

Производная функции

- Производные высших порядков
- Производные от функций, заданных параметрически
- Дифференциал функции
- Геометрический смысл дифференциала
- Основные теоремы о дифференциалах
- Применение дифференциала в приближенных вычислениях
- Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях
- Правило Лопитала

Производные высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется *производной первого порядка*.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается:

$$y''; \quad f''(x); \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \qquad \text{Итак: } y'' = (y')'$$

Производная от производной второго порядка, если она существует называется *производной третьего порядка* и обозначается:

$$y'''; \quad f'''(x); \quad \frac{d^3 y}{dx^3} \qquad \text{Итак: } y''' = (y'')'$$

Производной n – ого порядка (или n – ой производной) называется производная от производной $n - 1$ - ого порядка.

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$

Производные высших порядков

Начиная от производной 4 порядка, производные обозначаются римскими цифрами или цифрами в скобках:

$y^{(5)}$ или y^v - производная пятого порядка.

Вычислить производную n -ого порядка от функции: $y = \ln(x + 1)$

$$y' = (\ln(x + 1))' = \frac{(x + 1)'}{x + 1} = \frac{1}{x + 1} = (x + 1)^{-1}$$

$$y'' = \left((x + 1)^{-1} \right)' = -1 \cdot (x + 1)^{-2}; \quad y''' = \left(-(x + 1)^{-2} \right)' = 1 \cdot 2(x + 1)^{-3}$$

$$y^{(4)} = \left(1 \cdot 2(x + 1)^{-3} \right)' = -1 \cdot 2 \cdot 3(x + 1)^{-4}$$

$$y^{(5)} = \left(-1 \cdot 2 \cdot 3(x + 1)^{-4} \right)' = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(x + 1)^{-5}$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1} (n - 1)! (x + 1)^{-n}$$

Производные от функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Производная первого порядка от этой функции находится по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Найдем производную второго порядка:

$$y''_x = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

Аналогично получаем:

$$y'''_x = (y''_x)'_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} \quad y^{(4)}_x = (y'''_x)'_x = \frac{(y'''_x)'_t}{x'_t} \quad \text{и т. д.}$$

Производные от функций, заданных параметрически

Вычислить производную **3** – о го порядка от функции:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 1 - t^3 \end{cases} \quad y'_x = \frac{(1 - t^3)'}{(t^2)'} = \frac{-3t^2}{2t} = -1.5t$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-1.5t)'}{(t^2)'} = \frac{-1.5}{2t} = -0.75t^{-1}$$

$$y'''_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-0.75t^{-1})'}{(t^2)'} = \frac{0.75t^{-2}}{2t} = \frac{3}{4t^3}$$

Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой точке x отличную от нуля производную, следовательно существует предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x) \Rightarrow$$

[где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$]

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых: $f'(x)\Delta x$ и $\alpha \cdot \Delta x$, являющимися бесконечно малыми при $\Delta x \rightarrow 0$.

При этом первое слагаемое есть бесконечно – малая одного порядка с Δx , так как:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$$

Дифференциал функции

Второе слагаемое есть бесконечно малая функция более высокого порядка по сравнению с Δx , так как:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)\Delta x}{\Delta x} = \alpha(x) = 0$$

Поэтому первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ называют **главной частью приращения функции**.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения:

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Найдем дифференциал независимой переменной, то есть функции $y = x$:

$$y' = x' = 1 \Rightarrow dy = dx = \Delta x$$

Поэтому:

$$dy = f'(x)dx$$

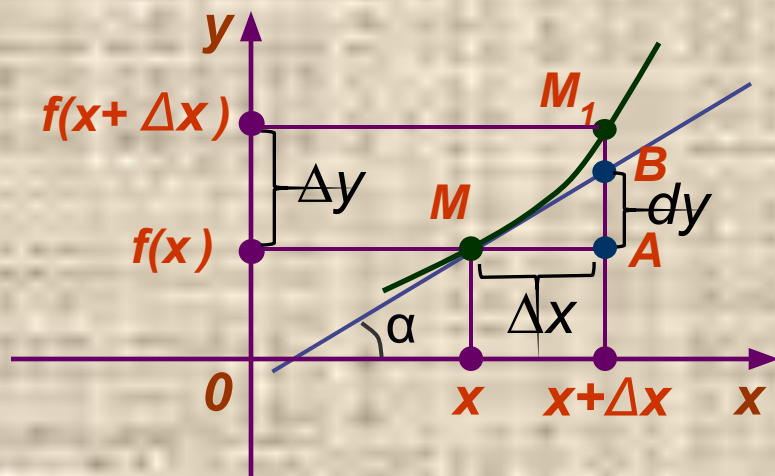
\Rightarrow

Дифференциал функции независимой переменной равен произведению производной функции на дифференциал независимой переменной

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Геометрический смысл дифференциала

Проведем к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$ касательную



Рассмотрим ординату касательной для точки $x+\Delta x$.

Из прямоугольного треугольника ABM имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AB|}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$|AB| = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x$$

Согласно геометрическому смыслу производной, $\operatorname{tg} \alpha = f'(x) \Rightarrow$

$$|AB| = f'(x) \cdot \Delta x = dy$$

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получает приращение Δx .

Основные теоремы о дифференциалах

Теорема 1

Дифференциал суммы, разности, произведения и частного двух дифференцируемых функций находится по формулам:

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$$

Теорема 2

Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента.

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \Rightarrow \underbrace{y'_x \cdot dx}_{dy} = y'_u \cdot \underbrace{u'_x \cdot dx}_{du} \Rightarrow$$

$$dy = y'_u \cdot du$$

Это свойство дифференциала называют **инвариантностью** (неизменностью) формы дифференциала.

Приложение дифференциала в приближенных вычислениях

Как известно, приращение функции можно представить в виде:

$$\Delta y = dy + \alpha(x)\Delta x$$

Отбрасывая бесконечно малую $\alpha(x)\Delta x$ более высокого порядка, чем Δx , получим приближенное равенство:

$$\Delta y \approx dy$$

Это равенство позволяет с большой точностью вычислять приращение любой дифференцируемой функции.

Подставим в равенство выражения для приращения и дифференциала функции:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \quad \Rightarrow$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Формула позволяет приближенно вычислять значение функции в точке $x_0 + \Delta x$, зная значение функции в точке x_0 .

Приложение дифференциала в приближенных вычислениях

Вычислить приближенно: $\operatorname{arctg} 1.05$

Рассмотрим функцию: $y = \operatorname{arctg} x$

$$\operatorname{arctg}(x_0 + \Delta x) \approx \operatorname{arctg}(x_0) + \operatorname{arctg}'(x_0)\Delta x$$

Так как $x_0 + \Delta x = 1.05$ то $x_0 = 1$ $\Delta x = 0.05$

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (\operatorname{arctg} x)'|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{arctg}(1.05) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0.05 \approx \boxed{0.81}$$

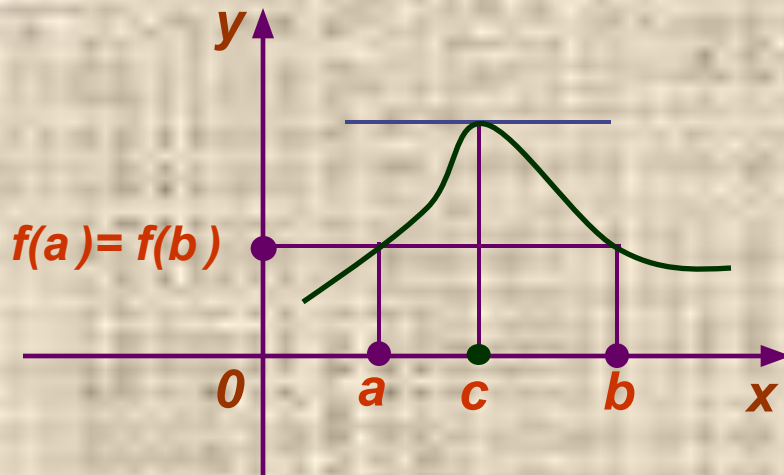
Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ролля (теорема о корнях производной)

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и на концах интервала принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$, в которой производная обращается в ноль.

$$f'(c) = 0$$

Геометрическая интерпретация:



Если функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля, то на графике функции найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox .

Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Коши (теорема об отношении приращений)

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $g'(x) \neq 0$ для $x \in (a; b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$, такая, что выполняется равенство:

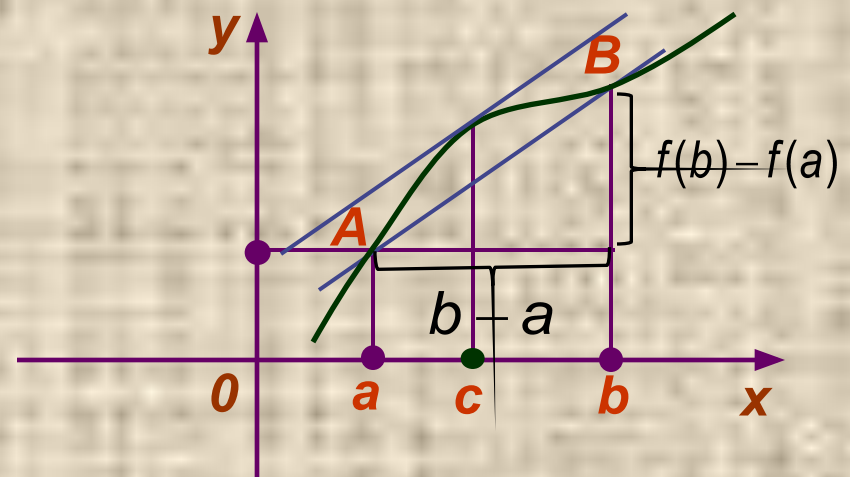
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

На графике функции найдется хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна хорде AB

Теорема Лагранжа (теорема о конечных приращениях)

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$, в которой выполняется равенство:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$



Правило Лопитала

Рассмотрим способ раскрытия неопределенностей вида

$\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, который основан на применении производной.

Теорема

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в ноль в этой точке:

$f(x_0) = g(x_0) = 0$. Если существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \text{то} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Теорема справедлива также в случае, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

Правило Лопитала

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg} 3x)'}{(\operatorname{tg} 5x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \cdot \cos^2 5x}{\cos^2 3x \cdot 5} = \\ &= \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos 5x}{\cos 3x} \right)^2 = \\ &= \frac{3}{5} \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x} \right)^2 = \frac{3}{5} \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos 5x)'}{(\cos 3x)'} \right)^2 = \\ &= \frac{3}{5} \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-5 \sin 5x}{-3 \sin 3x} \right)^2 = \frac{3}{5} \left(\frac{-5}{3} \right)^2 = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

Правило Лопитала

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = (1^\infty) \quad \text{Обозначим: } A = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$$

Прологарифмируем равенство: $\ln A = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} \Rightarrow$

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(\cos 2x))'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x}{\cos 2x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} = -2$$

$$\ln A = -2 \Rightarrow A = e^{-2}$$