

# Решение нелинейных уравнений

# Методы решения нелинейных уравнений

- Метод половинного деления
- Метод хорд
- Метод касательных
- Метод секущих
- Метод простой итерации

# Метод половинного деления (дихотомии)

1. В качестве первого приближения берем

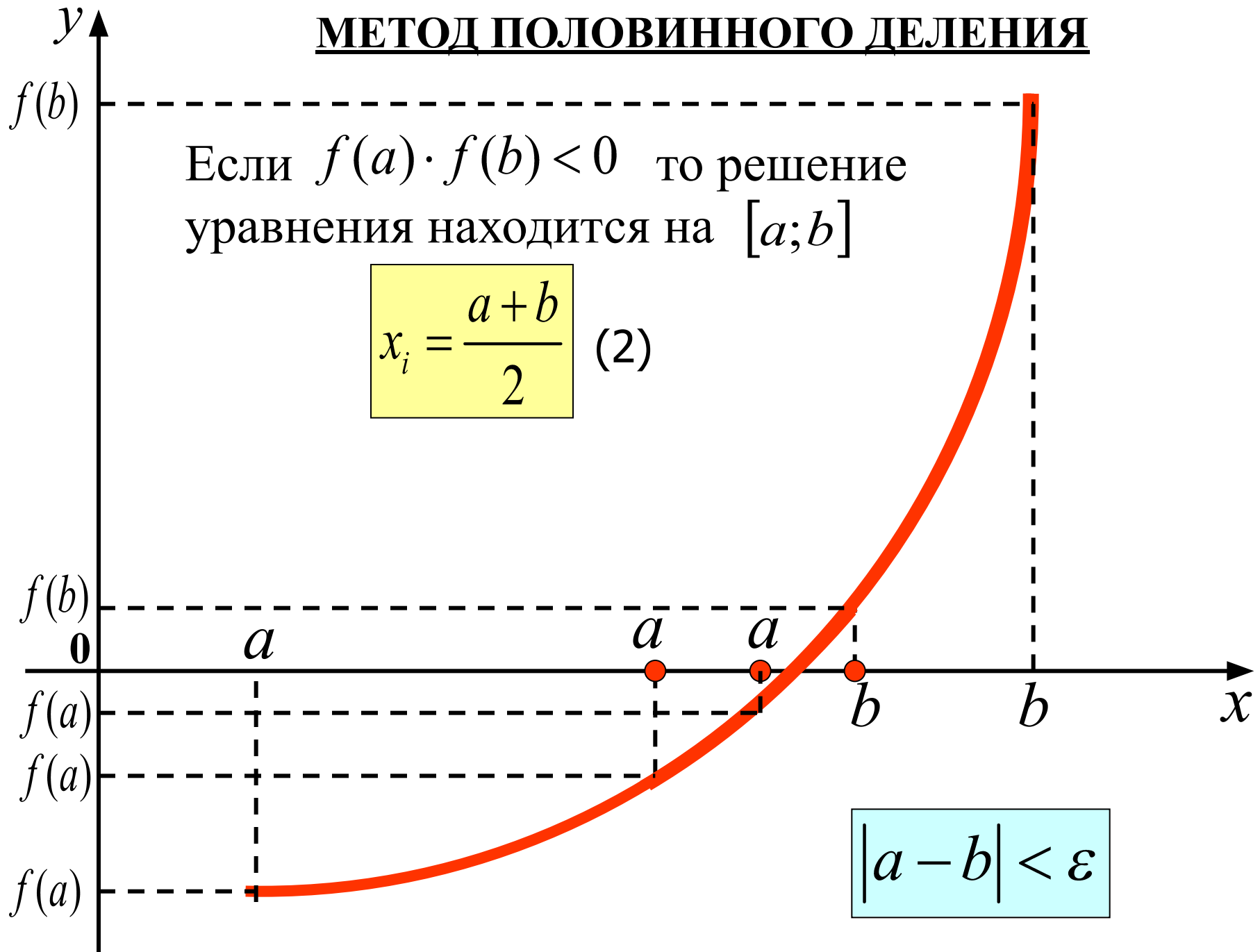
$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

2. Если  $f(x_1)=0$ , то это корень, иначе переход к п.3.

3. Из двух половинок отрезка выбираем ту, на концах которой функция имеет разные знаки (роль  $a$  или  $b$  играет точка  $x_1$ ).

4. Если  $|a-b| > \varepsilon$  то переход к п. 2., иначе закончить вычисления.

# МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ



# Погрешность половинного деления

На каждом шаге погрешность гарантированно уменьшается ровно вдвое. За  $n$  делений отрезок уменьшается в  $2^n$  раз. Например, при начальной длине отрезка 1, за 5 делений он уменьшается в 32 раза:

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{32} \approx 0,016$$

Можно априорно рассчитать по заданной погрешности количество шагов  $N(\varepsilon)$ , необходимых для достижения точности  $\varepsilon$ :

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon,$$

$$N \geq \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2} = \left[ 1,4427 \cdot \ln \frac{b-a}{\varepsilon} \right] + 1$$

Например, для отрезка длиной 1 и  $\varepsilon=0,001$

$$N = [9,96\dots] + 1 = 10.$$


# Скорость сходимости метода половинного деления

В данном методе выполняется  
условие:

$$|x^* - x_{i+1}| \leq q |x^* - x_i| \text{ при } q = 1/2,$$

т.е. имеет место **линейная  
сходимость.**

# Особенности метода половинного деления

- 
- Самый алгоритмически простой и надежный метод.
  - Гарантированно сходится и скорость приближения не зависит от гладкости функции.
  - Обеспечивает двустороннее приближение к корню.
  - Для увеличения точности приходится резко увеличивать объем вычислений в силу ***малой скорости сходимости.***



# Реализация метода ДИХОТОМИИ

```
1 # решение нелинейного уравнения f(x)=0
2 # с помощью метода дихотомии (деления отрезка пополам)
3 from numpy import zeros
4
5 def f(x) :
6     return (x - 1)*(x - 2)**2*(x - 3)**3
7
8 eps = 0.01
9
10 N_max = 50
11 x = zeros(N_max)
12
13 x[0] = 2.5
14 x[1] = 3.6
15 n = 1
16 while abs(x[n] - x[n-1]) > eps :
17     x[n+1] = (x[n] + x[n-1])/2
18     if f(x[n+1])*f(x[n-1]) < 0:
19         x[n] = x[n-1]
20     elif f(x[n+1]) == 0 :
21         n = n + 1
22         break
23     n = n + 1
24
25 print('Найден корень x = {0:.3f}, число итераций - {1}'.format(x[n],n-1))
```

Результат:

Найден корень  $x = 3.007$ , число итераций - 7

# Метод хорд

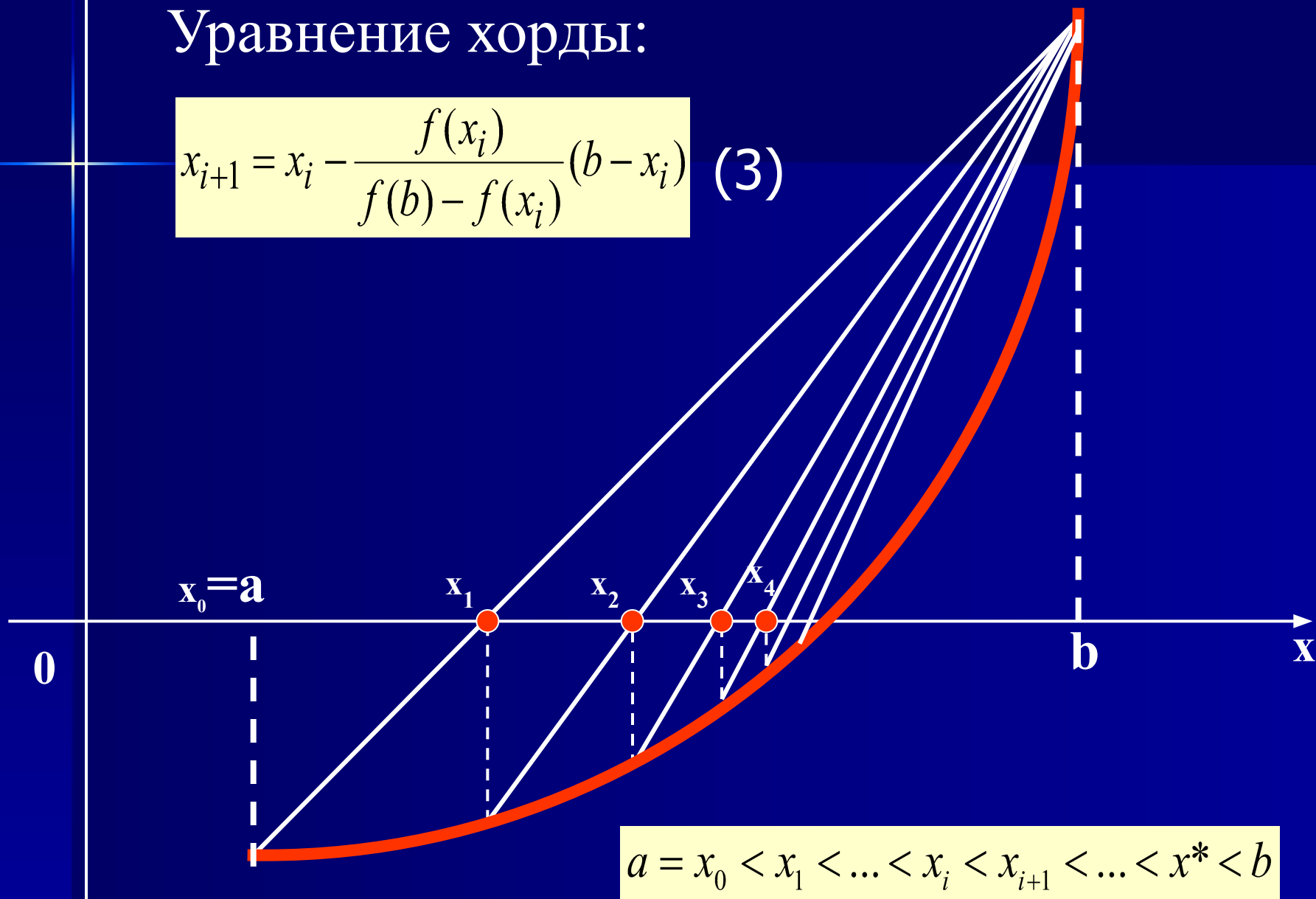
Идея метода основана на том, чтобы использовать не только разность знаков функции на концах отрезка, но и сами значения в этих точках для построения очередного приближения к корню.

Очередным приближением выбирается не середина отрезка  $[a;b]$ , а точка пересечения с осью  $OX$  отрезка, проходящего через точки  $(a, f(a))$  и  $(b, f(b))$ .

# МЕТОД ХОРД

Уравнение хорды:

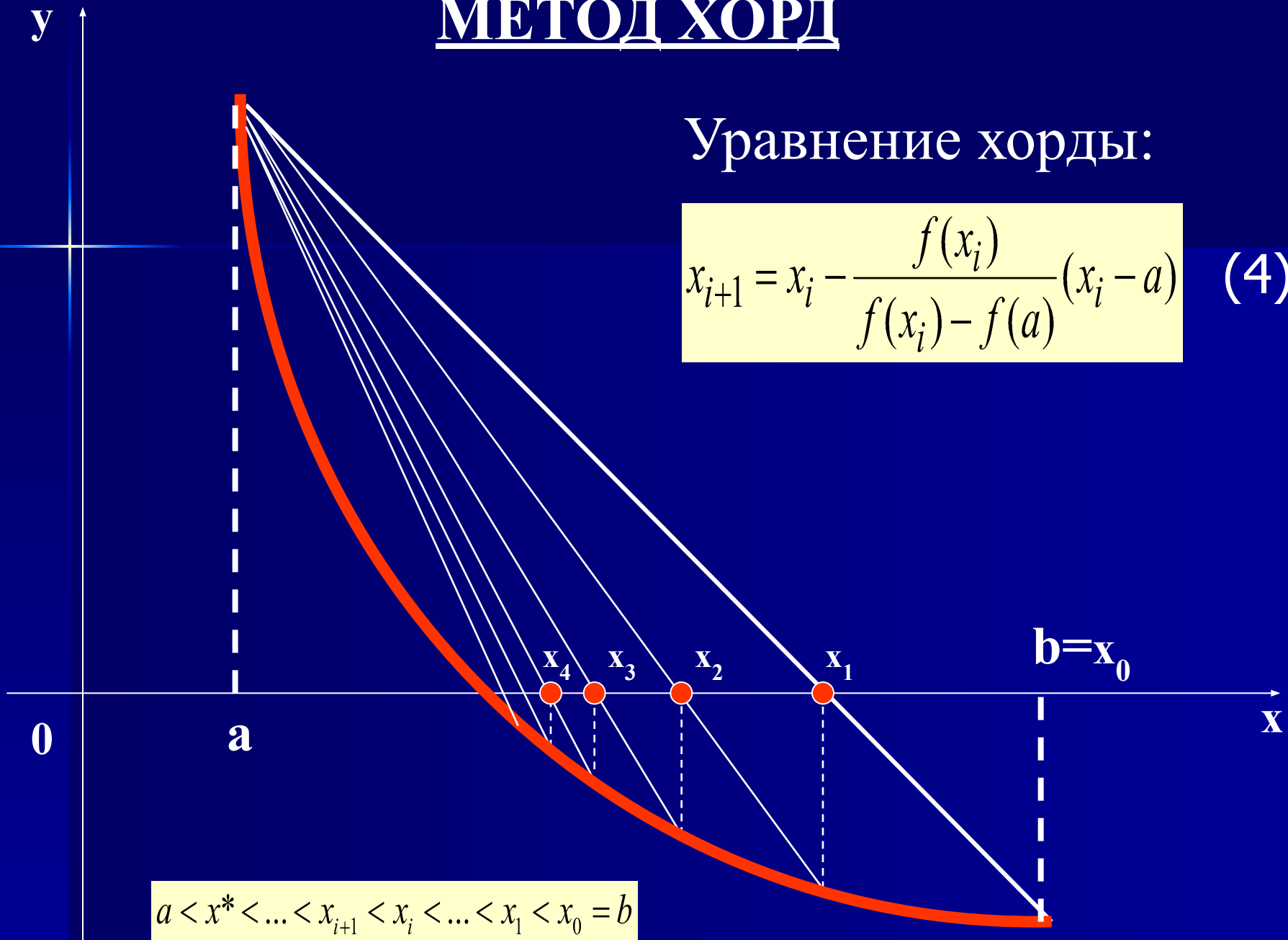
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(b) - f(x_i)}(b - x_i) \quad (3)$$



# МЕТОД ХОРД

Уравнение хорды:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(a)}(x_i - a) \quad (4)$$



$$a < x^* < \dots < x_{i+1} < x_i < \dots < x_1 < x_0 = b$$

# Формулы метода хорд

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \frac{b - x_i}{f(b) - f(x_i)} \quad (3) \quad f'(x_i) f''(b) \geq 0$$

двигается левый конец интервала

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \frac{x_i - a}{f(x_i) - f(a)} \quad (4) \quad f'(x_i) f''(a) < 0$$

двигается правый конец интервала

# Оценка погрешности

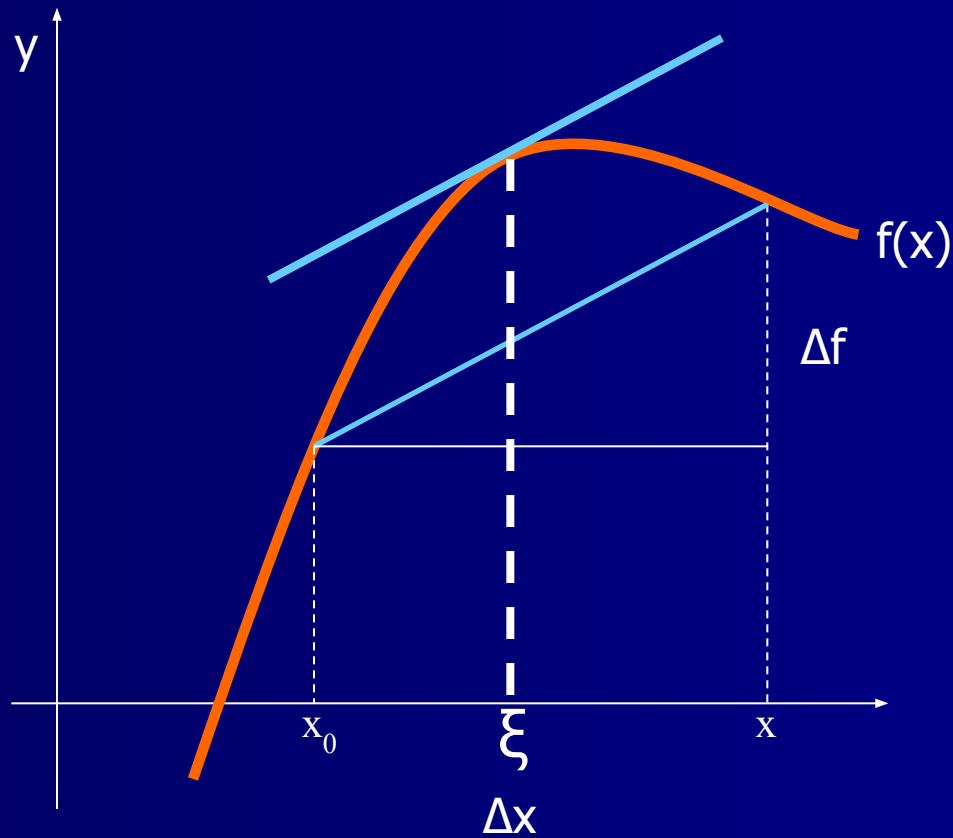
$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i - f(x_i) \frac{b - x_i}{f(b) - f(x_i)} \Rightarrow \\f(x_i) &= \frac{f(b) - f(x_i)}{b - x_i} \cdot (x_i - x_{i+1}) = \\&= f'(\xi_i)(x_i - x_{i+1}).\end{aligned}$$

# Оценка погрешности

Теорема Лагранжа. Пусть функция  $f$  определена на некотором промежутке и имеет на нем конечную производную  $f'$ . Если две точки  $x$  и  $x_0$  находятся в данном промежутке, то существует точка  $\xi$  между  $x$  и  $x_0$  такая, что

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$





# Погрешность метода хорд

Если  $f'$  и  $f''$  непрерывны, а числа  $m$  и  $M$  такие, что

$$0 < m \leq |f'(x)| \leq M, x \in [a; b]$$

тогда погрешность оценивается формулой

$$\Delta \leq \frac{M - m}{m} |x_i - x_{i-1}|, i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

# Достижение точности

Для условия достижения заданной точности можно воспользоваться оценкой (5):

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon \cdot \frac{m}{M - m}$$

Однако, если интервал  $[a, b]$  небольшой, то можно предположить, что

$$M \leq 2 \cdot m$$

Тогда для условия достижения заданной точности можно воспользоваться соотношением:

$$|x^* - x_i| \leq |x_i - x_{i-1}|$$

# Особенности метода хорд

+

- Обычно сходиться быстрее, чем метод половинного деления.
- Не зависит от вида конкретной функции, хотя она должна быть дифференцируема.

-

- Имеет линейную скорость сходимости.
- Обладает односторонней сходимостью.

# Метод касательных (метод Ньютона)

Основная идея состоит в построении очередного приближения не хордой, а касательной к графику функции  $y=f(x)$  в точке  $(x_i, f(x_i))$ .

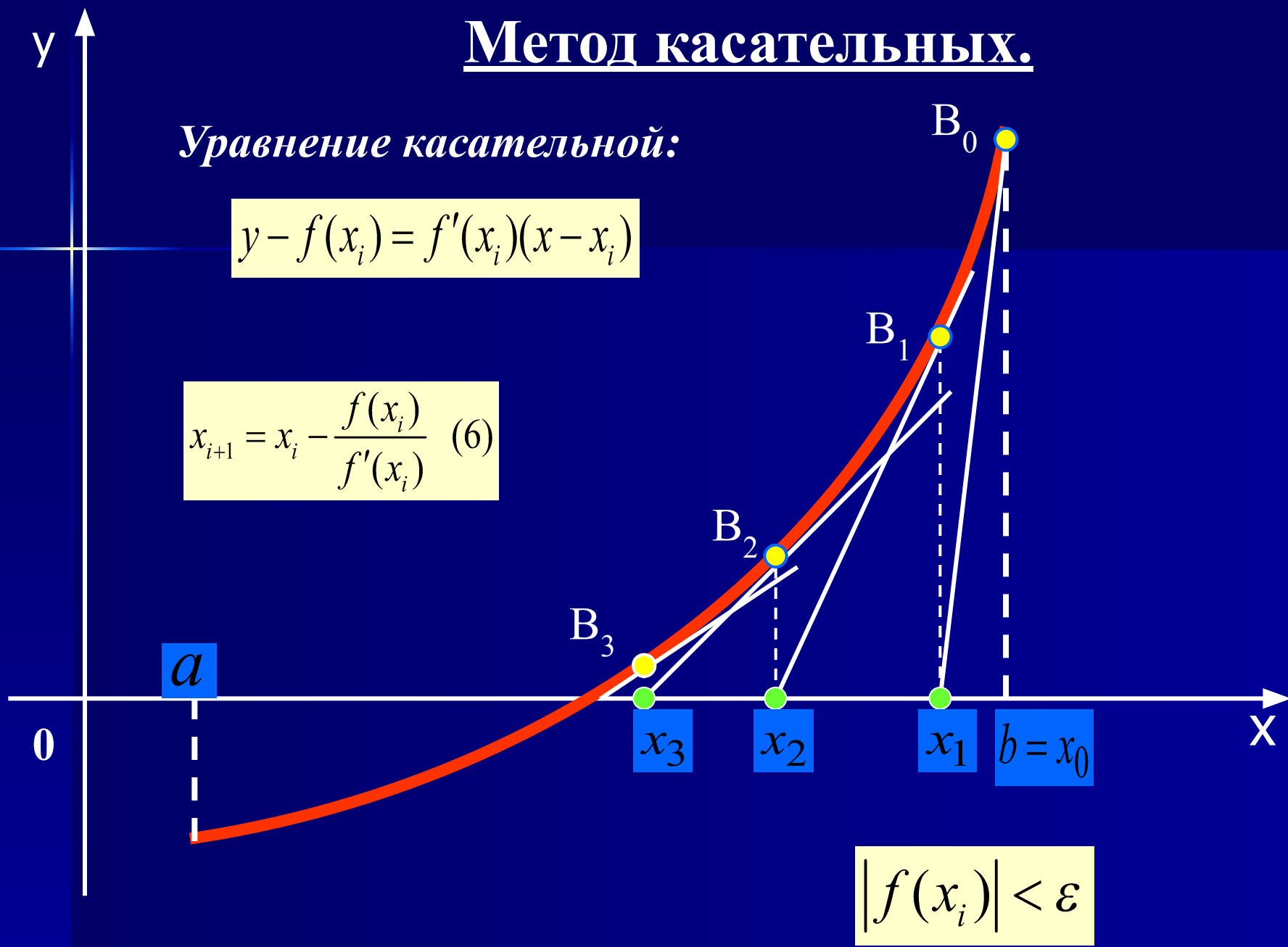
Выбор начального приближения  $x_0$  зависит от вида графика функции на данном отрезке.

# Метод касательных.

Уравнение касательной:

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (6)$$



# Анализ сходимости метода Ньютона

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Пусть  $x^*$  - точный корень из  $[a;b]$ ,  $x_n \approx x^*$ .  
Тогда между  $x_n$  и  $x^*$  найдётся точка  $\xi_n$   
такая, что

$$f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi_n)(x^* - x_n)^2$$

Если  $x_n$  достаточно близко к  $x^*$ , то можно  
отбросить третье слагаемое и получить  
приближенное равенство:

$$f(x^*) = 0 \approx f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n)$$

Отсюда

$$x^* \approx x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

# Оценка погрешности метода касательных

Если  $|f'(x)| \geq m, |f''(x)| \leq M_2$ , то

$$\Delta_x \leq \frac{M_2}{2m} (x_n - x_{n-1})^2 \quad (7)$$

Фактически в окрестности корня на каждой итерации погрешность возводится в квадрат, т.е. число верных знаков удваивается. Но в эту окрестность еще надо попасть. Если область сходимости мала, то метод чувствителен к начальному приближению.

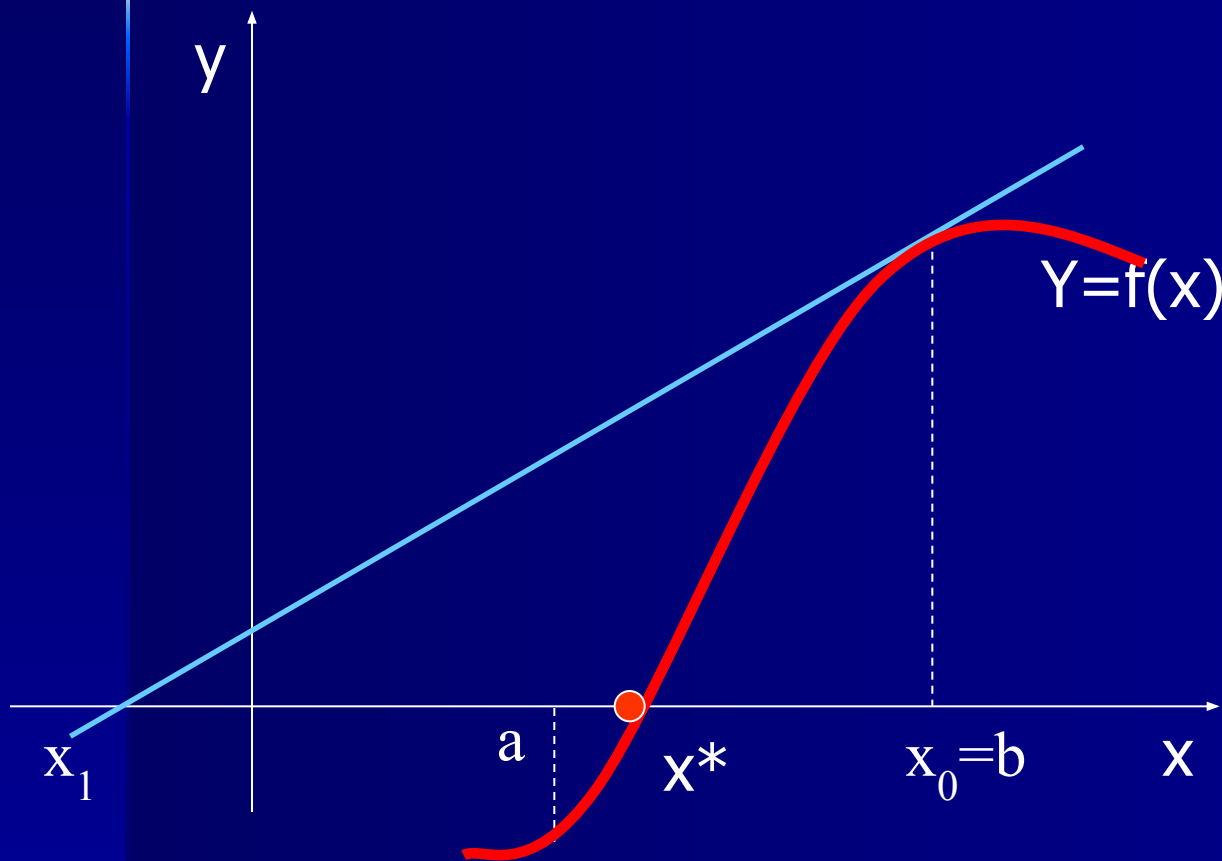


# Достижение точности

Для условия достижения заданной точности  $\varepsilon$  и прекращения вычислений можно использовать оценку (7):

$$(x_n - x_{n-1})^2 \leq \varepsilon \cdot \frac{2m}{M_2}$$

В этом методе выбор начального приближения может оказаться неудачным, и последовательность приближений не будет сходиться. Пример:



Условие  
Фурье:

$$f(x_0)f''(x_0) > 0$$

# Особенности метода касательных

- +
  - Наиболее быстро сходящийся метод (*квадратичная скорость сходимости*).
- - Необходимо вычислять в каждой точке приближения производную.
  - Сходимость метода односторонняя.
  - Требуется хорошего начального приближения в случае малой области сходимости.

Недостатки метода Ньютона можно преодолеть следующим образом:

- Для выхода в непосредственную близость корня сначала применяют гарантированный медленный метод, а затем переходят на метод Ньютона.
- Затруднение с вычислением производной можно избежать, заменив ее конечно-разностным отношением:

$$f'(x_i) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

# Исторический пример использования метода

Эмпирически метод касательных применялся в древности для нахождения квадратного корня (длины гипотенузы).

Пусть  $f(x)=x^2 - a$ ,

тогда решением уравнения  $f(x)=0$  является:

$$\sqrt{a}$$

# Пример

Составим рекуррентное соотношение:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - a}{2 \cdot x_i} = \frac{1}{2} \cdot \left( x_i + \frac{a}{x_i} \right)$$

# Пример: a=9

$$x_{i+1} = \frac{1}{2} \cdot \left( x_i + \frac{a}{x_i} \right)$$

$$x_0 = 9$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left( 9 + \frac{9}{9} \right) = 5$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left( 5 + \frac{9}{5} \right) = 3.4$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot \left( 3.4 + \frac{9}{3.4} \right) = 3.023529 \dots$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \cdot \left( 3.023529 + \frac{9}{3.023529} \right) = 3.000091 \dots$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \cdot \left( 3.000091 + \frac{9}{3.000091} \right) = 3.000000 \dots$$

# Метод секущих

– это упрощение метода касательных, когда затруднительно найти производную. Заменяем в методе касательных производную конечно-разностным отношением:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i) \quad (8)$$



# Особенности метода секущих

+

- Не требует дифференцированной функции.
- При его реализации на каждой итерации вычисляется только одно новое значение функции.

-

- Требуется два начальных приближения  $x_0$  и  $x_1$ . Обычно это один из концов отрезка и близкая к нему точка.
- Метод уступает в скорости сходимости методу касательных (сверхлинейная скорость с  $a=1.618$ ).

# Метод простой итерации

Рассмотренные методы решения уравнения  $f(x)=0$  сводились к итерационной процедуре вида

$$x_{i+1} = \varphi(x_i) \quad (9)$$

Основная идея метода простой итерации состоит в том, чтобы построить универсальный метод типа (9).

Исходное уравнение  $f(x)=0$  заменяют эквивалентным ему  $x=\varphi(x)$ .

После этого выбирается начальное приближение  $x_0$ , которое подставляют в функцию  $\varphi(x)$ :

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

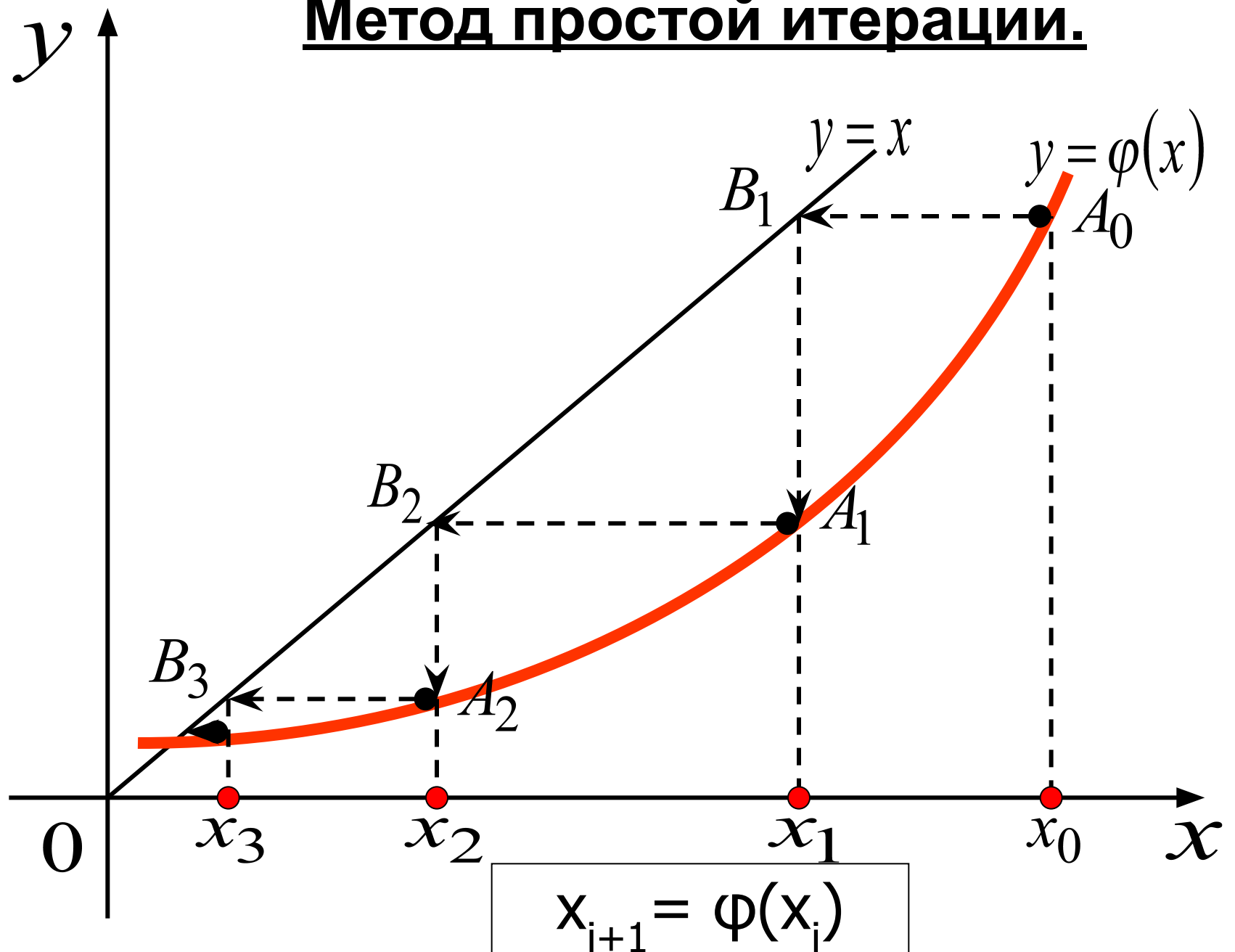
$$x_2 = \varphi(x_1)$$

.....

$$x_{i+1} = \varphi(x_i)$$

.....

# Метод простой итерации.



# Метод простой итерации.



Таким образом, получим  
последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$   
Рассмотрим, в каком случае она сходится.

$$|x_{i+1} - x^*| = |\varphi(x_i) - \varphi(x^*)| \xrightarrow{\text{Лагранжа}} |(x_i - x^*)\varphi'(\xi)| \leq |\varphi'(\xi)| \cdot |x_i - x^*|$$

$$x_i < \xi < x^*$$

Условие сходимости:

$$|\varphi'(\xi)| < 1$$

**Модуль  $\varphi'(x)$  в некоторой окрестности корня должен быть меньше 1, чтобы итерационный процесс сходился со скоростью геометрической прогрессии.**

# Приведение уравнения к итерационному виду

Пример 1.

$$f(x)=0$$

$$x \cdot \operatorname{tg}(x) - 1 = 0$$

$$x = \varphi(x)$$

$$x = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \pi k$$

# Приведение уравнения к итерационному виду

Пример 2.

$$f(x)=0$$

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

$$x=\varphi(x)$$

$$x = \frac{1}{x^2} - 3$$



# Приведение уравнения к итерационному виду

Способы приведения уравнения могут быть различными, но важно добиться выполнения условия сходимости:

$$|\varphi'(\xi)| < 1$$

в окрестности корня или на всем отрезке  $[a;b]$ . Рассмотрим универсальный способ приведения уравнения к итерационному виду.

## В общем случае используется следующий алгоритм:

- $f(x)=0$  умножим на константу  $\lambda$
- $\lambda * f(x)=0$  вычтем обе части из  $x$
- $x - \lambda * f(x) = x$
- т.о.,  $\varphi(x) = x - \lambda * f(x)$
- подберем  $\lambda$  т. о., чтобы на  $[a, b]$  выполнялось условие сходимости:

$$|\varphi'| < 1$$

# Пример.

Пусть

$f(x) = x^3 - x^2 - 1000 = 0$ . Это уравнение имеет один корень на  $[10, 11]$ .

Производная

$f'(x) = 3x^2 - 2x$  на  $[10, 11]$  монотонно возрастает:

$$m_1 = f'(10) = 280$$

$$M_1 = f'(11) = 341.$$

$$\lambda = \frac{2}{280 + 341} = \frac{2}{621} \approx \frac{1}{300},$$

Итерационный вид уравнения:

$$x = x - \frac{x^3 - x^2 - 1000}{300}.$$

$$x_0 = 10,$$

$$x_1 = 10.33333333,$$

$$x_3 = 10.3446913,$$

$$x_4 = 10.3446910.$$

# Подбор параметра $\lambda$

Пусть на отрезке  $[a;b]$  производная функции  $f(x)$  ограничена:

$$0 < m_1 \leq f'(x) \leq M_1.$$

Положим  $\lambda = 2/(M_1 + m_1)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} |\varphi'(x)| &= \left| 1 - \frac{2}{M_1 + m_1} f'(x) \right| \leq 1 - \frac{2m_1}{M_1 + m_1} = \\ &= \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1} < 1. \end{aligned}$$

**Упражнение.** На отрезке  $[1;2]$  привести к итерационному виду уравнение  $x^4 - 2x - 3 = 0$ .

Производная  $f'(x) = 4x^3 - 2$  на  $[1;2]$  монотонно возрастает:  
 $m_1 = f'(1) = 2$   
 $M_1 = f'(2) = 30$ .

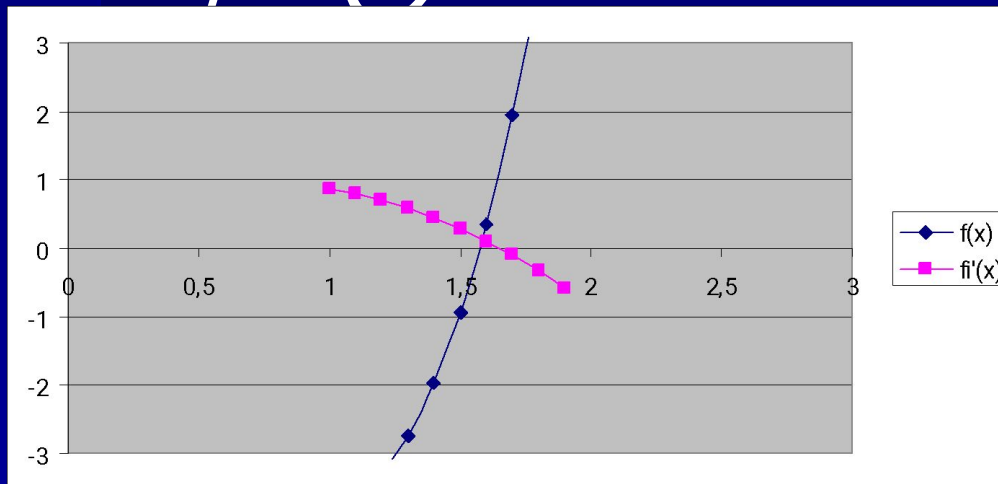
$$\lambda = 2 / (M_1 + m_1)$$

$$\lambda = 2 / (30 + 2) = 1/16$$

$$\varphi(x) = x - \lambda * f(x)$$

$$x = x - (x^4 - 2x - 3) / 16$$

$$\phi' = 1 - (2x^3 - 1) / 8$$



# Оценка погрешности приближений

Если  $|\varphi'(x)|_{[a;b]} \leq q,$   
 $0 \leq q < 1$

то на каждой итерации

$$\Delta_{x_i} = \frac{q}{1-q} \cdot |x_i - x_{i-1}|$$

# Условие достижения заданной точности

Таким образом, если задана точность приближенного корня  $\varepsilon$ , то итерационный процесс необходимо закончить при выполнении условия

$$\frac{q}{1-q} |x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon$$

# Особенности МПИ

+

- Самый простой в реализации.
- Скорость его сходимости зависит от конкретного вида (может быть линейной, может быть выше).

-

- Требуется приведения уравнения к итерационному виду, чтобы выполнялось условие сходимости.



# Методы решения нелинейных уравнений

Метод	Скорость сходимости
половинного деления	линейная
хорд	линейная
касательных	квадратичная
секущих (хорд-касательных)	сверхлинейная
простой итерации	Линейная/ квадратичная