Решение нелинейных уравнений

Методы решения нелинейных уравнений

- Метод половинного деления
- Метод хорд
- Метод касательных
- Метод секущих
- Метод простой итерации

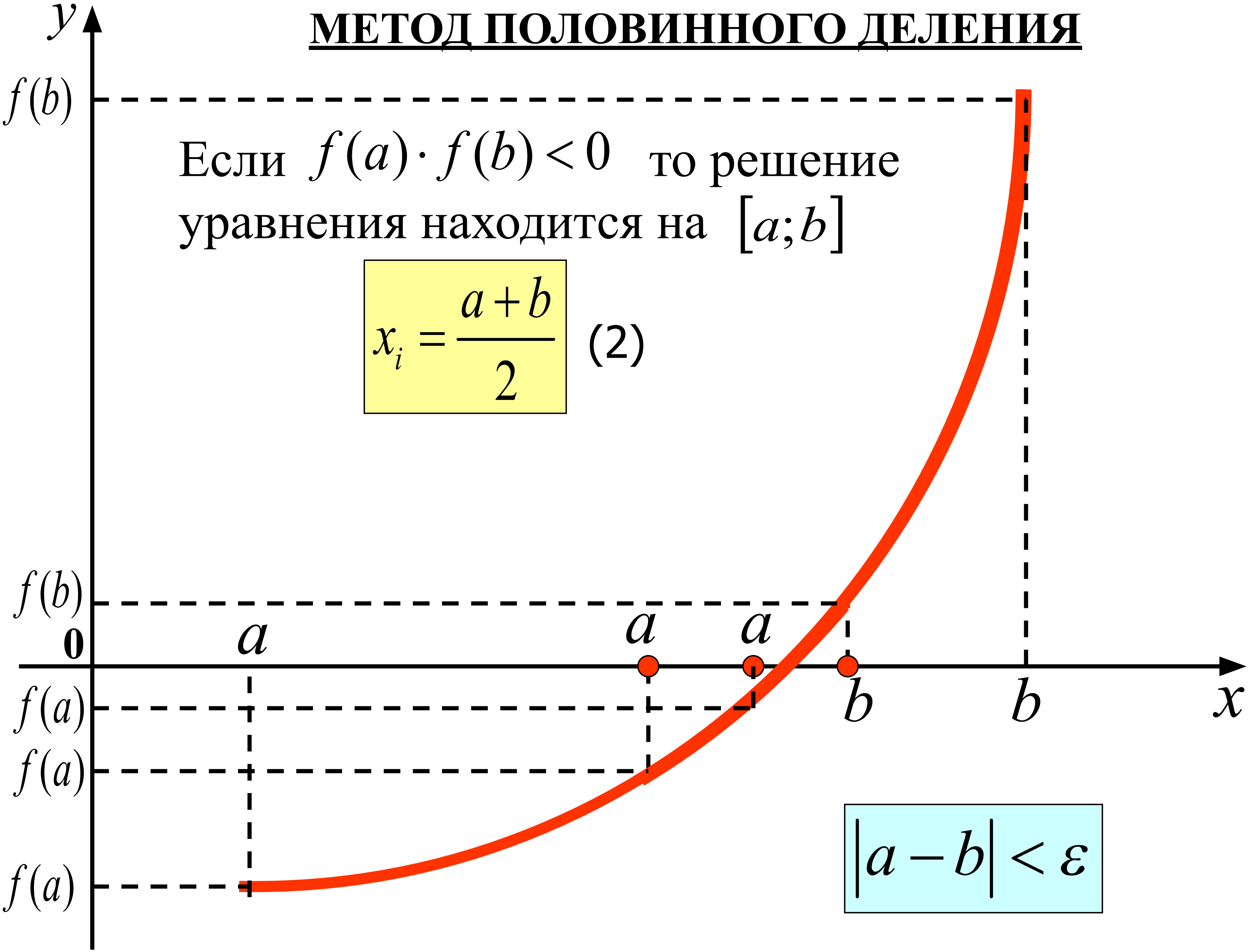
Метод половинного деления (дихотомии)

1. В качестве первого приближения берем
$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$
2. Если $f(x_1)=0$, то это корень, иначе переход к п.3.
3. Из двух половинок отрезка выбираем ту, на концах которой функция имеет разные знаки (роль a или b играет точка x_1).
4. Если $|a-b| > \varepsilon$ то переход к п. 2., иначе закончить вычисления.

МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Если $f(a)\cdot f(b)<0$ то решение уравнения находится на $[a;b]$

$$\boxed{x_i=\frac{a+b}{2}} \quad (2)$$



$$\boxed{|a-b|<\varepsilon}$$

Погрешность половинного деления

На каждом шаге погрешность гарантированно уменьшается ровно вдвое. За n делений отрезок уменьшается в 2^n раз. Например, при начальной длине отрезка 1, за 5 делений он уменьшается в 32 раза:

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{32} \approx 0{,}016$$

Можно априорно рассчитать по заданной погрешности количество шагов N(ε), необходимых для достижения точности ε:

$$\frac{b-a}{2^n} \le \varepsilon,$$

$$N \ge \frac{\ln\dfrac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2} = \left[1,4427 \cdot \ln\frac{b-a}{\varepsilon}\right] + 1$$

Например, для отрезка длиной 1 и ε=0,001

$$N = [9,96\ldots] + 1 = 10.$$

Скорость сходимости метода половинного деления

В данном методе выполняется условие:

$|x^*-x_{i+1}| \leq q\ |x^*-x_i|$ при $q=½$,

т.е. имеет место ***линейная сходимость.***

Особенности метода половинного деления

+

- Самый алгоритмически простой и надежный метод.
- Гарантированно сходится и скорость приближения не зависит от гладкости функции.
- Обеспечивает двустороннее приближение к корню.

–

- Для увеличения точности приходится резко увеличивать объем вычислений в силу ***малой скорости сходимости***.

Реализация метода дихотомии

```
# решение нелинейного уравнения f(x)=0
# с помощью метода дихотомии (деления отрезка пополам)
from numpy import zeros

def f(x) :
    return (x - 1)*(x - 2)**2*(x - 3)**3

eps = 0.01

N_max = 50
x = zeros(N_max)

x[0] = 2.5
x[1] = 3.6
n = 1
while abs(x[n] - x[n-1]) > eps :
    x[n+1] = (x[n] + x[n-1])/2
    if f(x[n+1])*f(x[n-1]) < 0:
        x[n] = x[n-1]
    elif f(x[n+1]) == 0 :
        n = n + 1
        break
    n = n + 1

print('Найден корень x = {0:.3f}, число итераций - {1}'.format(x[n],n-1))
```

Результат:
Найден корень x = 3.007, число итераций - 7

Метод хорд

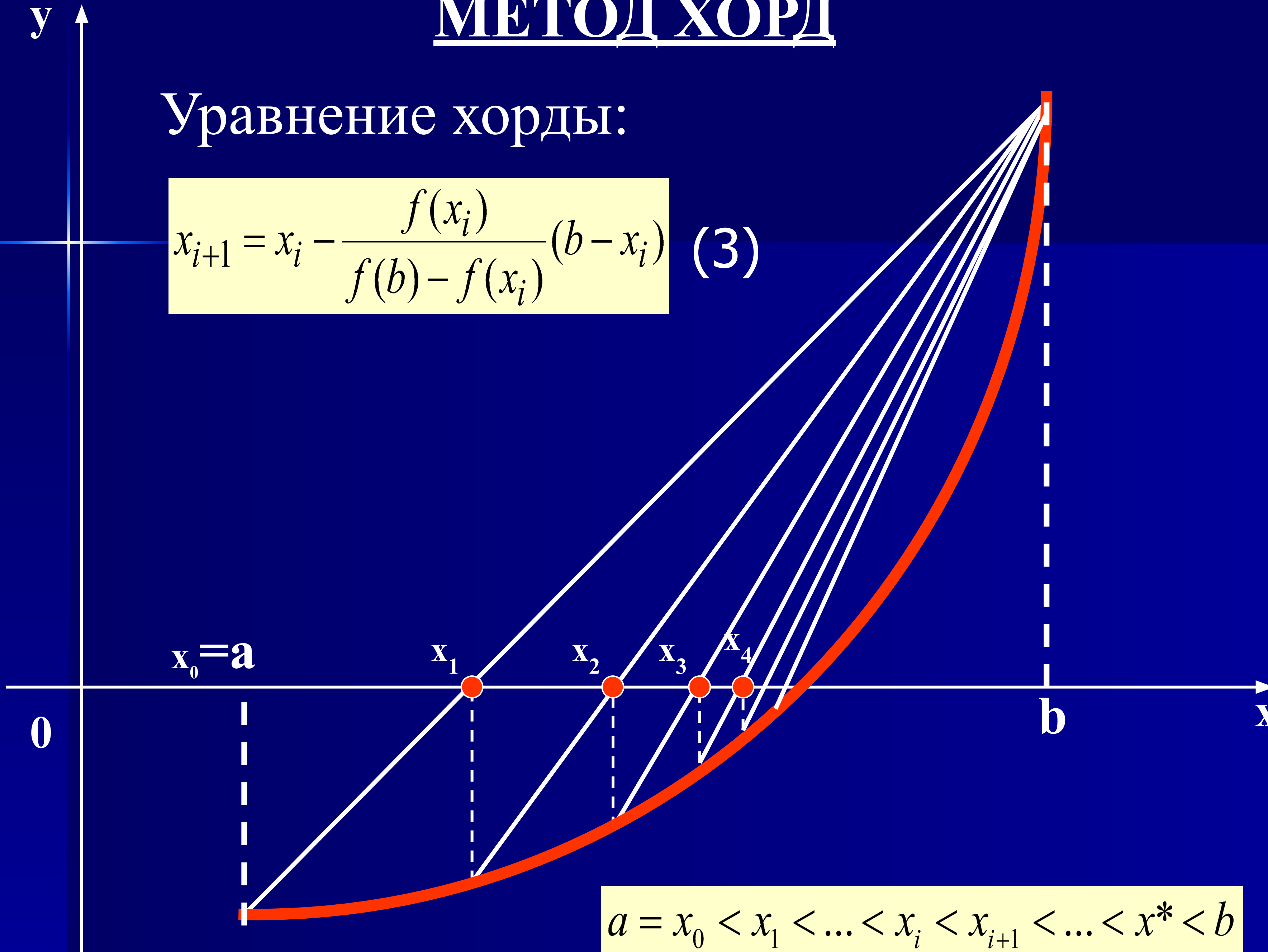
Идея метода основана на том, чтобы использовать не только разность знаков функции на концах отрезка, но и сами значения в этих точках для построения очередного приближения к корню.

Очередным приближением выбирается не середина отрезка ***[a;b]***, а точка пересечение с осью ***OX*** отрезка, проходящего через точки ***(a, f(a))*** и ***(b,f(b)).***

МЕТОД ХОРД

Уравнение хорды:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(b) - f(x_i)}(b - x_i) \quad (3)$$

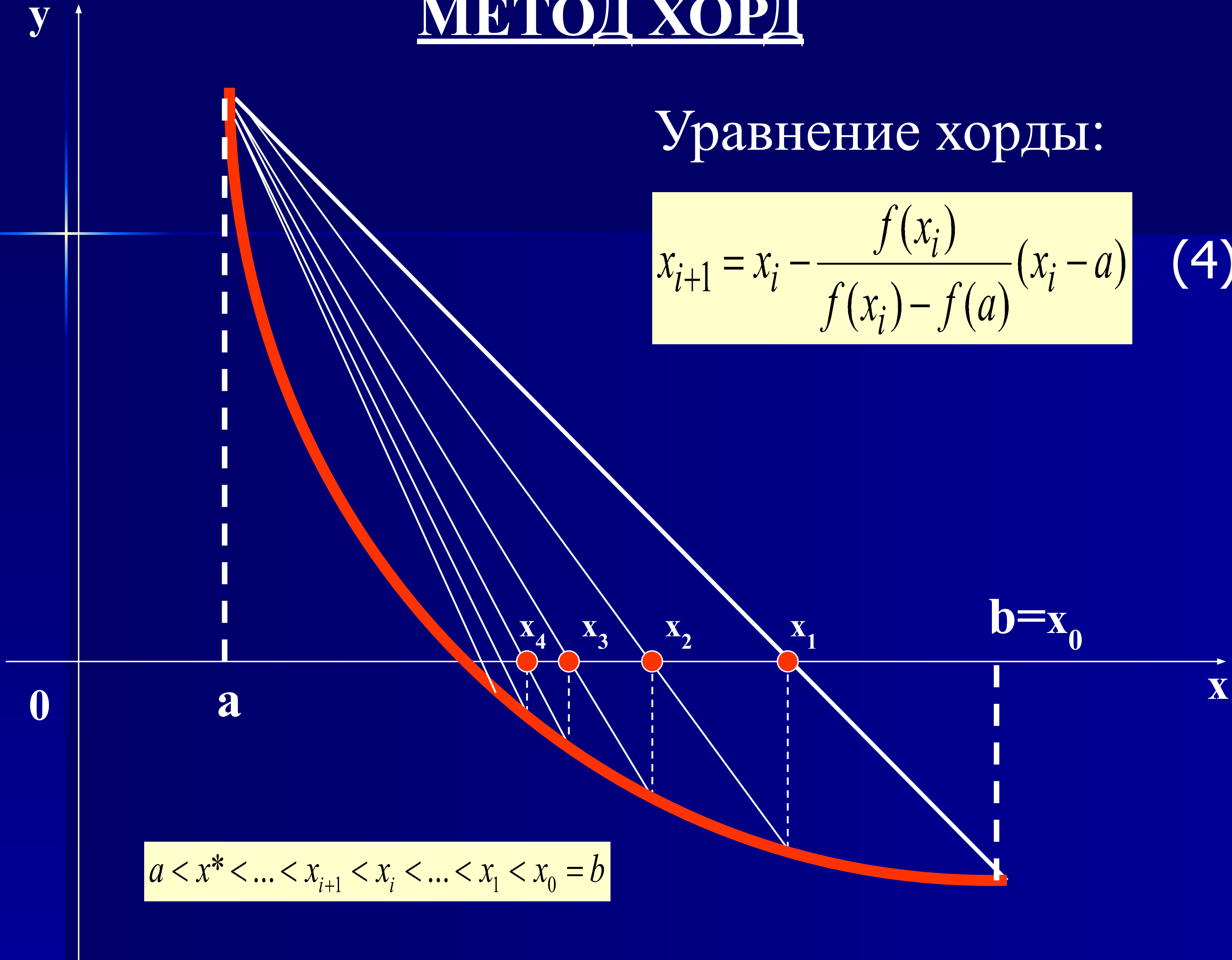


$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x^* < b$$

МЕТОД ХОРД

Уравнение хорды:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(a)}(x_i - a) \qquad (4)$$



$$a < x^* < \ldots < x_{i+1} < x_i < \ldots < x_1 < x_0 = b$$

Формулы метода хорд

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\frac{b - x_i}{f(b) - f(x_i)} \quad (3)$$

$$f'(x_i)f''(b) \geq 0$$

двигается левый конец интервала

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\frac{x_i - a}{f(x_i) - f(a)} \quad (4)$$

$$f'(x_i)f''(a) < 0$$

двигается правый конец интервала

Оценка погрешности

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\frac{b - x_i}{f(b) - f(x_i)} \Rightarrow$$

$$f(x_i) = \frac{f(b) - f(x_i)}{b - x_i} \cdot (x_i - x_{i+1}) =$$

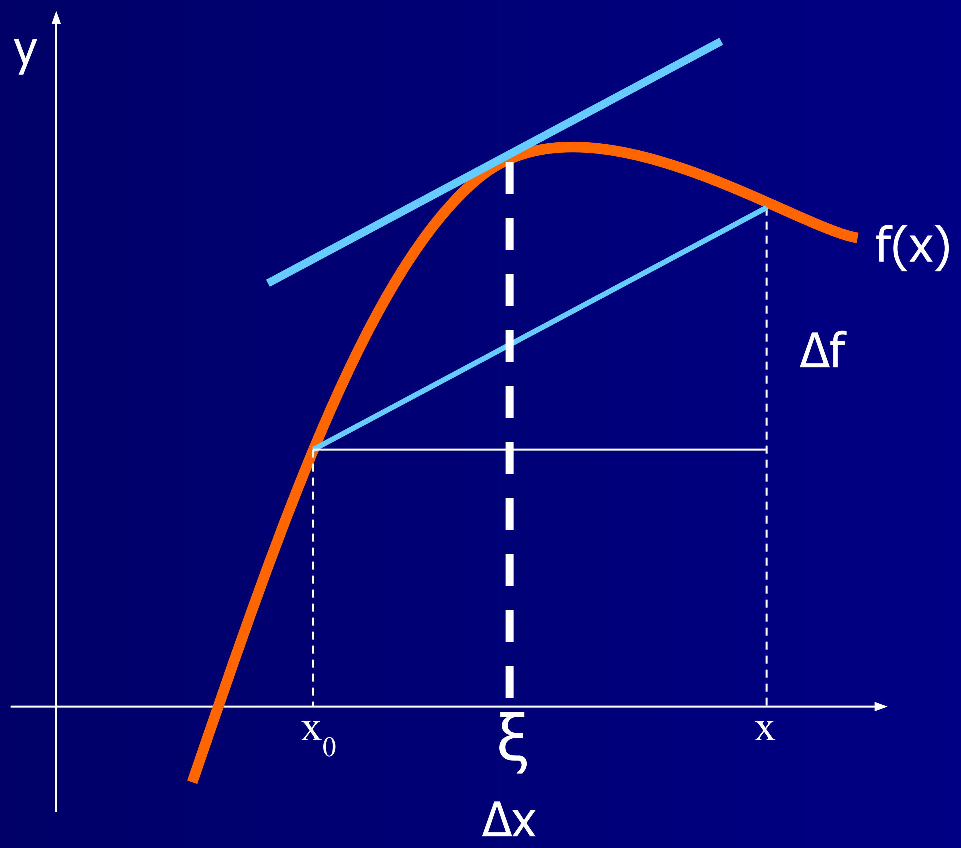
$$= f'(\xi_i)(x_i - x_{i+1}).$$

Оценка погрешности

Теорема Лагранжа. Пусть функция f определена на некотором промежутке и имеет на нем конечную производную f′. Если две точки x и x_0 находятся в данном промежутке, то существует точка ξ между x и x_0 такая, что

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$$

$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$



Погрешность метода хорд

Если f′ и f″ непрерывны, а числа m и M такие, что

$$0 < m \le \left| f'(x) \right| \le M, x \in \left[a; b \right]$$

тогда погрешность оценивается формулой

$$\Delta \le \frac{M - m}{m} \left| x_i - x_{i-1} \right|, i = 1, 2, \ldots . \qquad (5)$$

Достижение точности

Для условия достижения заданной точности можно воспользоваться оценкой (5):

$$\left|x_i - x_{i-1}\right| < \varepsilon \cdot \frac{m}{M - m}$$

Однако, если интервал ***[a, b]*** небольшой, то можно

предположить, что $M \leq 2 \cdot m$

Тогда для условия достижения заданной точности можно воспользоваться соотношением:

$$\left|x^* - x_i\right| \leq \left|x_i - x_{i-1}\right|$$

Особенности метода хорд

+
- Обычно сходиться быстрее, чем метод половинного деления.
- Не зависит от вида конкретной функции, хотя она должна быть дифференцируема.

–
- Имеет линейную скорость сходимости.
- Обладает односторонней сходимостью.

Метод касательных (метод Ньютона)

Основная идея состоит в построении очередного приближения не хордой, а касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_i, f(x_i))$.

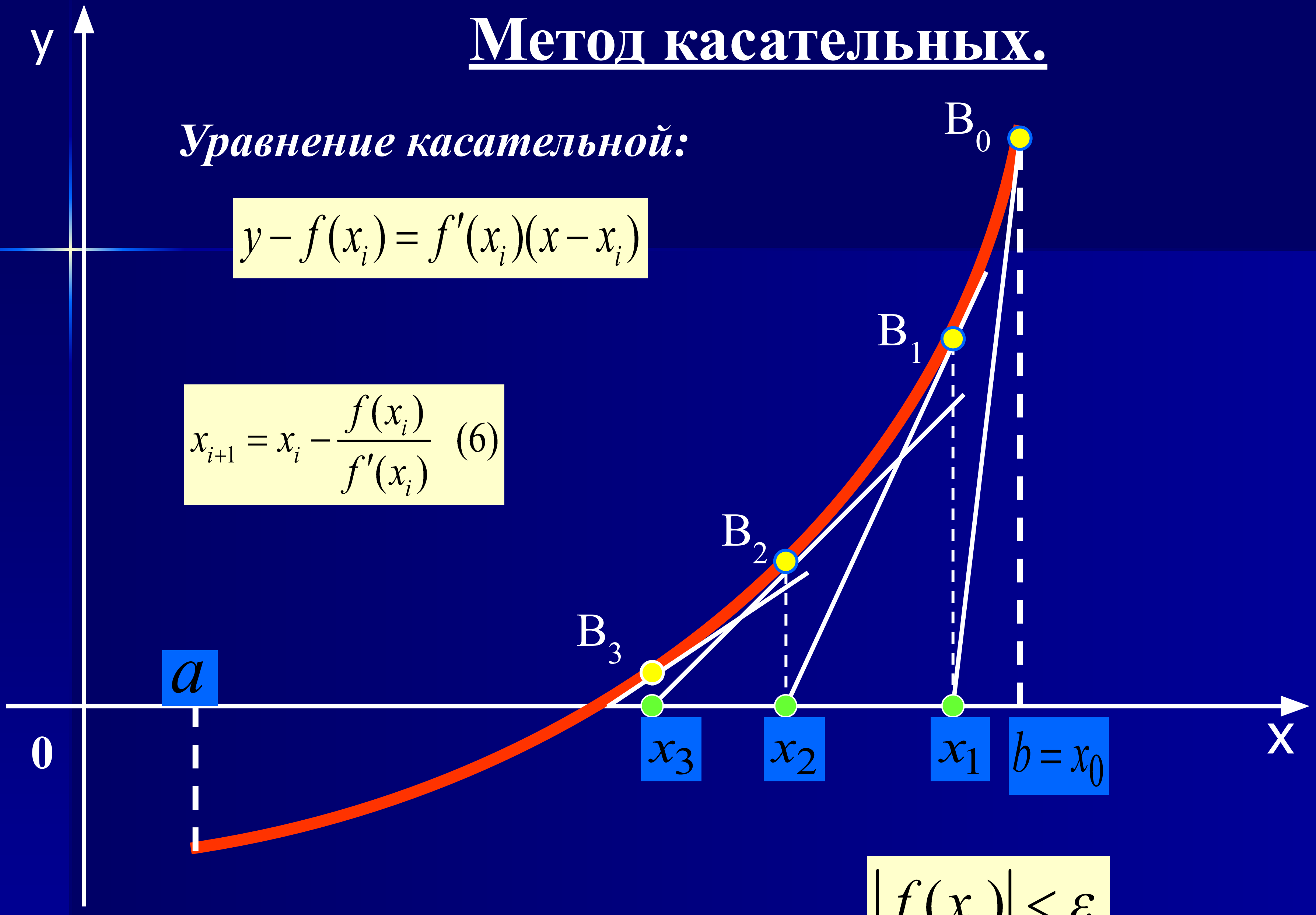
Выбор начального приближения x_0 зависит от вида графика функции на данном отрезке.

Метод касательных.

Уравнение касательной:

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (6)$$



$$|f(x_i)| < \varepsilon$$

Анализ сходимости метода Ньютона

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Пусть x* - точный корень из [a;b], $x_n \approx x^*$. Тогда между x_n и x* найдётся точка ξ_n такая, что

$$f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi_n)(x^* - x_n)^2$$

Если ***x_n*** достаточно близко к ***x*,*** то можно отбросить третье слагаемое и получить приближенное равенство:

$$f(x^*) = 0 \approx f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n)$$

Отсюда

$$x^* \approx x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

Оценка погрешности метода касательных

Если $|f'(x)| \geq m, |f''(x)| \leq M_2$, то

$$\Delta_x \leq \frac{M_2}{2m}(x_n - x_{n-1})^2 \quad (7)$$

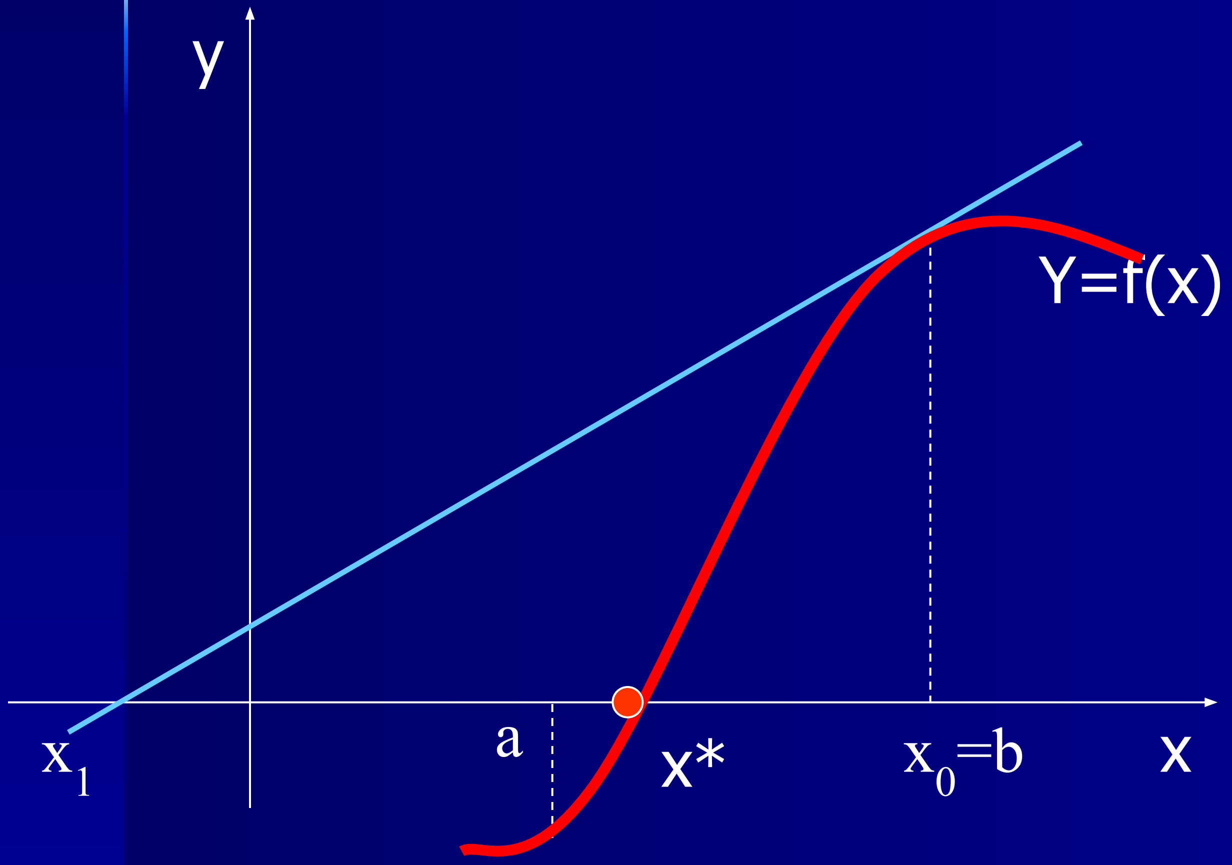
Фактически в окрестности корня на каждой итерации погрешность возводиться в квадрат, т.е. число верных знаков удваивается. Но в эту окрестность еще надо попасть. Если область сходимости мала, то метод чувствителен к начальному приближению.

Достижение точности

Для условия достижения заданной точности ε и прекращения вычислений можно использовать оценку (7):

$$(x_n - x_{n-1})^2 \le \varepsilon \cdot \frac{2m}{M_2}$$

В этом методе выбор начального приближения может оказаться неудачным, и последовательность приближений не будет сходиться. Пример:



Условие Фурье:

$$f(x_0)f''(x_0) > 0$$

Особенности метода касательных

\+

- Наиболее быстро сходящийся метод (***квадратичная скорость сходимости***).

–

- Необходимо вычислять в каждой точке приближения производную.
- Сходимость метода односторонняя.
- Требует хорошего начального приближения в случае малой области сходимости.

Недостатки метода Ньютона можно преодолеть следующим образом:

- Для выхода в непосредственную близость корня сначала применяют гарантированный медленный метод, а затем переходят на метод Ньютона.
- Затруднение с вычислением производной можно избежать, заменив ее конечно-разностным отношением:

$$f'(x_i) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Исторический пример использования метода

Эмпирически метод касательных применялся в древности для нахождения квадратного корня (длины гипотенузы).

Пусть $f(x)=x^2 - a$,

тогда решением уравнения $f(x)=0$ является:

$$\sqrt{a}$$

Пример

Составим рекуррентное соотношение:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^{\,2} - a}{2 \cdot x_i} = \frac{1}{2} \cdot (x_i + \frac{a}{x_i})$$

Пример: a=9

$$x_{i+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_i + \frac{a}{x_i})$$

$$x_0 = 9$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot (9 + \frac{9}{9}) = 5$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot (5 + \frac{9}{5}) = 3.4$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot (3.4 + \frac{9}{3.4}) = 3.023529\ldots$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \cdot (3.023529 + \frac{9}{3.023529}) = 3.000091\ldots$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \cdot (3.000091 + \frac{9}{3.000091}) = 3.000000\ldots$$

Метод секущих

– это упрощение метода касательных, когда затруднительно найти производную. Заменим в методе касательных производную конечно-разностным отношением:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i) \quad (8)$$

Особенности метода секущих

+

- Не требует дифференцированной функции.
- При его реализации на каждой итерации вычисляется только одно новое значение функции.

–

- Требует два начальных приближения x_0 и x_1. Обычно это один из концов отрезка и близкая к нему точка.
- Метод уступает в скорости сходимости методу касательных (сверхлинейная скорость с $\alpha=1.618$).

Метод простой итерации

Рассмотренные методы решения уравнения $f(x)=0$ сводились к итерационной процедуре вида

$$x_{i+1}=\varphi(x_i) \quad (9)$$

Основная идея метода простой итерации состоит в том, чтобы построить универсальный метод типа (9).

Исходное уравнение ***f(x)=0*** заменяют эквивалентным ему ***x=φ(x).***

После этого выбирается начальное приближение x_0, которое подставляют в функцию φ(x):

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

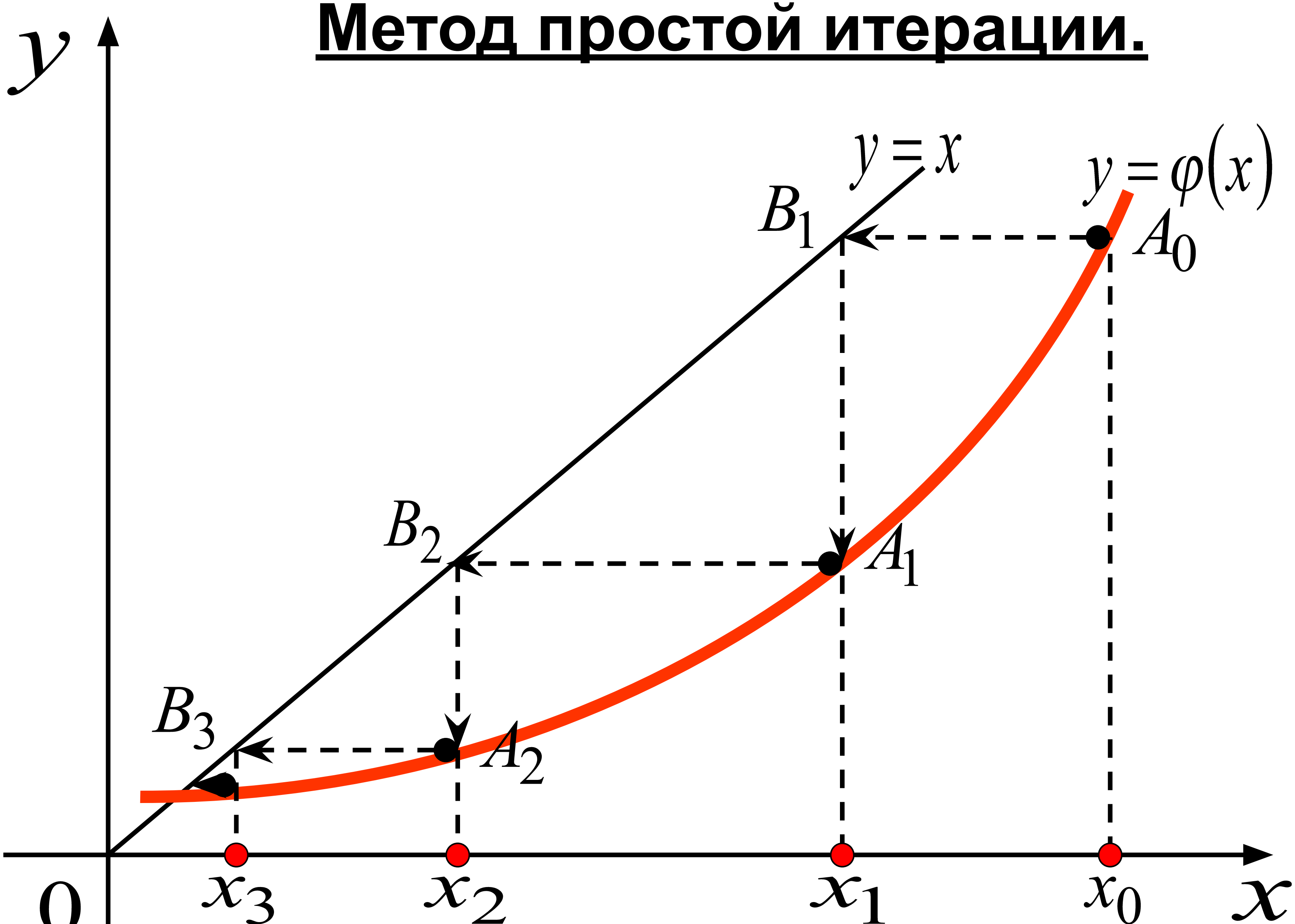
$$x_2 = \varphi(x_1)$$

……………

$$x_{i+1} = \varphi(x_i)$$

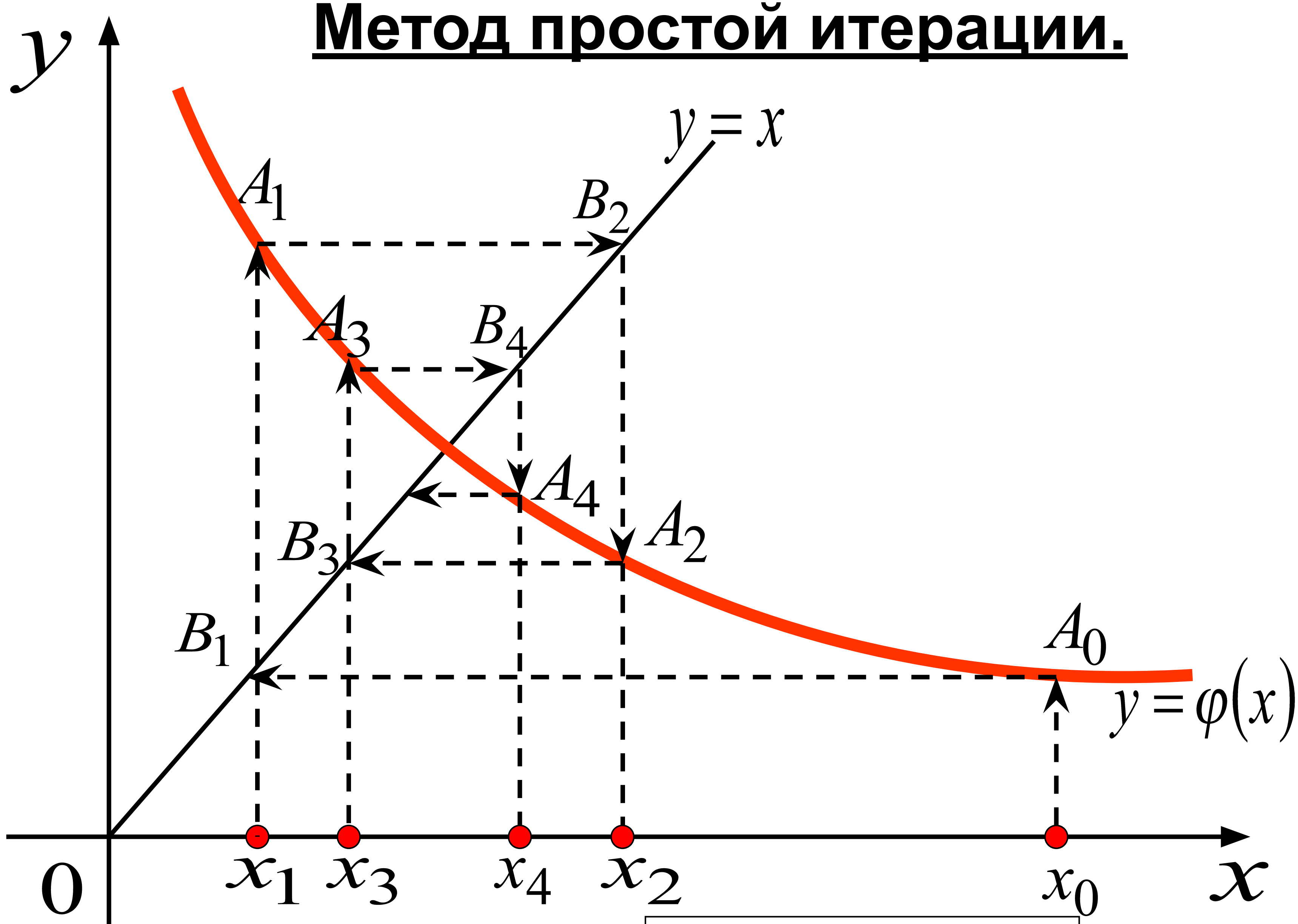
……………

Метод простой итерации.



$$\boxed{x_{i+1} = \varphi(x_i)}$$

Метод простой итерации.



$$x_{i+1} = \varphi(x_i)$$

Таким образом, получим последовательность $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$

Рассмотрим, в каком случае она сходится.

$$\left|x_{i+1} - x^*\right| = \left|\varphi(x_i) - \varphi(x^*)\right| \xleftrightarrow{\text{Лагранжа}} \left|(x_i - x^*)\varphi'(\xi)\right| \le \left|\varphi'(\xi)\right| \cdot \left|(x_i - x^*)\right|$$

$$x_i < \xi < x^*$$

Условие сходимости: $\left|\varphi'(\xi)\right| < 1$

Модуль φ′(x) в некоторой окрестности корня должен быть меньше 1, чтобы итерационный процесс сходился со скоростью геометрической прогрессии.

Приведение уравнения к итерационному виду

Пример 1.

f(x)=0

$$x \cdot tg(x) - 1 = 0$$

x=φ(x)

$$x = arctg(\frac{1}{x}) + \pi k$$

Приведение уравнения к итерационному виду

Пример 2.

f(x)=0 $$x^3+3x^2-1=0$$

x=φ(x) $$x=\frac{1}{x^2}-3$$

Приведение уравнения к итерационному виду

Способы приведения уравнения могут быть различными, но важно добиться выполнения условия сходимости:

$$|\varphi'(\xi)| < 1$$

в окрестности корня или на всем отрезке ***[a;b].*** Рассмотрим универсальный способ приведения уравнения к итерационному виду.

В общем случае используется следующий алгоритм:

- f(x)=0 умножим на константу λ
- λ*f(x)=0 вычтем обе части из x
- x - λ*f(x) = x
- т.о., φ(x)= x- λ*f(x)
- подберем λ т. о., чтобы на [a,b] выполнялось условие сходимости:

$$\boxed{|\varphi'| < 1}$$

Пример.

Пусть

$f(x)=x^3-x^2-1000=0$. Это ур-е имеет один корень на *[10,11]*.

Производная

$f'(x)=3x^2-2x$ на *[10,11]* монотонно возрастает:

$m_1= f'(10)=280$

$M_1= f'(11)=341$.

$$\lambda = \frac{2}{280+341} = \frac{2}{621} \approx \frac{1}{300},$$

Итерационный вид уравнения:

$$x = x - \frac{x^3 - x^2 - 1000}{300}.$$

$x_0=10$,

$x_1=10.3333333$,

$x_3=10.3446913$,

$x_4=10.3446910$.

Подбор параметра λ

Пусть на отрезке ***[a;b]*** производная функции f(x) ограничена:

$$0 < m_1 \le f'(x) \le M_1.$$

Положим $\lambda = 2/(M_1 + m_1)$.

Тогда

$$|\varphi'(x)| = \left|1 - \frac{2}{M_1 + m_1} f'(x)\right| \le 1 - \frac{2m_1}{M_1 + m_1} =$$

$$= \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1} < 1.$$

Упражнение. На отрезке [1;2] привести к итерационному виду уравнение

$$x^4-2x-3=0.$$

Производная $f'(x)=4x^3-2$ на $[1;2]$ монотонно возрастает:

$m_1 = f'(1)=2$

$M_1 = f'(2)=30$.

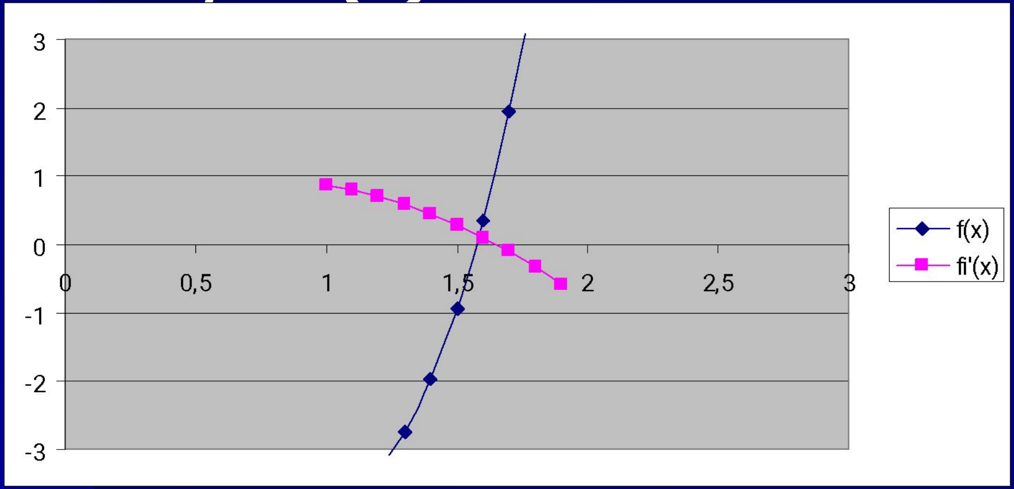
$\lambda=2/(M1+ m1)$

$\lambda=2/(30+ 2)=1/16$

$\varphi(x)= x- \lambda*f(x)$

$$\boxed{x = x - (x^4-2x-3)/16}$$

$$\boxed{\varphi' = 1 - (2x^3-1)/8}$$



Оценка погрешности приближений

Если $\left|\varphi'(x)\right|_{[a;b]} \leq q,$

$0 \leq q < 1$

то на каждой итерации

$$\Delta_{x_i} = \frac{q}{1-q} \cdot \left|x_i - x_{i-1}\right|$$

Условие достижения заданной точности

Таким образом, если задана точность приближенного корня ε, то итерационный процесс необходимо закончить при выполнении условия

$$\frac{q}{1-q}\left|x_i - x_{i-1}\right| \le \varepsilon$$

Особенности МПИ

+
- Самый простой в реализации.
- Скорость его сходимости зависит от конкретного вида (может быть линейной, может быть выше).

–
- Требует приведения уравнения к итерационному виду, чтобы выполнялось условие сходимости.

Методы решения нелинейных уравнений

Метод	Скорость сходимости
половинного деления	линейная
хорд	линейная
касательных	квадратичная
секущих (хорд-касательных)	сверхлинейная
простой итерации	Линейная/ квадратичная