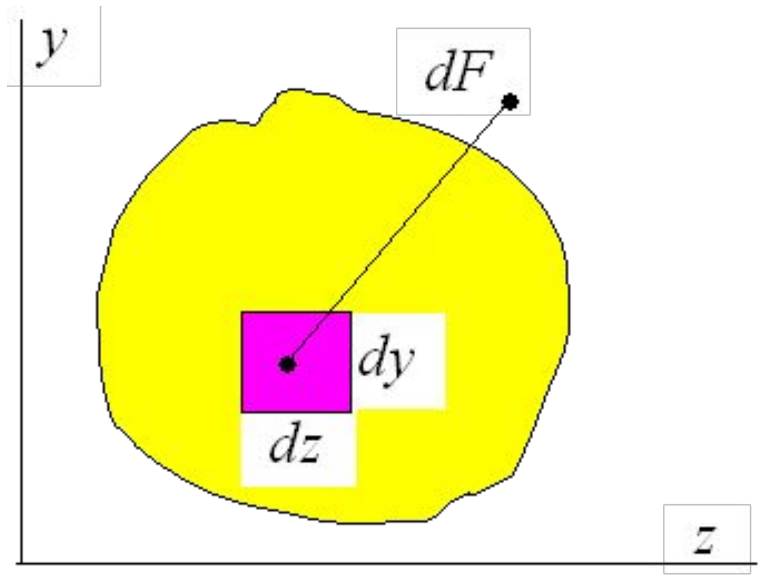
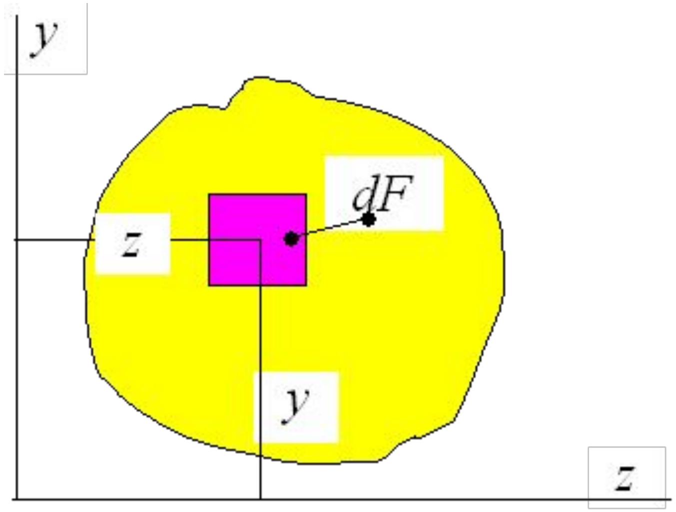
Геометрические характеристики сечений

Площадь поперечного сечения



$$F = \int_F dF = \iint_F dy dz$$

Статические моменты сечения

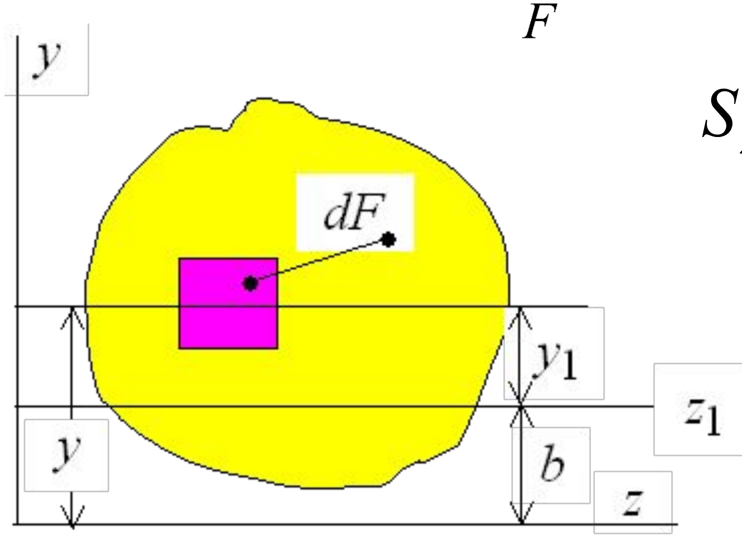


$$S_z = \int_F y dF \qquad S_y = \int_F z dF$$

$$y_1 = y - b$$

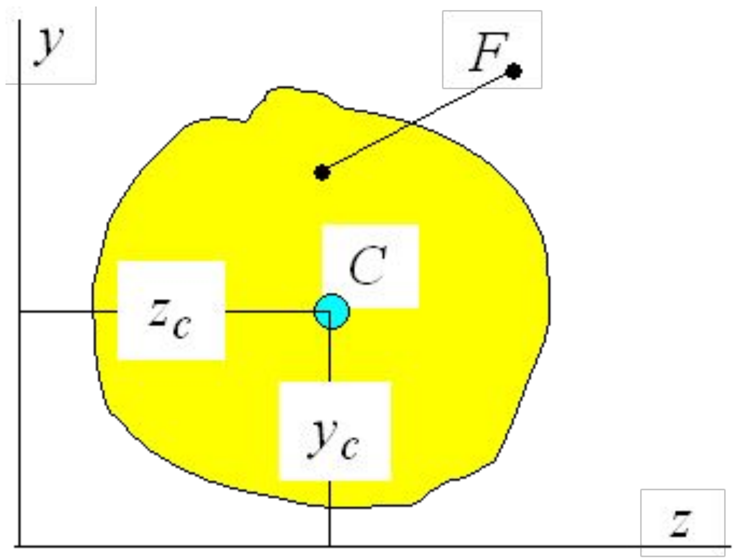
$$S_{z_1} = \int_F y_1 dF = \int_F (y-b) dF = \int_F y dF - \int_F b dF = S_z - bF$$

$$S_{z_1} = 0 \qquad S_z = bF$$



Ось z_1, относительно которой статический момент сечения S_{z_1} равен нулю, называется ***центральной***

Статические моменты сечения (продолжение)



Точка пересечения центральных осей z_1 и y_1 называется ***центром тяжести сечения***

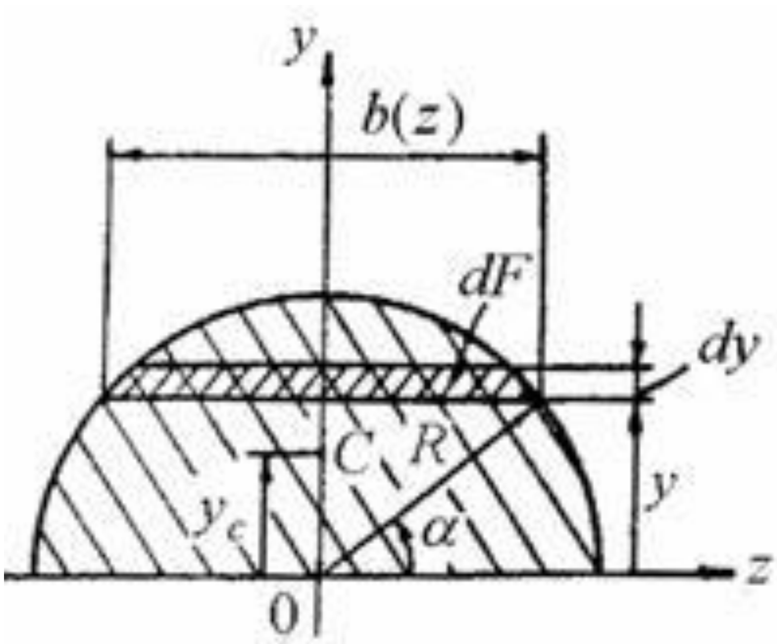
Статический момент инерции относительно любой оси, проходящей через центр тяжести сечения, равен нулю.

$$y_c = b$$

$$S_z = y_c F \qquad S_y = z_c F$$

Статические моменты сечения (продолжение)

Определить статический момент полукруга радиусом *R* относительно оси *z*, совпадающей с диаметром, и координату центра тяжести y_c.



$$S_z = \int_F y\,dF$$

$$y = R \cdot \sin\alpha, b(z) = 2R \cdot \cos\alpha,$$

$$dy = (R \cdot \sin\alpha)' \cdot d\alpha = R \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha \text{ и}$$

$$dF = b(z) \cdot dy = 2R^2\cos^2\alpha \cdot d\alpha$$

Статические моменты сечения (продолжение)

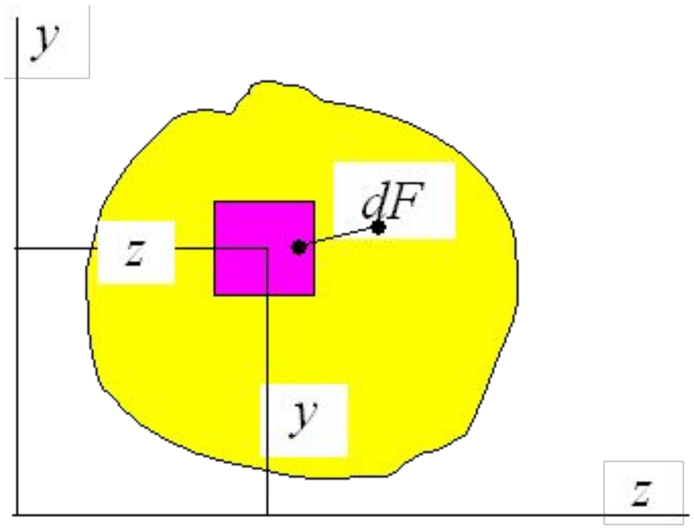
$$S_z = \int_F y dF = \int_0^{\pi/2} R \cdot sin\alpha \cdot 2R^2 \cdot cos^2\alpha \cdot d\alpha = 2R^3 \int_0^{\pi/2} cos^2\alpha \cdot sin\alpha \cdot d\alpha$$

$$= -2R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\alpha \cdot d(cos\alpha) = -\frac{2R^3 \cdot cos^3\alpha}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2R^3}{3}(0-1)$$

$$= \frac{2}{3}R^3.$$

$$y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{\frac{2}{3}R^3}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0{,}424R.$$

Осевые моменты инерции сечения

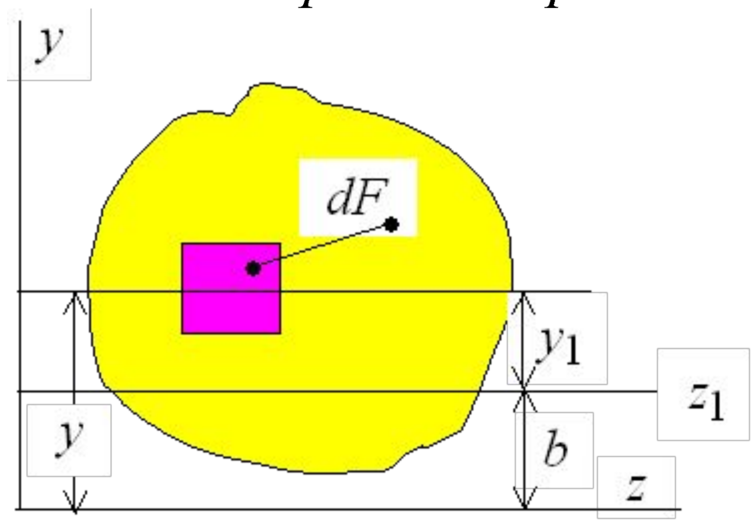


$$I_z = \int_F y^2 dF$$

$$I_y = \int_F z^2 dF$$

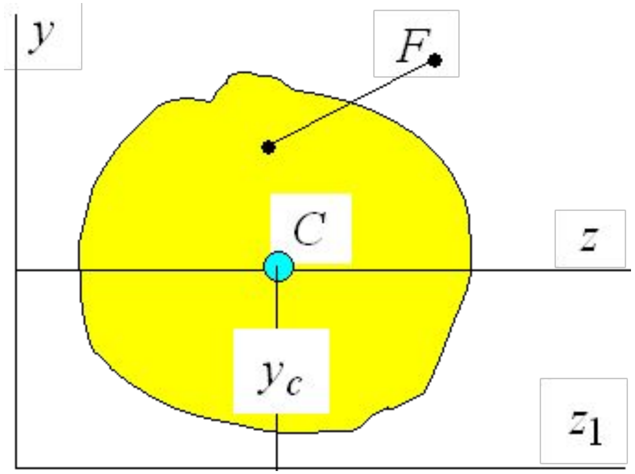
$$y_1 = y - b$$

$$I_{z_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y-b)^2 dF = \int_F y^2 dF - 2\int_F bydF + b^2 \int_F dF$$



$$I_{z_1} = I_z - 2bS_z + b^2 F$$

Осевые моменты инерции (продолжение)



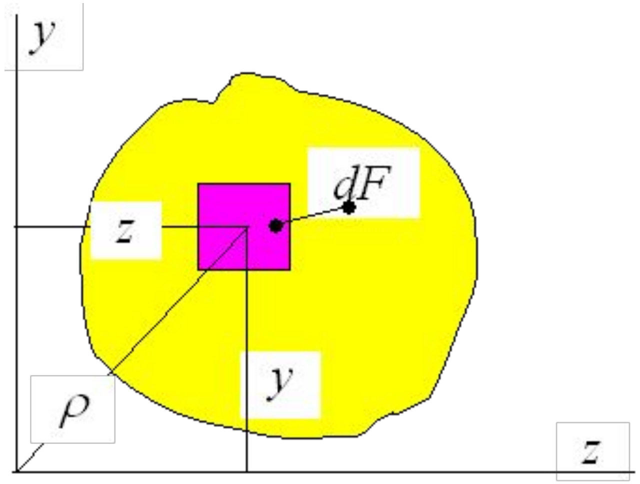
Допустим, что ось z – центральная.

$$S_z = 0, \quad b = y_c$$

$$I_{z_1} = I_z + y_c^2 F$$

Осевой момент инерции относительно центральной оси имеет минимальное значение среди всех моментов относительно осей, параллельной данной центральной.

Полярный момент инерции

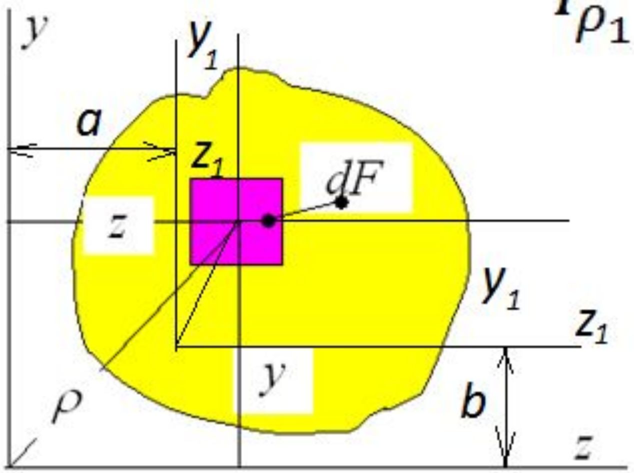


$$I_p = \int_F \rho^2 dF$$

$$\rho^2 = z^2 + y^2$$

$$I_p = \int_F \left(z^2 + y^2\right) dF = I_z + I_y$$

Полярные моменты инерции сечения



$$I_{\rho_1} = \int \rho_1^2 dF \qquad \rho_1^2 = y_1^2 + z_1^2$$

$$y_1 = y - b \qquad z_1 = z - a$$

$$I_{\rho_1} = \int (y_1^2 + z_1^2) dF$$

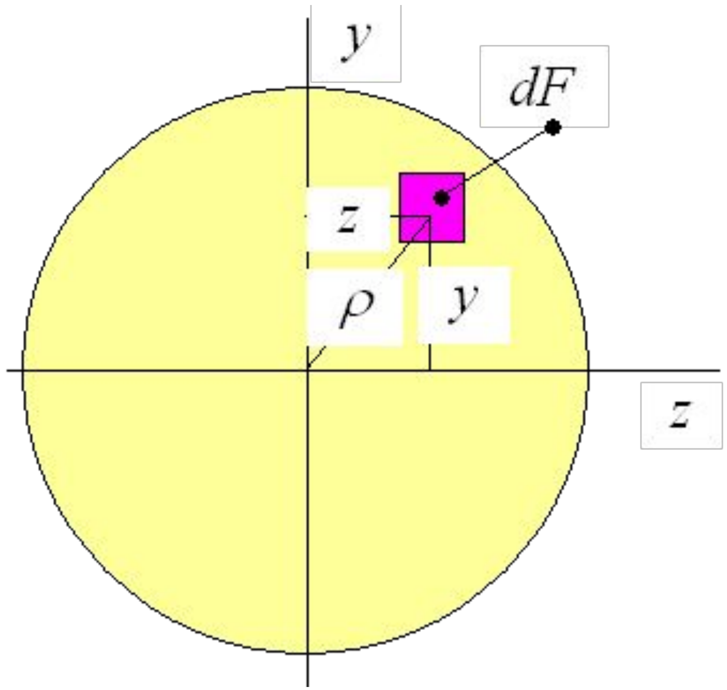
$$= \int [(y-b)^2 + (z-a)^2] dF$$

$$I_{\rho_1} = I_z - 2bS_z + b^2F + I_y - 2aS_y + a^2F$$

- Если оси *y* и *z* – центральные, тогда

$$I_{\rho_1} = I_z + b^2F + I_y + a^2F = I_\rho + b^2F + a^2F$$

Полярный и осевые моменты инерции для круглого сечения



$$I_p = \int_F \left(z^2 + y^2\right) dF = I_z + I_y$$

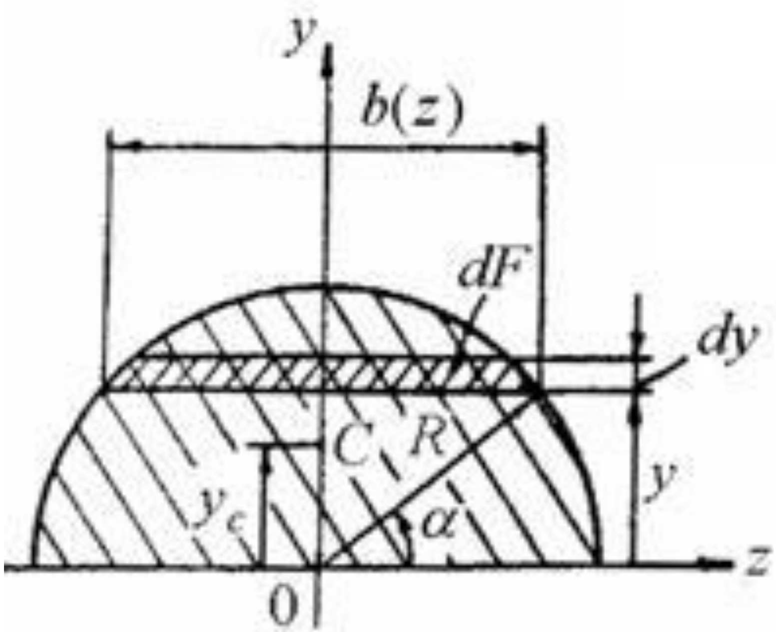
$$I_y = I_z$$

$$I_p = 2 I_z$$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} \qquad I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

Моменты инерции полукруга относительно основания и центральной оси Zc, параллельной основанию

За основу берем момент инерции круглого сечения. Момент инерции полукруга относительно диаметра-основания равен

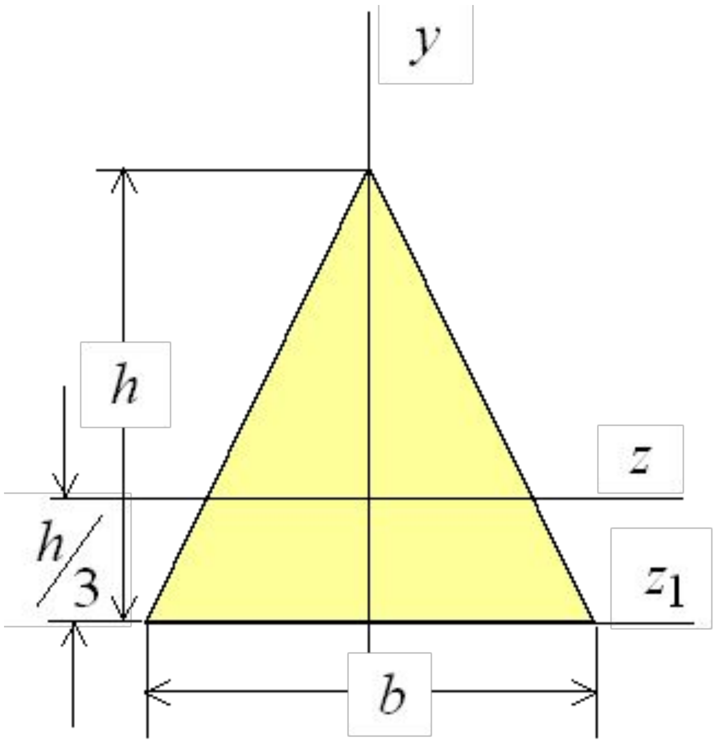


$$I_z = \frac{\pi d^4}{128}$$

$$I_{z_c} = I_z - F y_c^2$$

$$I_{z_c} = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{\pi R^2}{2}(0{,}424R)^2 = 0{,}11R^4$$

Осевые моменты инерции для треугольного сечения

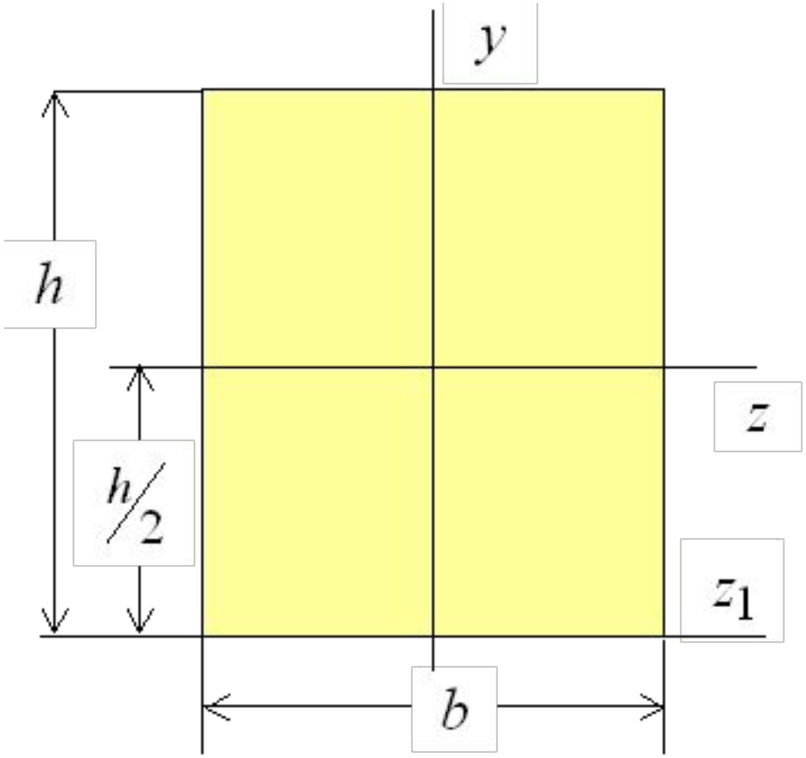


$$I_z = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{z_1} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = 2\frac{h\left(\frac{b}{2}\right)^3}{12} = \frac{hb^3}{48}$$

Осевые моменты инерции для прямоугольного сечения

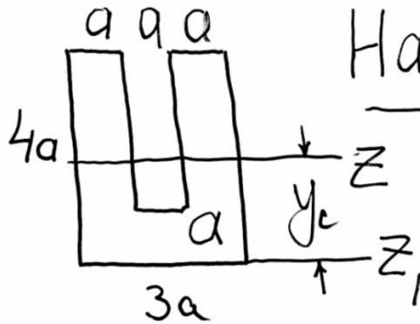


$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{z_1} = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

Определение момента инерции и момента сопротивления относительно оси Z составного сечения



Найти J_z, W_z

$$S_{z_1} = S^{\square}_{z_1} - S^{\square}_{z_1} = y_{c_1} F_1 - y_{c_2} F_2 = 2a\cdot 12a^2 - 2{,}5a\cdot 3a^2 = 16{,}5a^3$$

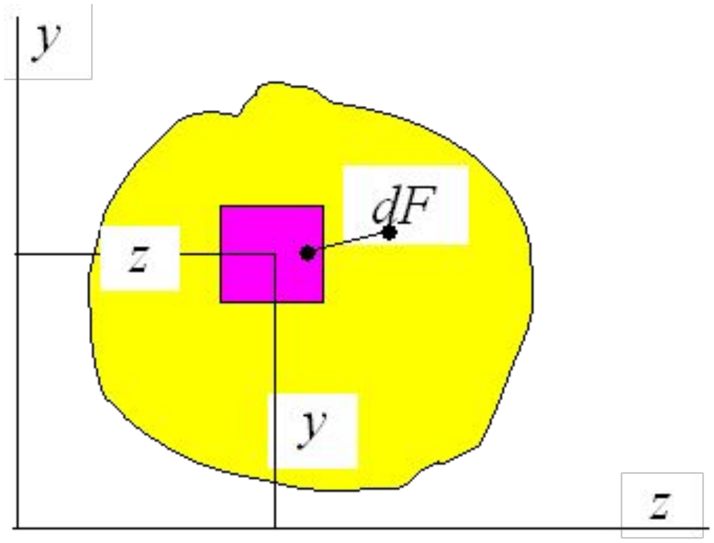
$$y_c = \frac{S_{z_1}}{9a^2} = \boxed{\frac{5{,}5}{3}a}$$

$$J^{Ш}_{z_1} = J^{\square}_{z_1} - J^{\square}_{z_1} = \frac{3a(4a)^3}{3} - \left(\frac{a(3a)^3}{12} + 3a^2\cdot(2{,}5a)^2\right) = \boxed{43a^4}$$

$$J^{Ш}_{z} = J_{z_1} - 9a^2\cdot\left(\frac{5{,}5a}{3}\right)^2 = \boxed{12{,}75a^4}$$

$$W_z = \frac{J_z}{y_{max}} = \frac{12{,}75a^4}{\frac{6{,}5a}{3}} \cong 5{,}9a^3$$

Центробежный момент инерции



$$I_{zy} = \int\limits_F zy dF$$

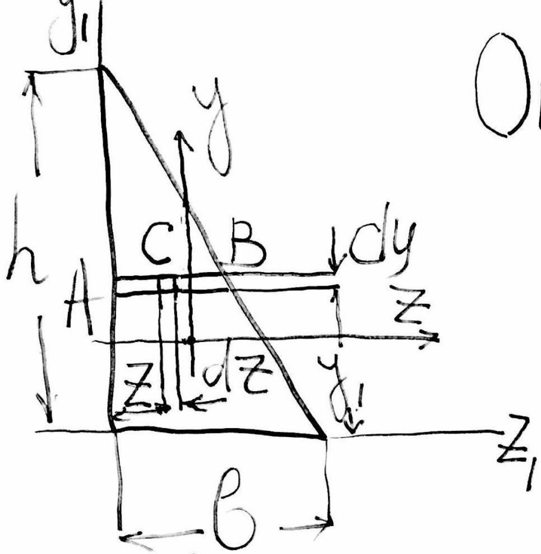
Координатные оси, относительно которых $I_{zy} = 0$**, называются** главными осями инерции**.**

Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то они называются главными центральными **осями. Начало координат в этом случае находится в центре тяжести сечения.**

Осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции**. Главные моменты инерции** экстремальны **относительно всех осей, проходящих через центр тяжести.**

Оси симметрии – всегда главные оси.

Определение положения главных центральных осей для прямоугольного треугольника



Опр. J_{zy}, гл. ц. оси

$$J_{zy} = J_{z_1 y_1} - \frac{h}{3}\cdot\frac{b}{3}\cdot\frac{bh}{2};$$

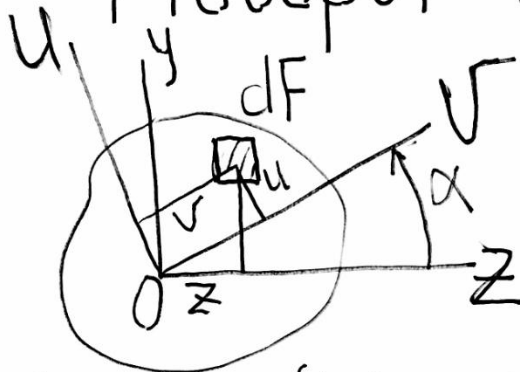
$$J_{z_1 y_1} = \int_0^h y_1\, dy_1 \int_0^{C(AB)} z_1\, dz = \frac{b^2}{2h^2}\int_0^h y_1 (h-y_1)^2\, dy_1 = \frac{b^2h^2}{24}$$

$$C = \frac{b}{h}(h-y_1)$$

$$\boxed{tg\,2\alpha = \frac{bh}{h^2-b^2}}$$

$$\boxed{J_{zy} = \frac{b^2h^2}{24} - \frac{b^2h^2}{18} = -\frac{b^2h^2}{72}}$$

Поворот осей координат



$$\begin{cases} v = z\cos\alpha + y\sin\alpha \\ u = y\cos\alpha - z\sin\alpha \end{cases}$$

$$J_v = \int_F u^2 dF = \int_F (y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2 dF$$

$$J_u = \int_F v^2 dF = \int_F (z\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 dF$$

$$J_{vu} = \int_F uv\, dF = \int_F (z\cos\alpha + y\sin\alpha)(y\cos\alpha - z\sin\alpha)\, dF$$

$$J_v = J_z\cos^2\alpha + J_y\sin^2\alpha - J_{zy}\sin 2\alpha$$

$$J_u = J_z\sin^2\alpha + J_y\cos^2\alpha + J_{zy}\sin 2\alpha$$

$$J_{vu} = J_{zy}\cos 2\alpha + \frac{J_z - J_y}{2}\sin 2\alpha$$

$$J_v + J_u = J_z + J_y = const; \quad J_{vu} = 0 \quad tg 2\alpha = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z}$$