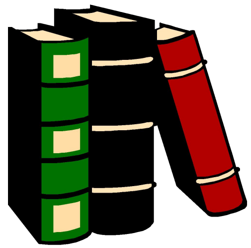
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ РХТУ имени Д. И. Менделеева



Дифференциальные уравнения

Лекция № 5

Линейная независимость функций. Определитель Вронского и его свойства. Структура общего решения ЛОДУ и ЛНДУ 2-го порядка.

Линейная независимость функций.

Определение1. Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, определенные на интервале (a, b), называются *линейно зависимыми* в этом интервале, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, из которых по меньшей мере одно не равно нулю, и такие, что

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \epsilon (a, b) \quad (1)$$

Определение2. Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, определенные на интервале (a, b), называются *линейно независимыми* в этом интервале, если равенство (1) выполняется только в том случае, когда

$$\lambda_1 = \lambda_2, = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Замечание. Функция, тождественно равная нулю , не может входить в совокупности линейно независимых функций, так как если, например, $y_1(x) \equiv 0$, то равенство (1) будет иметь место при

$\lambda_1 = 1, \lambda_2, = \cdots = \lambda_n = 0$ и, следовательно,функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ –линейно зависимы.

Например, система функций:

$1, x, x^2, x^3$ линейно независима на R,

равенство $\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3 = 0$ выполняется для $\forall x \epsilon R$ при условии, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0,$$

т.к. $\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3$ многочлен степени $n \leq 3$ не может иметь больше трех корней,

а система функций: $1, x^2, x^2 + 1$ линейно зависима на R,

равенство $\lambda_1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 (x^2 + 1) = 0$ выполняется для $\forall x \epsilon R$ при

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$$

Для случая двух функций можно сформулировать так:

Определение3. Функции $y_1(x), y_2(x)$, определенные на интервале (a,b), называются *линейно зависимыми* в этом интервале, если существует такое число $\lambda \neq 0$, что выполняется равенство:

$$y_2(x) = \lambda\, y_1(x) \qquad \forall x \epsilon (a,b)$$

т.е., их отношение $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \equiv const$

В противном случае функции $y_1(x), y_2(x)$,называются *линейно независимыми* на интервале (a,b).

Определение4.Функции $y_1(x), y_2(x)$, определенные на интервале (a,b), называются *линейно независимыми* ,если их отношение

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \not\equiv const \qquad \forall x \epsilon (a,b)$$

,

Пример1. Проверить линейную независимость функций:

a) $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{5x}$,

b) $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$

c) $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = 5e^{2x}$,

Решение. Воспользовавшись определением, составим дробь $\frac{y_2}{y_1}$ и в зависимости от того, будет ли она равна числу или функции от x, сделаем соответствующий вывод:

a) $\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{5x}}{e^{2x}} = e^{3x} \neq \text{const}$, следовательно, функции линейно независимы;

b) $\frac{y_2}{y_1} = \frac{xe^{2x}}{e^{2x}} = x \neq \text{const}$, следовательно, функции линейно независимы;

c) $\frac{y_2}{y_1} = \frac{5e^{2x}}{e^{2x}} = 5 = \text{const}$, следовательно, функции линейно зависимы

Определитель Вронского и его свойства

- **Определение5.** Определитель

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \qquad (2)$$

называется *определителем Вронского (вронскиан)* функций $y_1(x), y_2(x)$.

Для трех функций:

$$W_{y_1,y_2,y_3}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}$$

Теорема1. (*необходимое условие линейной зависимости*)

Если функции $y_1(x), y_2(x)$ являются линейно зависимыми на интервале (a, b), то их определитель Вронского тождественно равен нулю:

$$W_{y_1,y_2}(x) \equiv 0 \qquad \forall x \epsilon (a, b)$$

Доказательство. Так как функции являются линейно зависимыми на (a, b), то они связаны равенством;

$$y_2(x) = \lambda\, y_1(x) \qquad \forall x \epsilon (a, b) \text{ , где } \lambda \neq 0.$$

Поэтому $y_2'(x) = \lambda y_1'(x)\ \forall x \epsilon (a, b)$ и , следовательно, с учетом формулы (2) получаем:

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & \lambda\, y_1(x) \\ y_1'(x) & \lambda y_1'(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda y_1(x)\, y_1'(x) - \lambda y_1(x)\, y_1'(x) \equiv 0 \ \ \forall x \epsilon (a, b).$$

Теорема доказана.

- **Теорема2**. *(достаточное условие линейной независимости).*

Если определитель Вронского функций $y_1(x), y_2(x)$ хотя бы в одной точке интервале (a, b) не равен нулю, то функции $y_1(x), y_2(x)$ являются линейно независимыми на (a, b).

Доказательство этого утверждения легко провести рассуждением «от противного» с использованием теоремы1

Пример2. Найти определитель Вронского для системы функций:

$$y_1(x) = cosx, \;\; y_2(x) = sinx.$$

Решение.

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{vmatrix} = cos^2x + sin^2x = 1$$

Отсюда следует, что функции $cosx, sinx$ линейно независимы.

Теорема3.

Пусть $y_1(x), y_2(x)$ – решения ЛОДУ $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$. Если определитель Вронского для функций $y_1(x), y_2(x)$ не равен нулю при каком-нибудь значении $x = x_0$ на (a, b), то он не обращается в нуль ни при каком значении $x \in (a, b)$.

Доказательство.

По условию $y_1(x), y_2(x)$ являются решениями ЛОДУ.

Следовательно,

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0 | \cdot (-y_2)$$

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0 \, | \cdot y_1$$

Сложив полученные равенства, имеем:

$$-y_1''y_2 + y_2''y_1 + P(x)(-y_1'y_2 + y_2'y_1) + Q(x)(-y_1y_2 + y_1y_2) = 0,$$

т. к. $W'_{y_1y_2}(x) = (y_2'y_1 - y_1'y_2)' = y_2''y_1 - y_1''y_2$,то

$W'(x) + P(x)W(x) = 0$ –ЛОДУ 1-го порядка

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -P(x)dx$$

$$\ln|W(x)| = -\int_{x_0}^{x} P(t)dt + ln|C|,$$

$$W(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt},$$

$$W(x_0) = W_0 \neq 0,$$

$$W(x_0) = Ce^{-\int_{x_0}^{x_0} P(t)dt} = \text{C},$$

$$\boxed{W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}} \qquad (*)$$

Формула (*) называется формулой Лиувилля-Остроградского.

Т.к. $W(x_0) \neq 0$ по условию, а показательная функция всегда больше нуля, то $W(x) \neq 0$ для $\forall x \in (a, b)$.

Теорема доказана.

- **Теорема4**. Пусть $y_1(x), y_2(x)$ – решения ЛОДУ

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

Если функции $y_1(x), y_2(x)$ являются линейно независимыми на интервале (a,b), то их определитель Вронского не равен нулю ни при каком $x \in (a,b)$.

Доказательство. Предположим существования такого числа $x_0 \in (a,b)$, что $W_{y_1,y_2}(x_0)=0$.

Тогда столбцы матрицы $W_{y_1,y_2}(x_0)= \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$

будут пропорциональны:

$$y_1(x_0) = k\, y_2\,(x_0),$$

$$y_1'(x_0) = k y_2'\,(x_0).$$

Рассмотрим функцию:

$$y_3(x) = k\, y_2\, (x).$$

Она является решением ЛОДУ $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$

Кроме того, справедливы равенства:

$$y_3(x_0) = k\, y_2\, (x_0) = y_1(x_0),$$
$$y_3'(x_0) = k y_2'\, (x_0) = y_1'\, (x_0),$$

где функция $y_1(x)$ также является решением ЛОДУ.

Следовательно, по теореме о существовании и единственности решения,

Теорема (существования и единственности решения)

Пусть функции $P(x), Q(x), f(x)$ определены и непрерывны на некотором интервале (a, b). Тогда дифференциальные уравнения (1) и (2) при любых начальных значениях $x_0 \epsilon (a, b)$, $y_0, y_0' \epsilon R$ имеют единственные решения, удовлетворяющие условиям:

$$y(x_0) = y_0 \quad , y'(x_0) = y_0'$$

заключаем $y_3(x) = y_1(x)\ \forall x \epsilon (a, b).$

Таким образом, получили:

$$y_1(x) = k\, y_2\,(x) \qquad \forall x \epsilon (a,b),$$

но это тождество противоречит условию теоремы о линейной независимости функций $y_1(x), y_2(x)$.

Значит сделанное предположение о возможности равенства

$$W_{y_1,y_2}(x_0)=0.$$

было ошибочным.

Следовательно, $W_{y_1,y_2}(x) \neq 0 \ \forall x \epsilon (a,b)$.

Теорема доказана.

Структура общего решения ЛОДУ 2-го порядка

- Пусть дано линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка (ЛОДУ):

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0\,, \qquad (3)$$

где $P(x)$, $Q(x)$ $-$непрерывные функции на некотором интервале (a, b).

- **Теорема5**. (*о структуре общего решения ЛОДУ 2-го порядка*)

Если $y_1\,(x)$ и $y_2\,(x)$– линейно независимые на (a, b) решения ЛОДУ 2-го порядка: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, то их линейная комбинация

$y = C_1 y_1\,(x) + C_2 y_2\,(x)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, будет общим решением этого уравнения.

Доказательство.

Согласно определению общего решения Д.У.2-го порядка, требуется доказать:

1. $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ есть решение данного уравнения при любых фиксированных числах $C_1 = C_{10}$ и $C_2 = C_{20}$;
2. надо показать, что при любых начальных условиях $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$, где $x_0 \in (a, b)$ можно найти такие значения произвольных постоянных $C_1 = C_{10}$ и $C_2 = C_{20}$, что функция $y = C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x)$ будет удовлетворять этим начальным условиям.

1. Первое утверждение следует из теоремы4 о свойствах решений ЛОДУ 2-го порядка:

Теорема4**.**Пусть $y_1(x), y_2(x)$ –решения ЛОДУ(2),C_1, C_2-произвольные числа. Тогда функция $y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ также является решением ЛОДУ. (см. лекцию №4)

2.Подставим начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ в решение:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$
$$y' = C_1 y'_1(x) + C_2 y'_2(x).$$

Получим систему уравнений с неизвестными C_1 и C_2

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) \end{cases},$$

где $y_0 = y(x_0), y'_0 = y'(x_0)$.

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} = W_{y_1,y_2}(x_0)$$

есть определитель Вронского для функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ при $x = x_0$, а по теореме4 $W_{y_1,y_2}(x) \neq 0\ \forall x \epsilon\ (a, b)$,т.к $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно независимые.

Поэтому система имеет единственное решение $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}$.

Следовательно, функция $y = C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x)$ будет решением ЛОДУ 2-го порядка, удовлетворяющим начальным условиям

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$

- Итак, $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ – общее решение ЛОДУ 2-го порядка (3). Теорема доказана.

Замечание. Любое третье решение ЛОДУ (3) является линейной комбинацией двух его линейно независимых решений.

Максимальное число линейно независимых решений ЛОДУ2-го порядка равно двум, то есть его порядку.

Определение6. Любые два линейно независимые решения ЛОДУ 2-го порядка называются его ***фундаментальной системой решений*** (ФСР)

- **Пример3**. Доказать, что функция $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, является общим решением ЛОДУ

  $y'' - y = 0.$

  Решение.

  Убедимся подстановкой, что функции $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{x}$ –решения уравнения;

  $$y_1 = e^{-x} \qquad e^{-x} - e^{-x} = 0, \ \ \forall x \in R$$

  $$y_2 = e^{x} \qquad e^{x} - e^{x} = 0, \ \ \forall x \in R$$

  Проверим линейную независимость функций $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{x}$:

  $$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{-x}}{e^{x}} = e^{-2x} \not\equiv const.$$

  Поэтому согласно теореме о структуре общего решения ЛОДУ 2-го порядка функция $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$ является общим решением данного уравнения, а система функций $\{e^{-x}, e^{x}\}$ – ФСР уравнения $y'' - y = 0$

Структура общего решения ЛНДУ 2-го порядка

- Дано:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ – ЛНДУ 2 – го порядка (4)
$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ – ЛОДУ2 – го порядка (3)
где $P(x)$, $Q(x)$, $f(x)$ непрерывные функции на (a, b).

- **Теорема6**. (*о структуре общего решения ЛНДУ 2-го порядка*)

Общее решение ЛНДУ 2-го порядка $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ представляется в виде суммы общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ и любого частного решения $y_{чн}(x)$ ЛНДУ(4),т.е.

$$y(x) = y_0(x) + y_{чн}(x)$$

или

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_{чн}(x)$$

Доказательство.

1. Докажем, что функция $y(x) = y_0(x) + y_{чн}(x)$ является решение ЛНДУ (4), для этого найдем $y'(x)$и $y''(x)$ и подставим $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ в уравнение (4):

$$y_0''(x) + y_{чн}''(x) + P(x)\, y_0'(x) + P(x)\, y_{чн}'(x) + Q(x)\, y_0(x) +$$

$$+Q(x)\, y_{чн}(x) = f(x)\,,$$

$$(\, y_0''(x) + P(x)\, y_0'(x) + Q(x)\, y_0(x)) + (y_{чн}''(x) + P(x)\, y_{чн}'(x) + Q(x)\, y_{чн}(x)) = f(x),$$

$$y_0''(x) + P(x)\, y_0'(x) + Q(x)\, y_0(x) = 0, \text{т. к } y_0(x) - \text{общ. решение ЛОДУ}$$

$$y_{чн}''(x) + P(x)\, y_{чн}'(x) + Q(x)\, y_{чн}(x) = f(x), \text{ т. к } y_{чн}(x) - \text{решение ЛНДУ}$$

$$0 + f(x) \equiv f(x),$$

Следовательно, $y(x) = y_0(x) + y_{чн}(x)$ – решение ЛНДУ (4).

2. Докажем, что $y(x) = y_0(x) + y_{чн}(x)$ является общим решением ЛНДУ. Согласно теореме о структуре общего решения ЛОДУ ,общее решение уравнения (3) можно представить в виде:

$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где $y_1(x)$,$y_2(x)$ $-$линейно независимые на (a, b)решения ЛОДУ (3).

Пусть даны начальные условия: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$ (5),

где $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in R, y_0' \in R$. Необходимо найти такие единственные значения произвольных постоянных $C_1 = C_{10}$ и $C_2 = C_{20}$, что функция $y = C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x) + y_{чн}(x)$ будет удовлетворять этим начальным условиям.

Подставим начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ в решение:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_{чн}(x)$$
$$y' = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) + y_{чн}'(x)$$

Получим систему линейных уравнений с неизвестными C_1и C_2

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y_{чн}(x_0) \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + y_{чн}'(x_0) \end{cases};$$

где $y_0 = y(x_0), y_0' = y'(x_0)$.

или

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - y_{чн}(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' - y_{чн}'(x_0) \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W_{y_1, y_2}(x_0)$$

т.е. определитель Вронского в точке $x = x_0$, но он отличен от нуля, т.к. $y_1(x)$,$y_2(x)$ линейно независимы на (a, b).

Следовательно система имеет единственное решение $C_1 = C_{10}$ и $C_2 = C_{20}$, при которых функция $y = C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x) + y_{чн}(x)$ является частным решением ЛНДУ(4), удовлетворяющим начальным условиям(5)

Таким образом,

$y(x) = y_0(x) + y_{чн}(x)$ –общее решение ЛНДУ2-го порядка (4).

Теорема доказана.

Пример4. Решить уравнение:

$$y'' - y = x.$$

Решение. Проверим, что функция $\varphi(x) = -x$ является решением уравнения:$\varphi''(x) - \varphi(x) = (-x)'' + x \;\; \Rightarrow 0 + x \equiv x \;\; \forall x \in R.$

В примере3 было показано, что общее решение ЛОДУ $y'' - y = 0$

имеет вид:

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$$

Учитывая теорему о структуре общего решения ЛНДУ2-го порядка, получаем;

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - x - \text{общее решение исходного уравнения.}$$

Ответ. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - x.$

- **Теорема7.** Если $y = y_1(x)$ –решение уравнения

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x), \text{ а}$$

$$y = y_2(x) - \text{решение уравнения}$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x),$$

то функция $y = y_1(x) + y_2(x)$ будет решением уравнения

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x) \quad (6)$$

Доказательство.

Т.к y=$y_1(x)$ –решение уравнения $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$, то

$y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x) \equiv f_1(x)$,

y=$y_2(x)$ –решение уравнения $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$, то

$y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x) \equiv f_2(x)$.

Подставим функцию $y = y_1(x) + y_2(x)$ в уравнение (6):

$y_1''(x) + y_2''(x) + P(x)(y_1'(x) + y_2'(x)) + Q(x)(\,y_1(x) + y_2(x))=f_1(x) + f_2(x)$,

- $(y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x)) + (y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x)) = f_1(x) + f_2(x),$

$$f_1(x) + f_2(x) \equiv f_1(x) + f_2(x),$$

Теорема доказана.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

УСПЕХОВ!