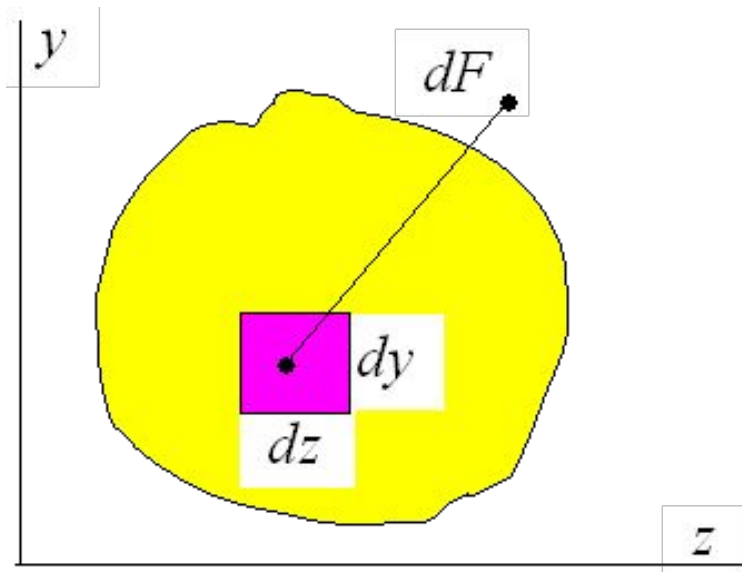


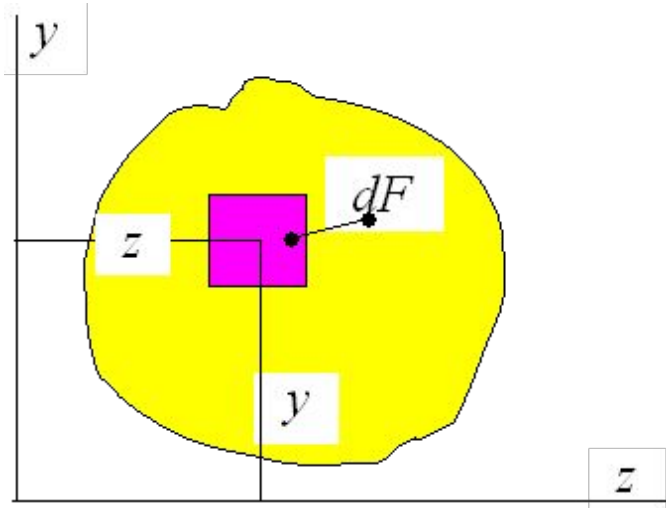
Геометрические характеристики сечений

Площадь поперечного сечения



$$F = \int_F dF = \iint_F dydz$$

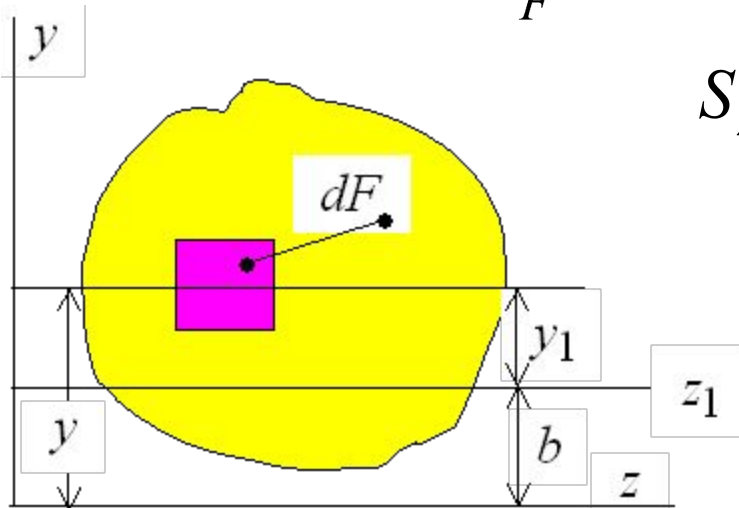
Статические моменты сечения



$$S_z = \int_F y dF \quad S_y = \int_F z dF$$

$$y_1 = y - b$$

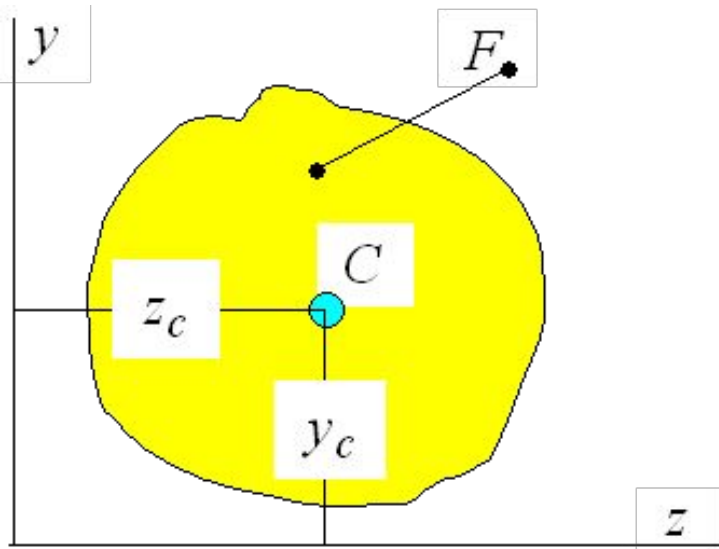
$$S_{z_1} = \int_F y_1 dF = \int_F (y - b) dF = \int_F y dF - \int_F b dF = S_z - bF$$



$$S_{z_1} = 0 \quad S_z = bF$$

Ось z_1 , относительно которой статический момент сечения S_{z_1} равен нулю, называется **центральной**

Статические моменты сечения (продолжение)



Точка пересечения центральных осей Z_1 и Y_1 называется *центром тяжести сечения*

Статический момент инерции относительно любой оси, проходящей через центр тяжести сечения, равен нулю.

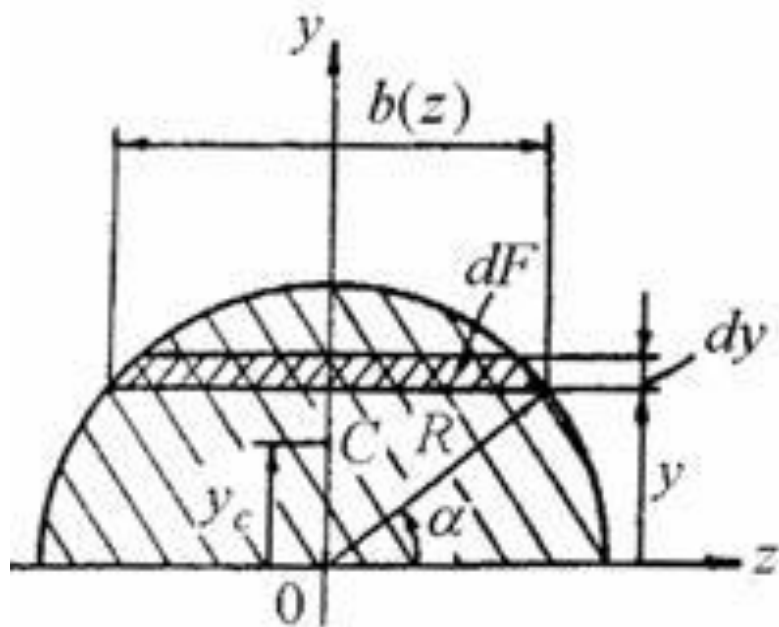
$$y_c = b$$

$$S_z = y_c F$$

$$S_y = z_c F$$

Статические моменты сечения (продолжение)

Определить статический момент полукруга радиусом R относительно оси z , совпадающей с диаметром, и координату центра тяжести y_c .



$$S_z = \int_F y dF$$

$$y = R \cdot \sin \alpha, b(z) = 2R \cdot \cos \alpha,$$

$$dy = (R \cdot \sin \alpha)' \cdot d\alpha = R \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \text{ и}$$

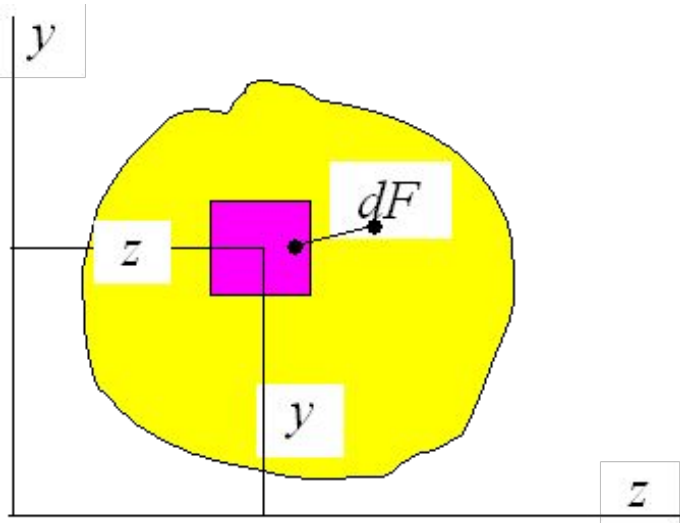
$$dF = b(z) \cdot dy = 2R^2 \cos^2 \alpha \cdot d\alpha$$

Статические моменты сечения (продолжение)

$$\begin{aligned} S_z &= \int_F y dF = \int_0^{\pi/2} R \cdot \sin \alpha \cdot 2R^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot d\alpha = 2R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \\ &= -2R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \cdot d(\cos \alpha) = -\frac{2R^3 \cdot \cos^3 \alpha}{3} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2R^3}{3} (0 - 1) \\ &= \frac{2}{3} R^3. \end{aligned}$$

$$y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{\frac{2}{3} R^3}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,424R.$$

Осевые моменты инерции сечения

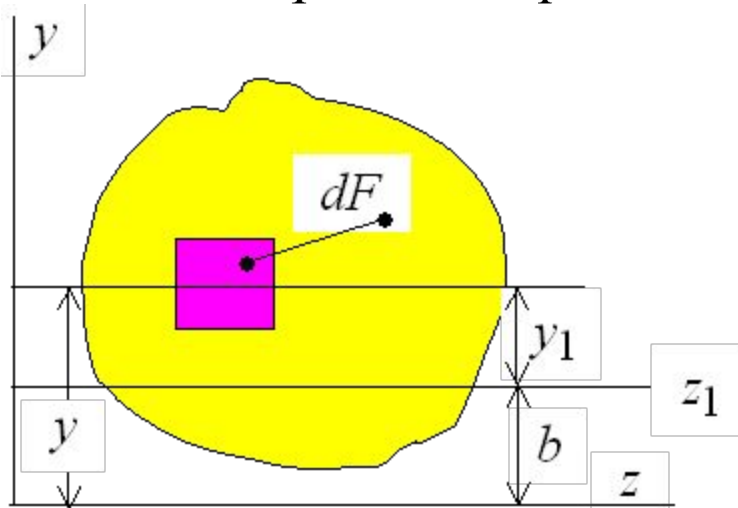


$$I_z = \int y^2 dF$$

$$I_y = \int z^2 dF$$

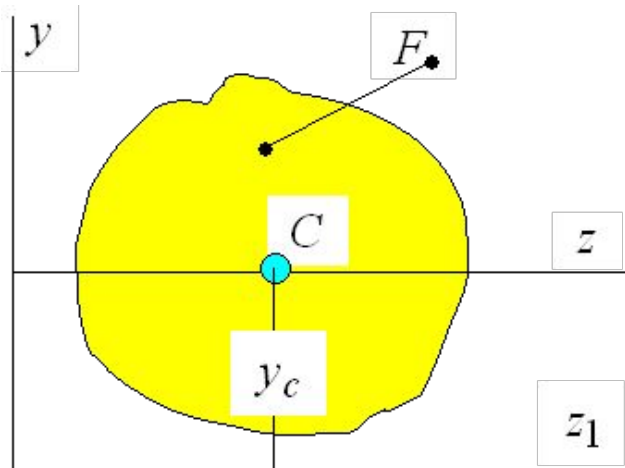
$$y_1 = y - b$$

$$I_{z_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y - b)^2 dF = \int_F y^2 dF - 2 \int_F by dF + b^2 \int_F dF$$



$$I_{z_1} = I_z - 2bS_z + b^2F$$

Осевые моменты инерции (продолжение)



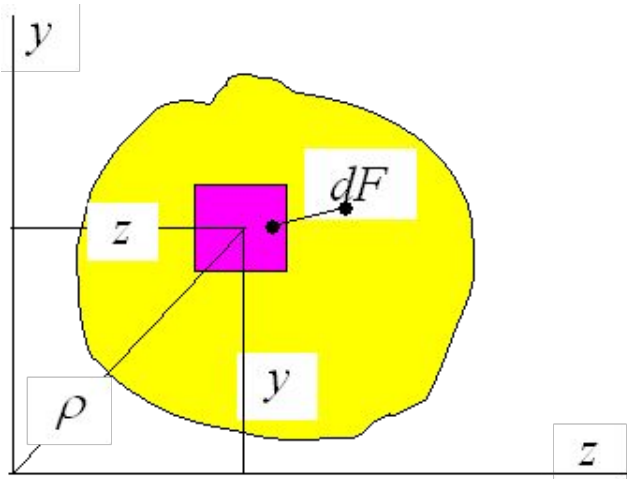
Допустим, что ось z – центральная.

$$S_z = 0, \quad b = y_c$$

$$I_{z_1} = I_z + y_c^2 F$$

Осевой момент инерции относительно центральной оси имеет минимальное значение среди всех моментов относительно осей, параллельной данной центральной.

Полярный момент инерции

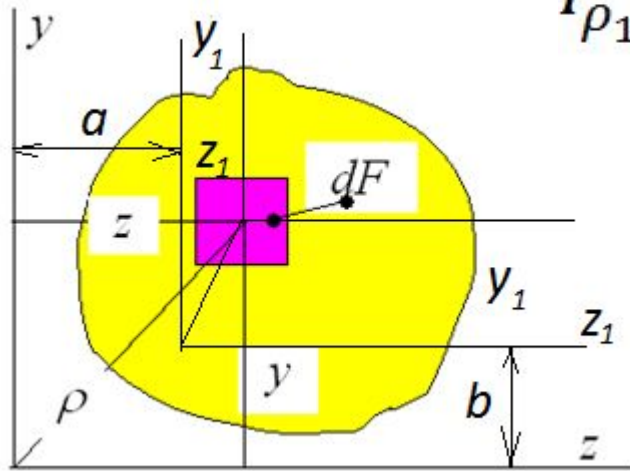


$$I_p = \int_F \rho^2 dF$$

$$\rho^2 = z^2 + y^2$$

$$I_p = \int_F (z^2 + y^2) dF = I_z + I_y$$

Полярные моменты инерции сечения



$$I_{\rho_1} = \int \rho_1^2 dF \quad \rho_1^2 = y_1^2 + z_1^2$$

$$y_1 = y - b \quad z_1 = z - a$$

$$I_{\rho_1} = \int (y_1^2 + z_1^2) dF$$

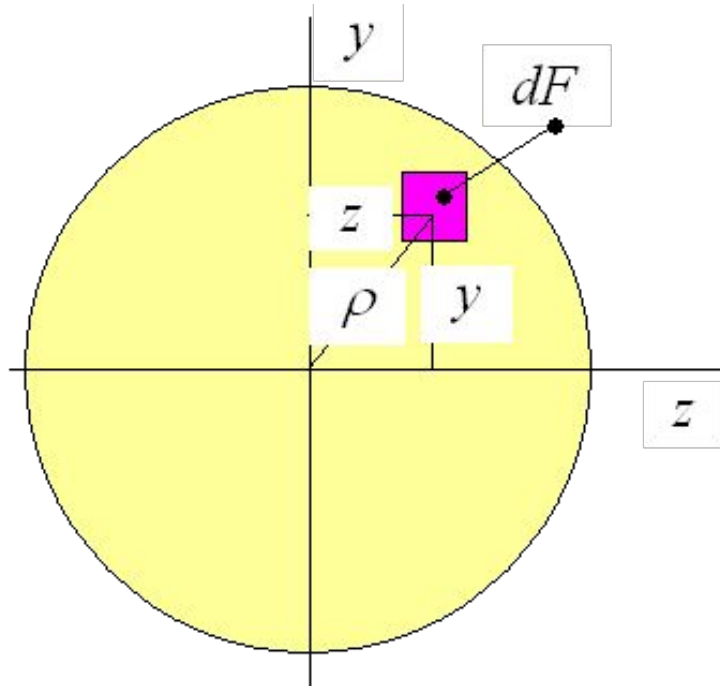
$$= \int [(y - b)^2 + (z - a)^2] dF$$

$$I_{\rho_1} = I_z - 2bS_z + b^2F + I_y - 2aS_y + a^2F$$

- Если оси y и z – центральные, тогда

$$I_{\rho_1} = I_z + b^2F + I_y + a^2F = I_{\rho} + b^2F + a^2F$$

Полярный и осевые моменты инерции для круглого сечения



$$I_p = \int_F (z^2 + y^2) dF = I_z + I_y$$

$$I_y = I_z$$

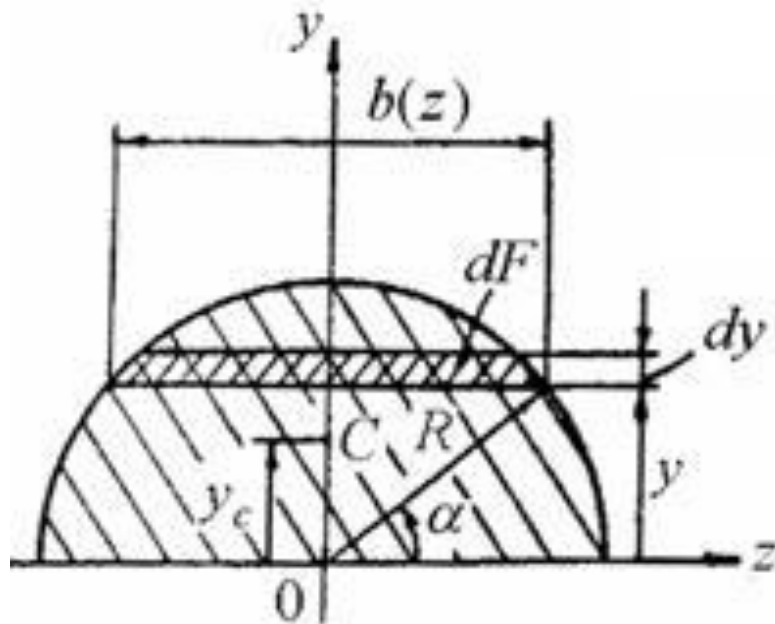
$$I_p = 2I_z$$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

Моменты инерции полукруга относительно основания и центральной оси Z_c , параллельной основанию

За основу берем момент инерции круглого сечения. Момент инерции полукруга относительно диаметра-основания равен

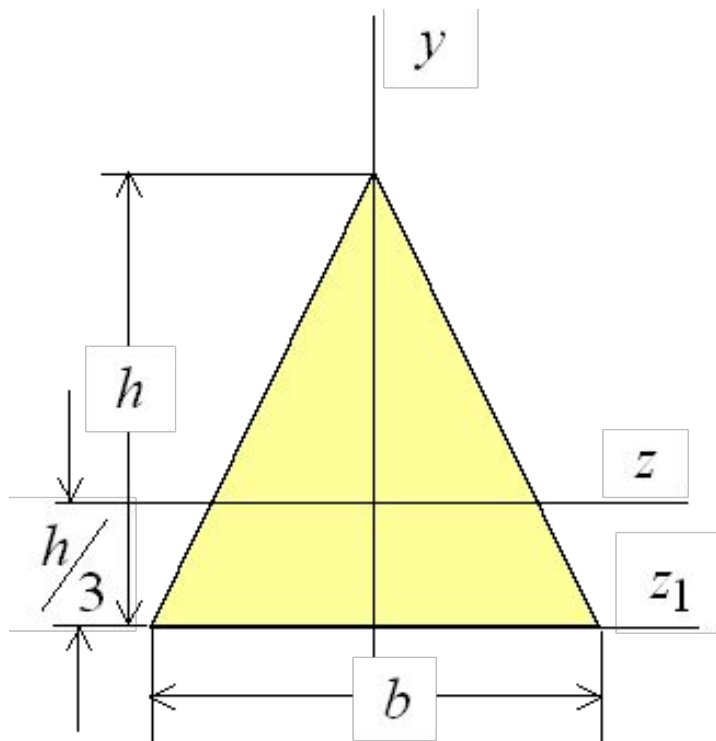


$$I_z = \frac{\pi d^4}{128}$$

$$I_{z_c} = I_z - F y_c^2$$

$$I_{z_c} = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{\pi R^2}{2} (0,424R)^2 = 0,11R^4$$

Осевые моменты инерции для треугольного сечения

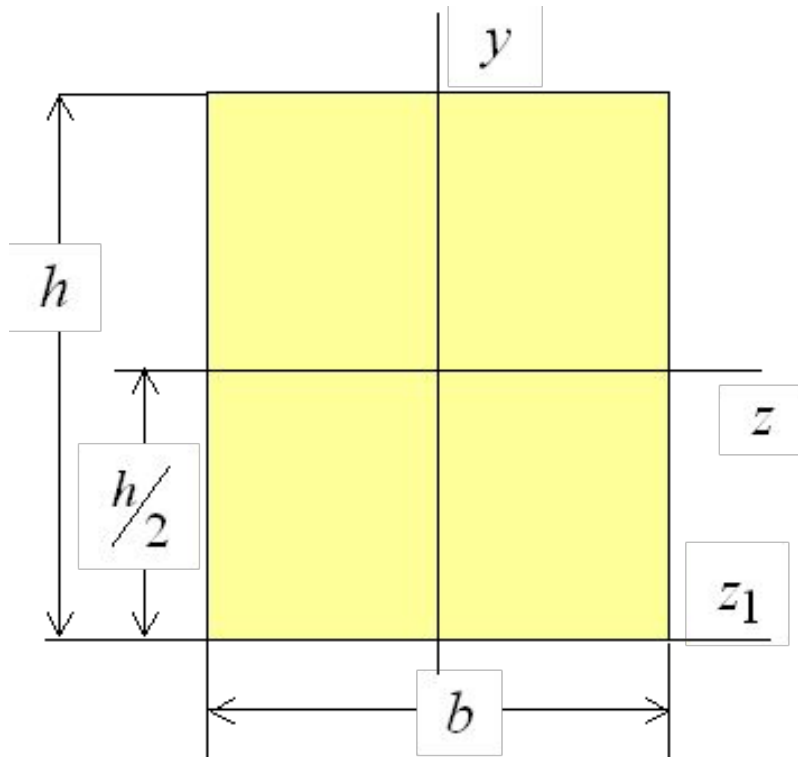


$$I_z = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{z_1} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = 2 \frac{h \left(\frac{b}{2} \right)^3}{12} = \frac{hb^3}{48}$$

Осевые моменты инерции для прямоугольного сечения

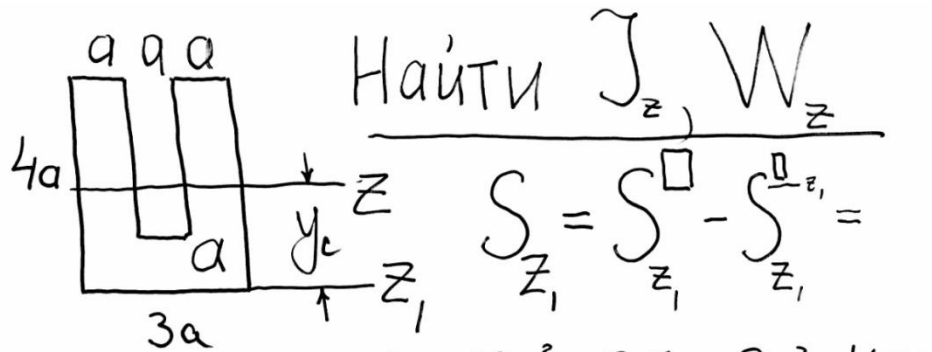


$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{z_1} = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

Определение момента инерции и момента сопротивления относительно оси Z составного сечения



$$S_z = S_{z_1} - S_{z_2} =$$

$$= y_{c1} \cdot F_1 - y_{c2} \cdot F_2 = 2a \cdot 2a^2 - 2,5a \cdot 3a^2 = 16,5a^3$$

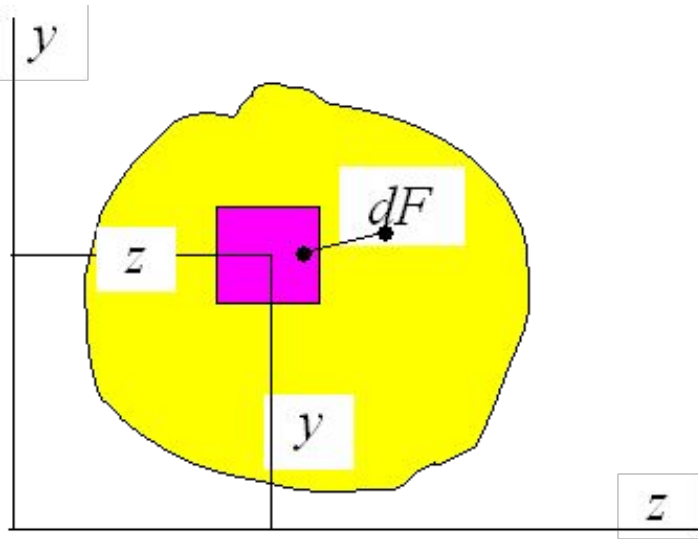
$$y_c = \frac{S_{z_1}}{9a^2} = \frac{5,5}{3}a \quad J_{z_1} = J_{z_1} - J_{z_2} =$$

$$= \frac{3a(4a)^3}{3} - \left(\frac{a(3a)^3}{12} + 3a^2 \cdot (2,5a)^2 \right) = 43a^4$$

$$J_z = J_{z_1} - 9a^2 \cdot \left(\frac{5,5a}{3} \right)^2 = 12,75a^4$$

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{12,75a^4}{\frac{6,5a}{3}} \approx 5,9a^3$$

Центробежный момент инерции



$$I_{zy} = \int_F zy dF$$

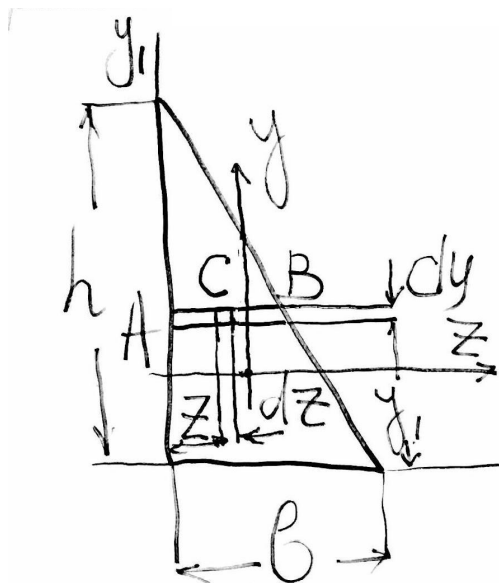
Координатные оси, относительно которых $I_{zy} = 0$, называются главными осями инерции.

Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то они называются главными центральными осями. Начало координат в этом случае находится в центре тяжести сечения.

Осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции. Главные моменты инерции экстремальны относительно всех осей, проходящих через центр тяжести.

Оси симметрии – всегда главные оси.

Определение положения главных центральных осей для прямоугольного треугольника



$$C = \frac{b}{h} (h - y_1)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{bh}{h^2 - b^2}$$

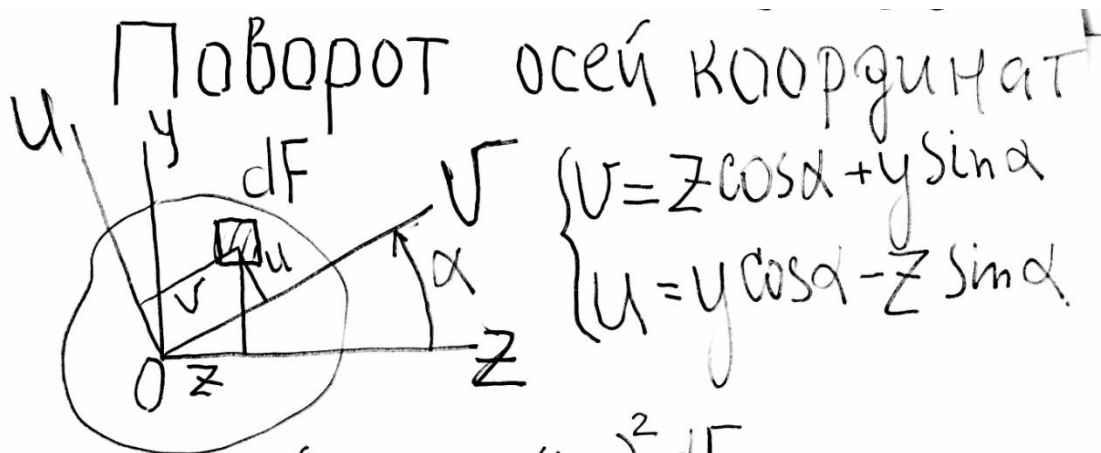
Опр. J_{zy} , ГЛ. Ц. ОСИ

$$J_{zy} = J_{z_1 y_1} - \frac{h}{3} \frac{b}{3} \frac{bh}{2};$$

$$J_{z_1 y_1} = \int y_1 dy_1 \int z_1 dz =$$

$$= \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h y_1 (h - y_1)^2 dy_1 = \frac{b^2 h}{24}$$

$$J_{zy} = \frac{b^2 h}{24} - \frac{b^2 h}{18} = -\frac{b^2 h}{72}$$



$$\begin{cases} v = z \cos \alpha + y \sin \alpha \\ u = y \cos \alpha - z \sin \alpha \end{cases}$$

$$J = \int u^2 dF = \int (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dF$$

$$J_v = \int v^2 dF = \int (z \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dF$$

$$J_{vu} = \int uv dF = \int (z \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - z \sin \alpha) dF$$

$$J_v = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{zy} \sin 2\alpha$$

$$J_u = J_z \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{zy} \sin 2\alpha$$

$$J_{vu} = J_{zy} \cos 2\alpha + \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha$$

$$J_v + J_u = J_z + J_y = \text{const}; \quad J_{vu} = 0 \quad \text{tg} 2\alpha = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z}$$