Теорема 3. Если функция $f(u)$ непрерывна в точке u_0, а функция $u=\varphi(x)$ – непрерывна в точке x_0, $(\varphi(x_0)=u_0)$, тогда сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Лекция № 10

Непрерывность функций

Теорема 4. Основные элементарные функции **(степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрическим)** непрерывны в своей области определения.

Лекция № 10
Непрерывность функций

Свойства функций непрерывных на отрезке

Теорема 5 (Больцано-Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков, тогда между a и b найдется точка c, в которой функция обращается в нуль $f(c)=0$ $(a < c < b)$.

Лекция № 10

Непрерывность функций

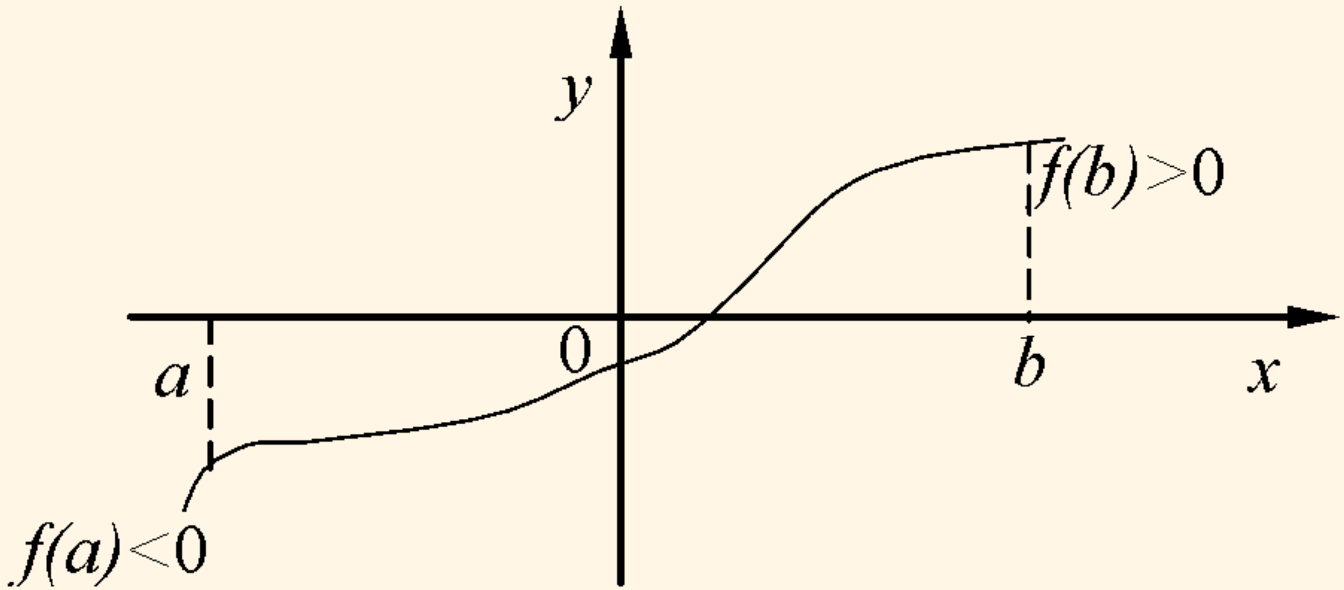

Рисунок 3

Лекция № 10

Непрерывность функций

Теорема 6 (о промежуточных значениях). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$ и на концах этого промежутка принимает неравные значения $f(a)=A$ и $f(b)=B$, то, каково бы ни было число C, лежащее между A и B, найдется такая точка c между a и b, что

$$f(c) = C.$$

.

Лекция № 10

Непрерывность функций

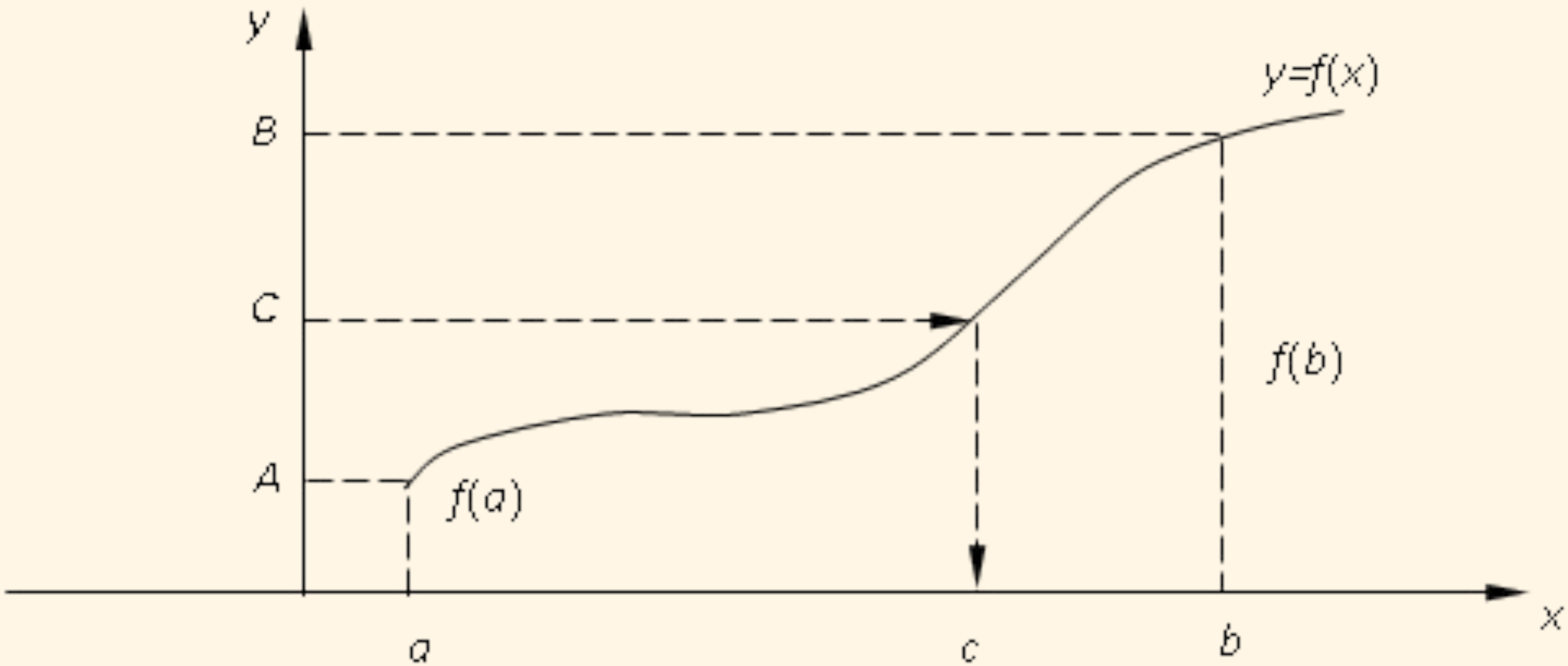

Рисунок 4

Лекция № 10

Непрерывность функций

Теорема 7. (Первая теорема Вейерштрасса) Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие

$$-M \le f(x) \le M.$$

.

Лекция № 10

Непрерывность функций

Теорема 8 (Вторая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$, то она ограничена снизу и сверху, то есть существуют такие постоянные и конечные числа m и M, что

$$m \le f(x) \le M \text{ при } a \le x \le b.$$

Лекция № 10

Непрерывность функций

В3. Классификация точек разрыва функции

Определение 4. *Точкой разрыва функции $f(x)$ называется точка x_0, в которой функция $f(x)$ не обладает свойством непрерывности.*

Лекция № 10

Непрерывность функций

Определение 5. *Если у функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *существуют конечные левый и правый пределы* $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$, *но или*

а) $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, *или*

б) $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, *но либо*

$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$, *либо* $f(x_0)$ *не существует, то точку* x_0 *называют* ***точкой разрыва первого рода.***

Лекция № 10

Непрерывность функций

Определение 6. *Если в* x_0 *разрыв первого рода и* $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ *либо* $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, *а* $f(x_0)$ *не существует, то разрыв называется* ***устранимым разрывом первого рода***

Лекция № 10

Непрерывность функций

Определение 7. *Если в* x_0 *разрыв первого рода и* $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, *то разрыв называется* ***неустранимым разрывом первого рода*** .

Лекция № 10

Непрерывность функций

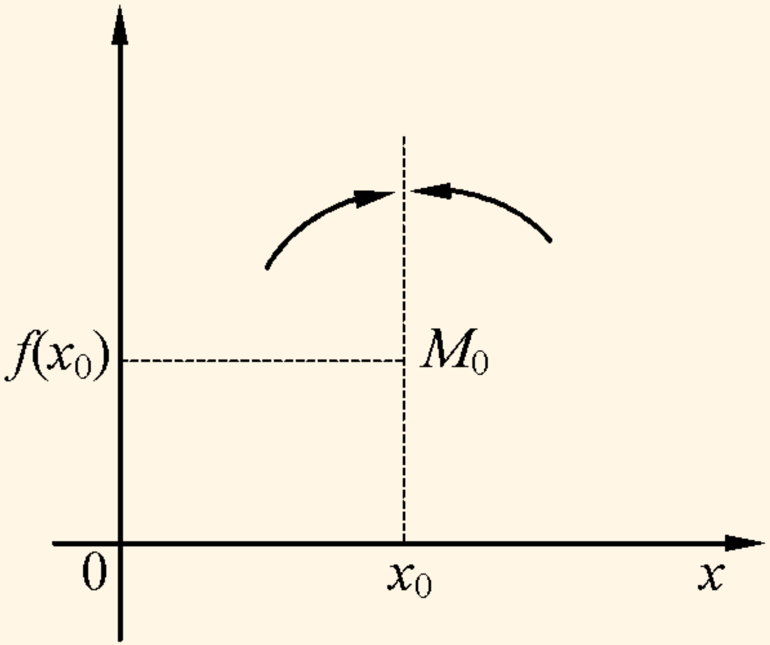

Рисунок 5
Устранимый разрыв первого рода

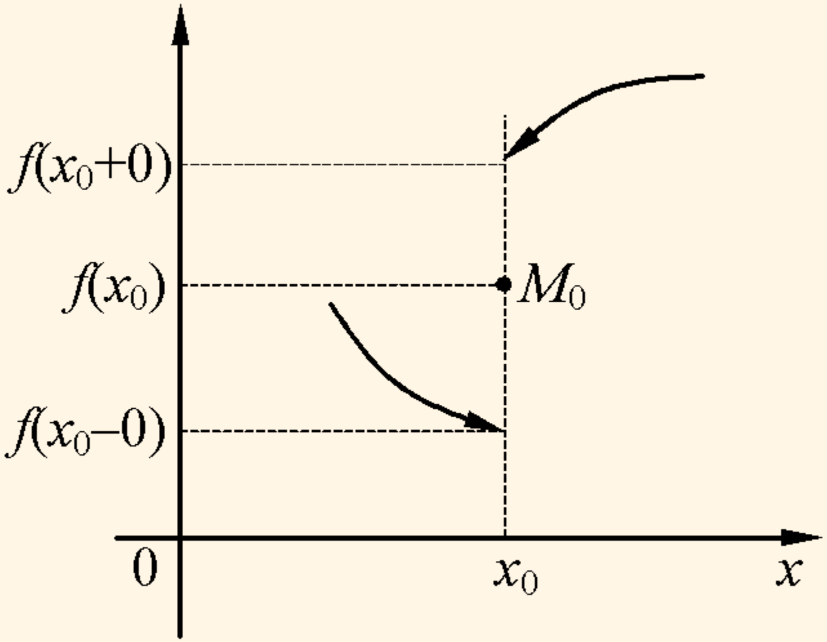

Рисунок 6
Неустранимый разрыв первого рода

Лекция № 10

Непрерывность функций

Определение 8. *Если не существует хотя бы один из односторонних пределов функции* $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ *или хотя бы один из них равен бесконечности, то* x_0 *– называют* ***точкой разрыва функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***второго рода*** .

Лекция № 10

Непрерывность функций

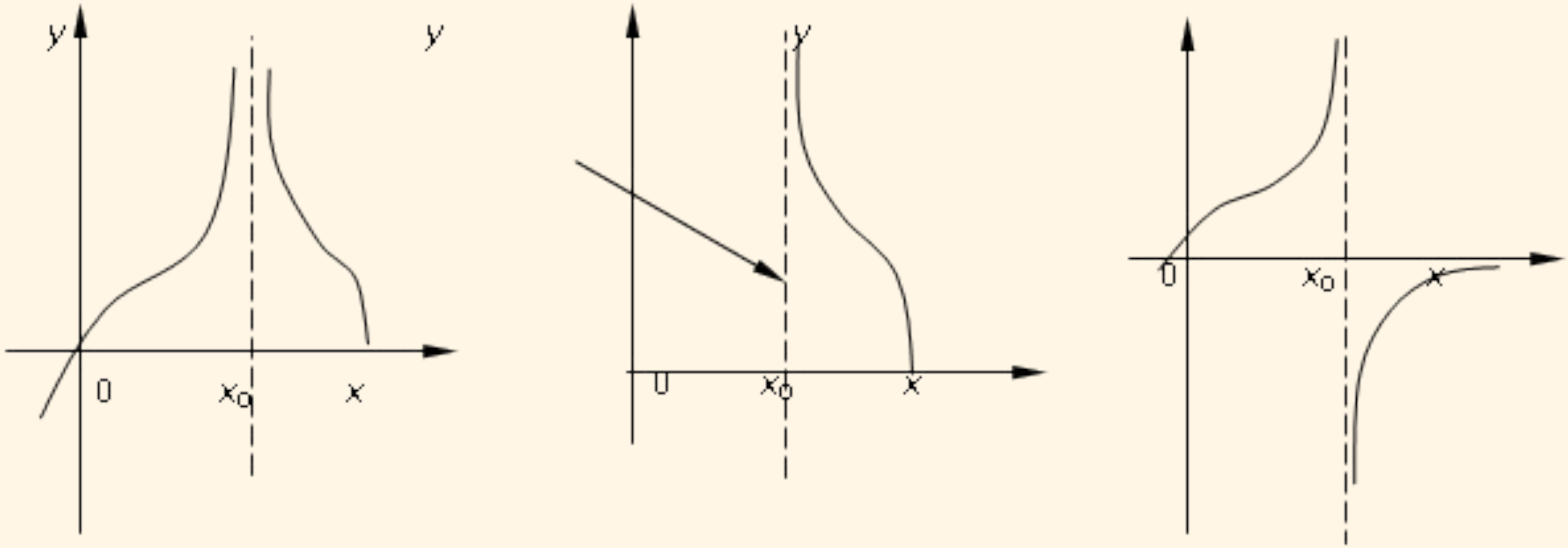

Рисунок 7 Разрыв второго рода

Лекция № 10

Непрерывность функций

Пример. Исследовать функцию $y = a^{\frac{1}{x}} \, (a > 1)$ на непрерывность.

Лекция № 10

Непрерывность функций

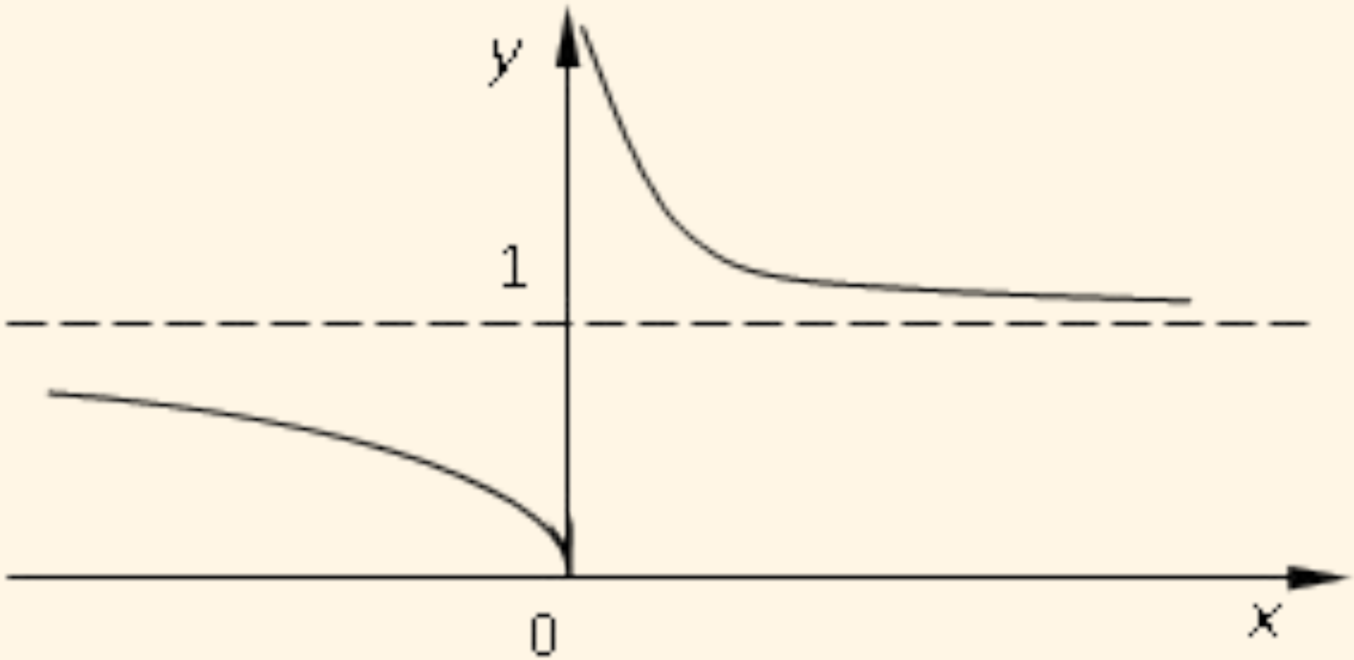

Рисунок 9

Литература

1. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, Е. В. Шикин, В. И. Заляпин Вся высшая математика. Том 1. Учебник. (линейная алгебра и аналитическая геометрия, введение в математический анализ). -М.: Едиториал УРСС, 2012 – [1], с. 206-209; 215-216; 225-228.