

Расширенный алгоритм Евклида

{

- **Расширенный алгоритм Евклида** — это расширение алгоритма Евклида, которое вычисляет кроме наибольшего общего делителя (НОД) целых чисел a и b ещё и коэффициенты соотношения, то есть целые x и y .
- **Коэффициенты соотношения** — представление наибольшего общего делителя целых чисел в виде их линейной комбинации с целыми коэффициентами.

- $x_0 = 1 ; y_0 = 0$
- $X_1 = 0 ; y_1 = 1$
- Для вычисления дополнительных коэффициентов:
 - $X = X(i-2) - (q * X(i-1));$
 - $Y = Y(i-2) - (q * Y(i-1));$
- $\text{НОД}(a, b) = a * x + b * y$

Изначально мы решаем как и по обычному методу:
 $\text{НОД}(a, b) = (a = b * q + r)$

- $x_0 = 1 ; y_0 = 0$
- $X_1 = 0 ; y_1 = 1$
- $X = X(i-2) - (\textcolor{red}{q} * X(i-1));$
- $Y = Y(i-2) - (\textcolor{red}{q} * Y(i-1));$
- Допустим:
- $a = 64; b = 42$
- $64 = 42 * \textcolor{red}{1} + 22;$
- $42 = 22 * \textcolor{red}{1} + 20;$
- $22 = 20 * \textcolor{red}{1} + 2$
- $20 = \textcolor{red}{2} * 10 + 0$
- $\text{НОД}(64 \text{ и } 42) = \textcolor{red}{2}$

$$X_2 = 1 - (\textcolor{red}{1} * 0) = 1$$

$$X_3 = 0 - (\textcolor{red}{1} * 1) = -1$$

$$X_4 = 1 - (\textcolor{red}{1} * (-1)) = \textcolor{red}{2}$$

$$Y_2 = 0 - (1 * 1) = -1$$

$$Y_3 = 1 - (1 * (-1)) = \textcolor{red}{2}$$

$$Y_4 = (-1) - (1 * 2) = \textcolor{red}{-3}$$

$$\text{НОД}(a, b) = (a * x) + (b * y) =$$

$$= 64 * 2 + 42 * (-3) = 128 + (-126) = \textcolor{red}{2}$$

- Для взаимно простых чисел:
- $\text{НОД}(a, b) = 1$
- $a * x + b * y \equiv 1 \pmod{b}$
- $a = 21, 88$
- $\text{НОД}(21, 88) = 21x + 88y = 1$
- $21 = 88 * 0 + 21$
- $88 = 21 * 4 + 4$
- $21 = 4 * 5 + 1$
- $4 = 1 * 4 + 0$
- $x_0 = 1 ;$
- $X_1 = 0;$
- $X = X(i-2) - (q * X(i-1));$

$$X_2 = 1 - (0 * 0) = 1$$

$$X_3 = 0 - (4 * 1) = 4$$

$$X_4 = 1 - (5 * (-4)) = 21$$

$$\text{НОД}(21, 88) = 21 * 21 + 88 * 21 = 1$$

$$a = 88; b = 52$$