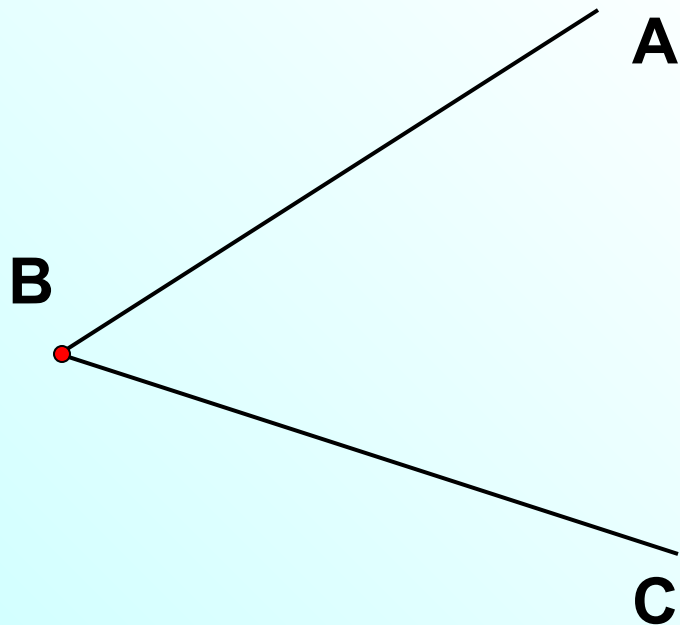


*"Геометрия 10-11"*

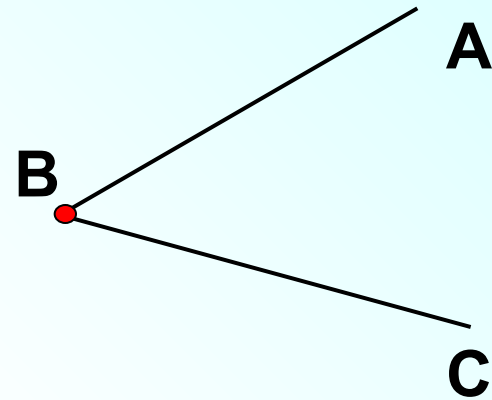
*Двугранный угол*

## Планиметрия

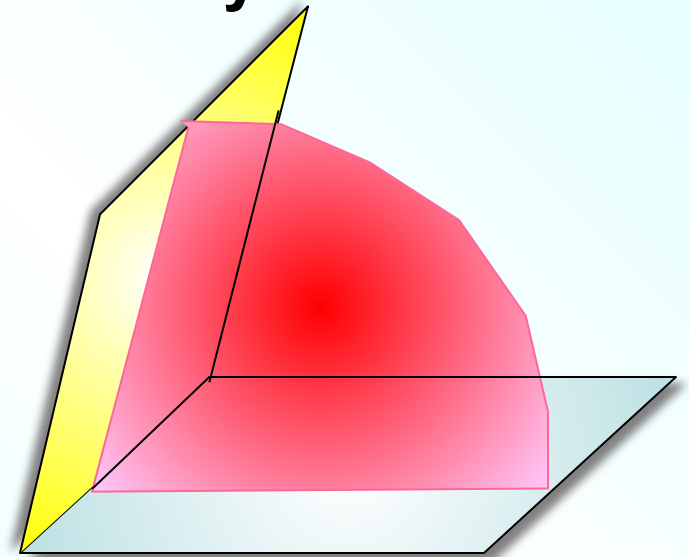
Углом на плоскости мы называем фигуру, образованную двумя лучами, исходящими из одной точки.



## Стереометрия

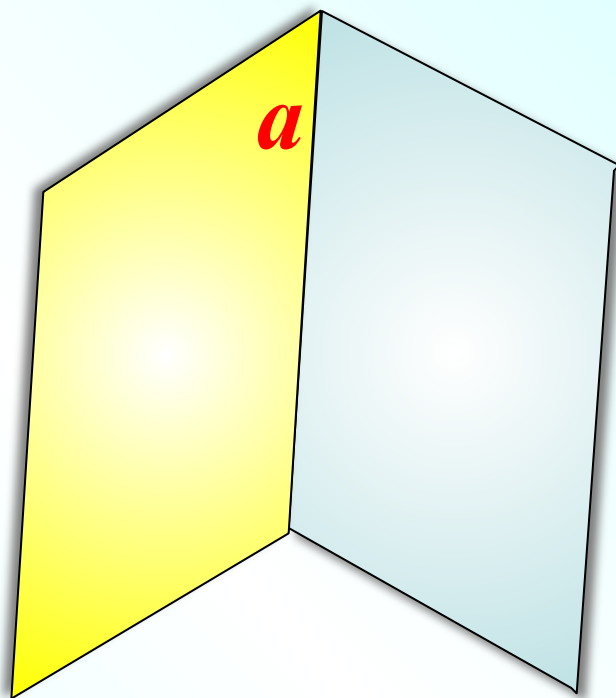


Двугранный угол



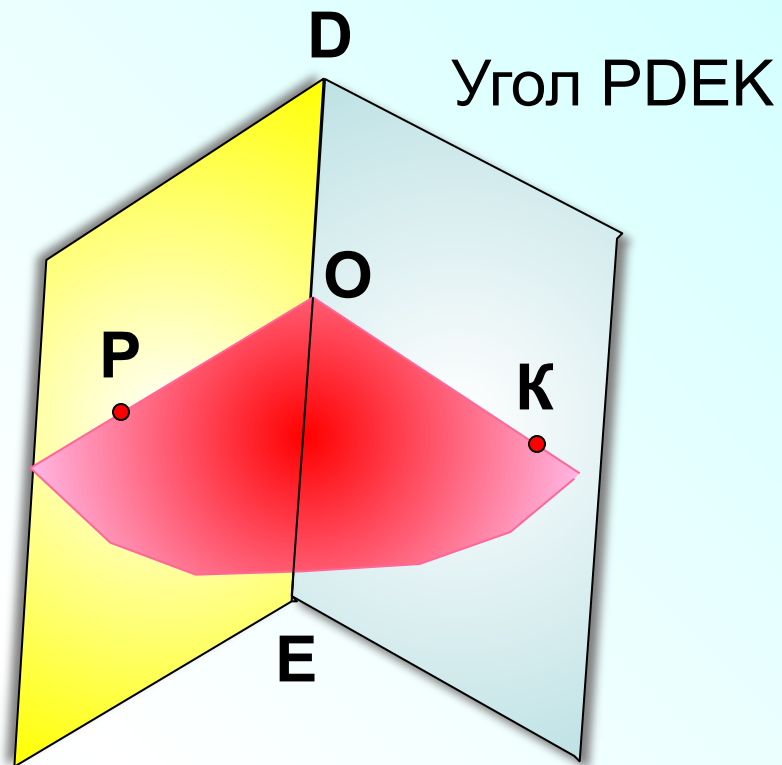
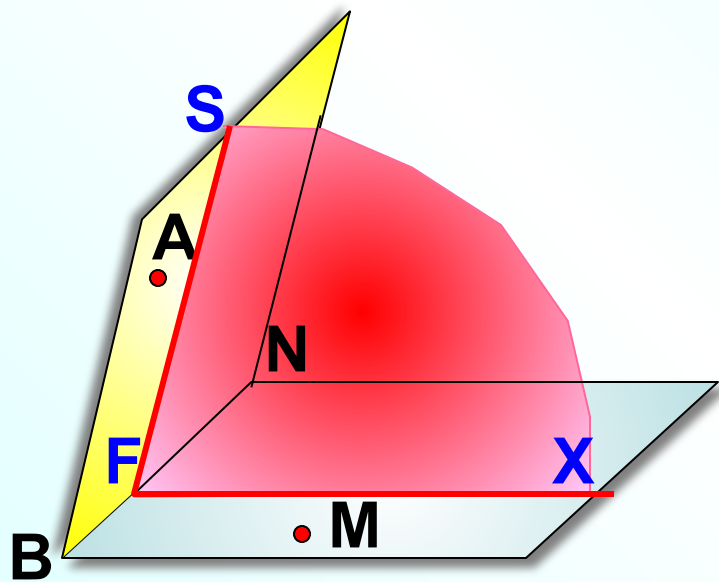
Двугранным углом называется фигура, образованная прямой  $a$  и двумя полуплоскостями с общей границей  $a$ , не принадлежащими одной плоскости.

Прямая  $a$  — ребро двугранного угла



Две полуплоскости — грани двугранного угла

Двугранный угол  $ABNM$ , где  $BN$  – ребро, точки  $A$  и  $M$  лежат в гранях двугранного угла

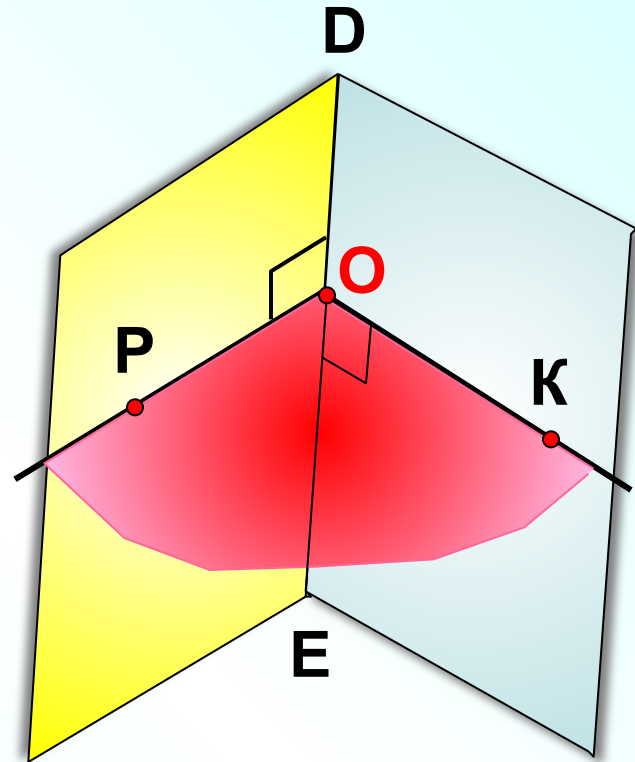


Угол  $SFX$  – линейный угол двугранного угла

## Алгоритм построения линейного угла.

Угол  $POK$  – линейный угол двугранного угла  $PDEK$ .

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.



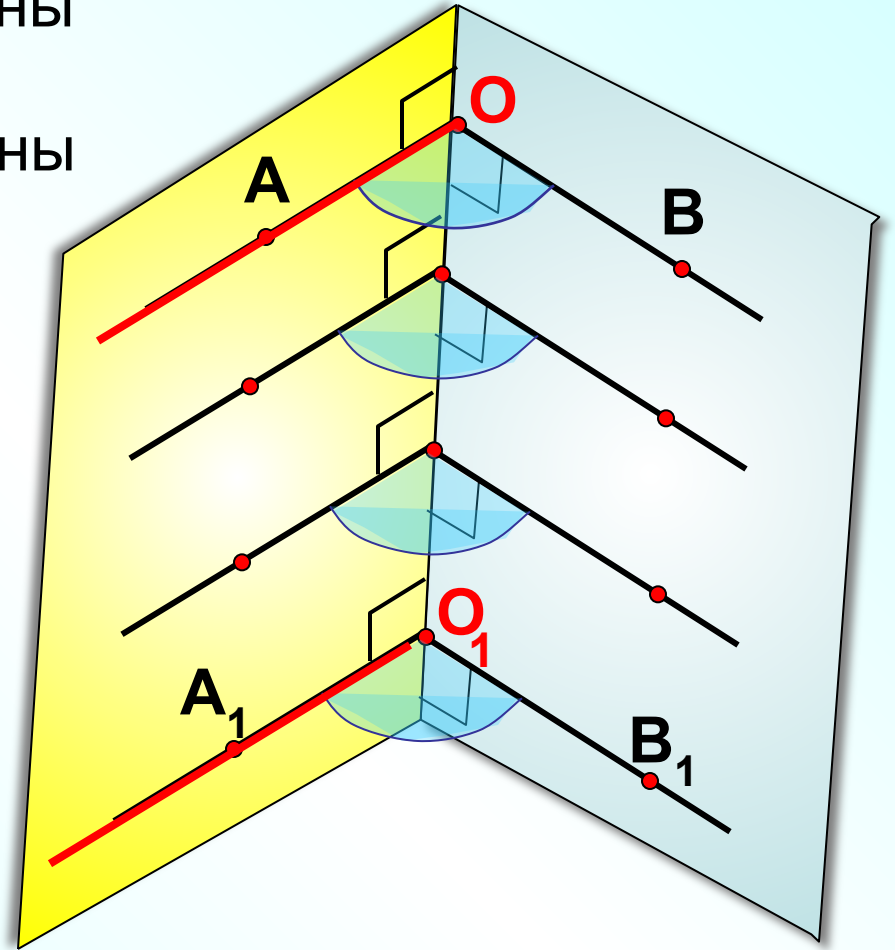
*Плоскость линейного угла  $(POK) \perp DE$*

Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

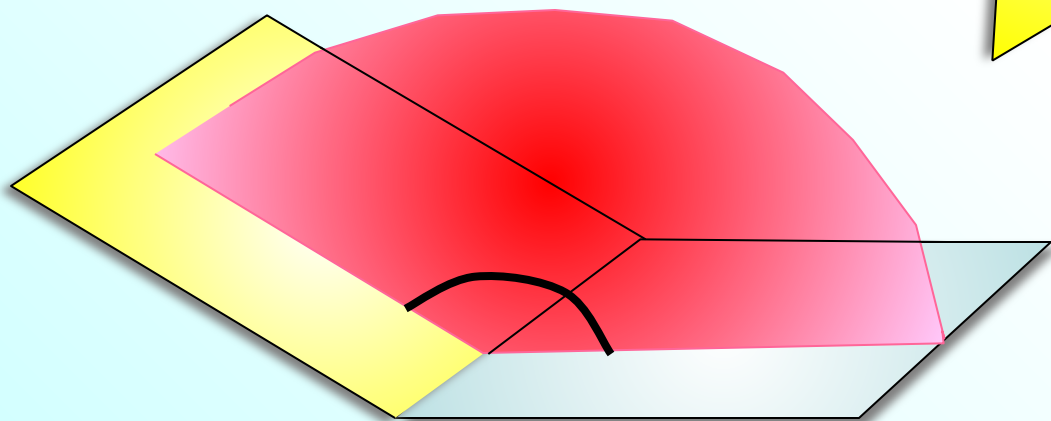
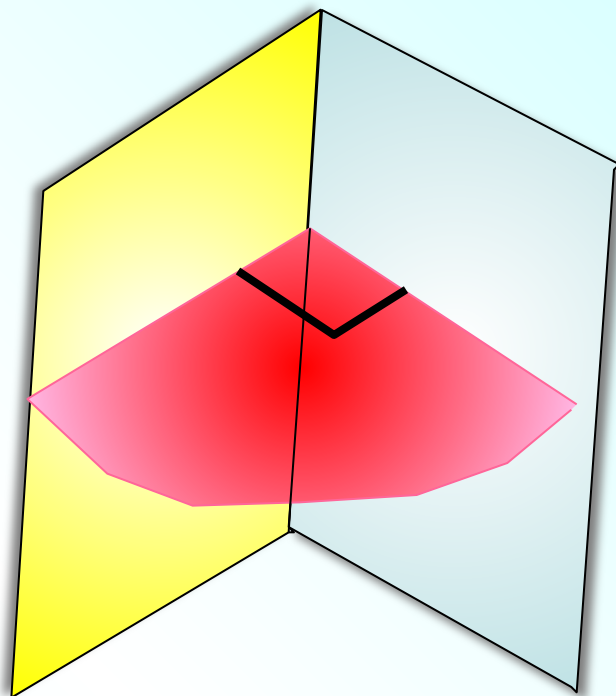
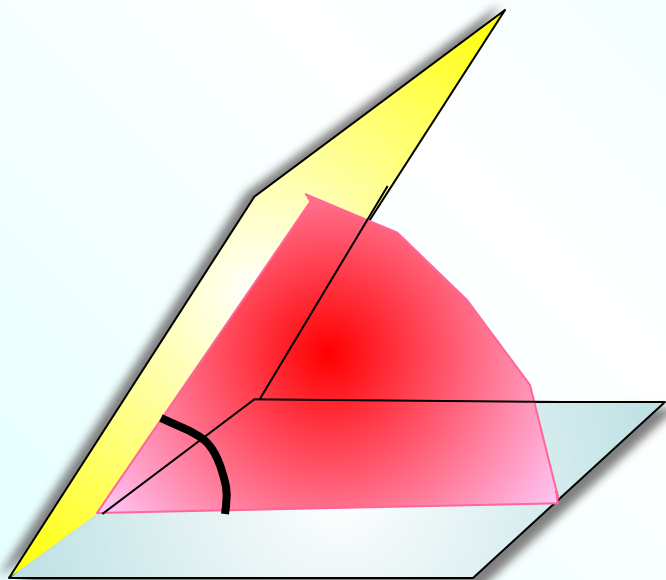
Лучи  $OA$  и  $O_1A_1$  – сонаправлены

Лучи  $OB$  и  $O_1B_1$  – сонаправлены

Углы  $AOB$  и  $A_1O_1B_1$  равны,  
как углы с сонаправленными  
сторонами



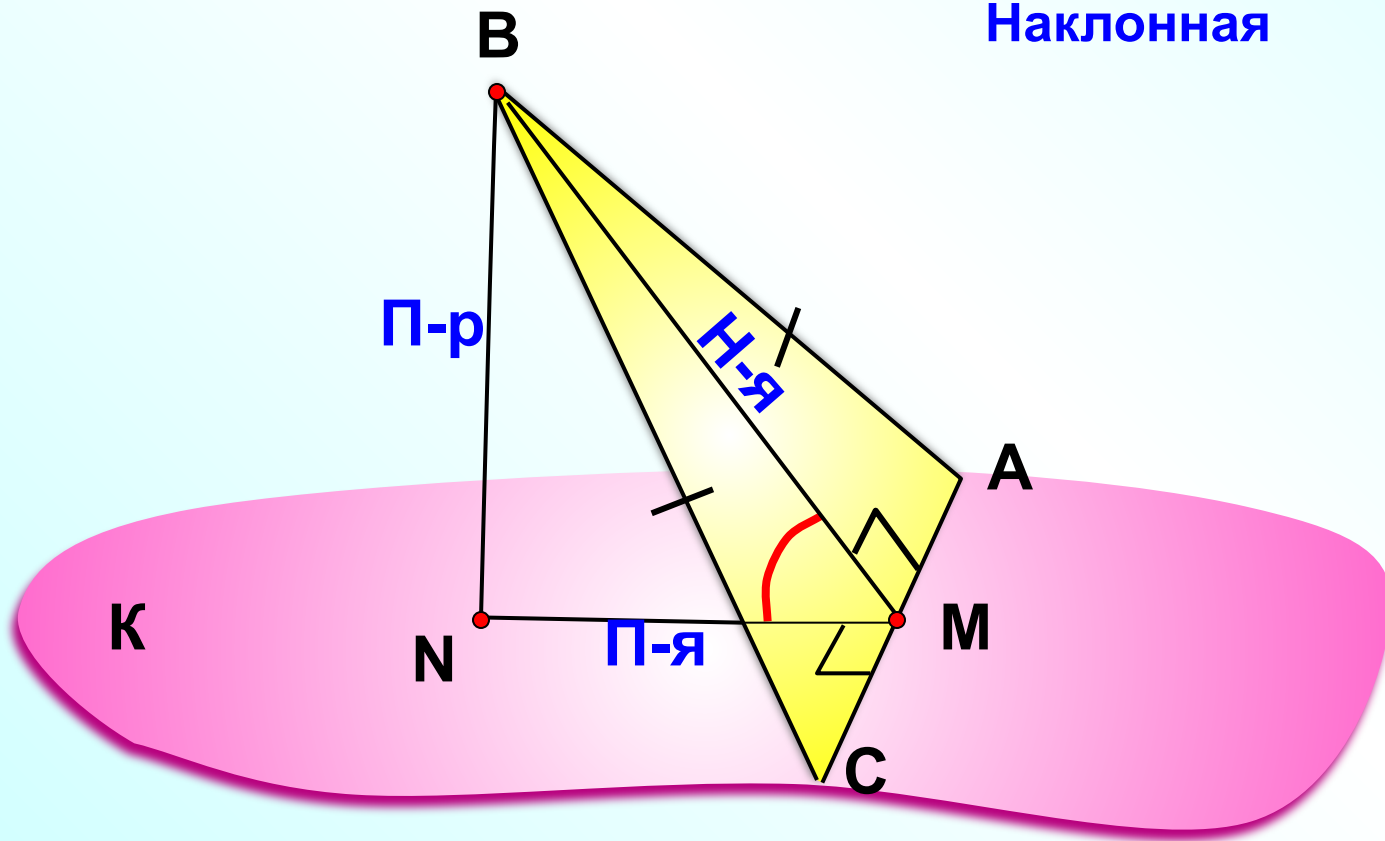
Двугранный угол может быть прямым, острым, тупым



Построить линейный угол двугранного угла ВАСК.  
Треугольник АВС – равнобедренный.

$$AC \perp BM \xRightarrow{\text{ТТП}} AC \perp NM$$

Наклонная                      Проекция

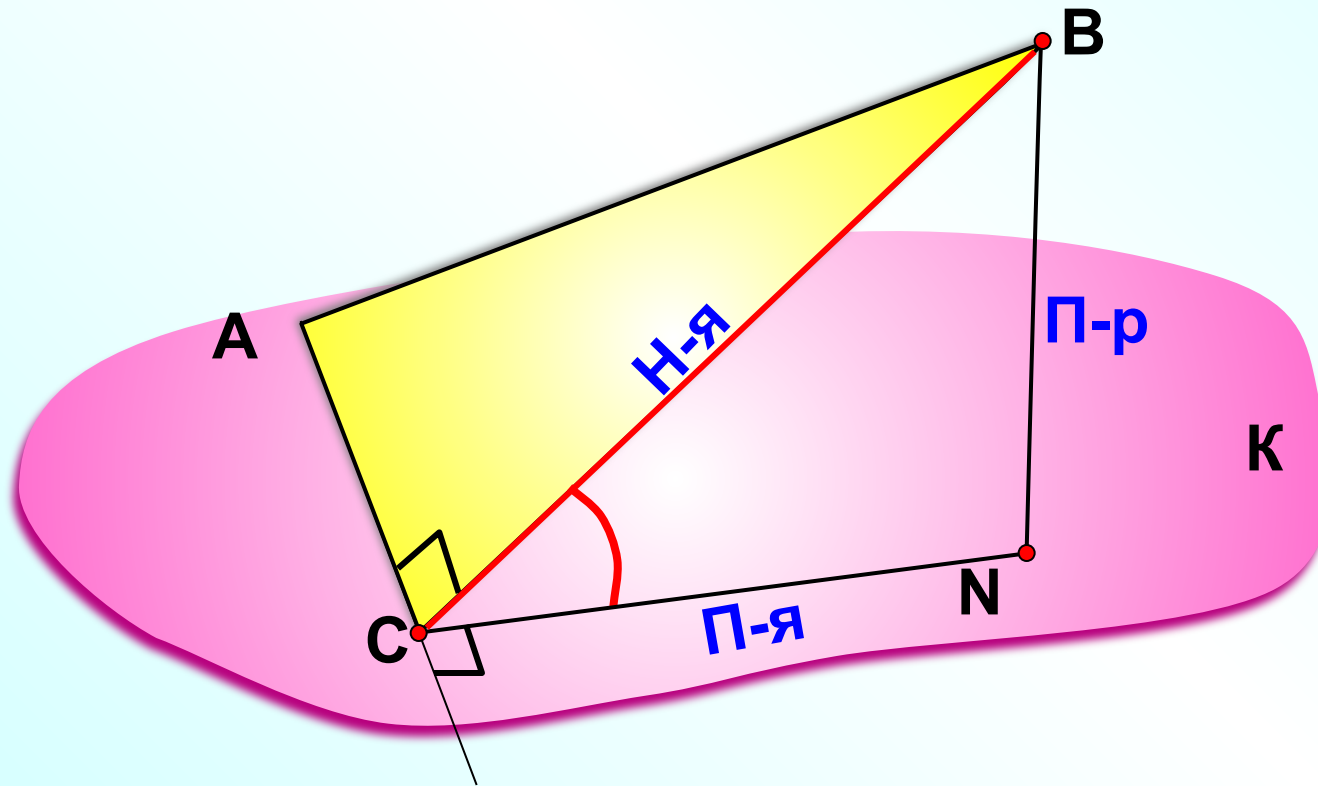


Угол BMN – линейный угол двугранного угла ВАСК



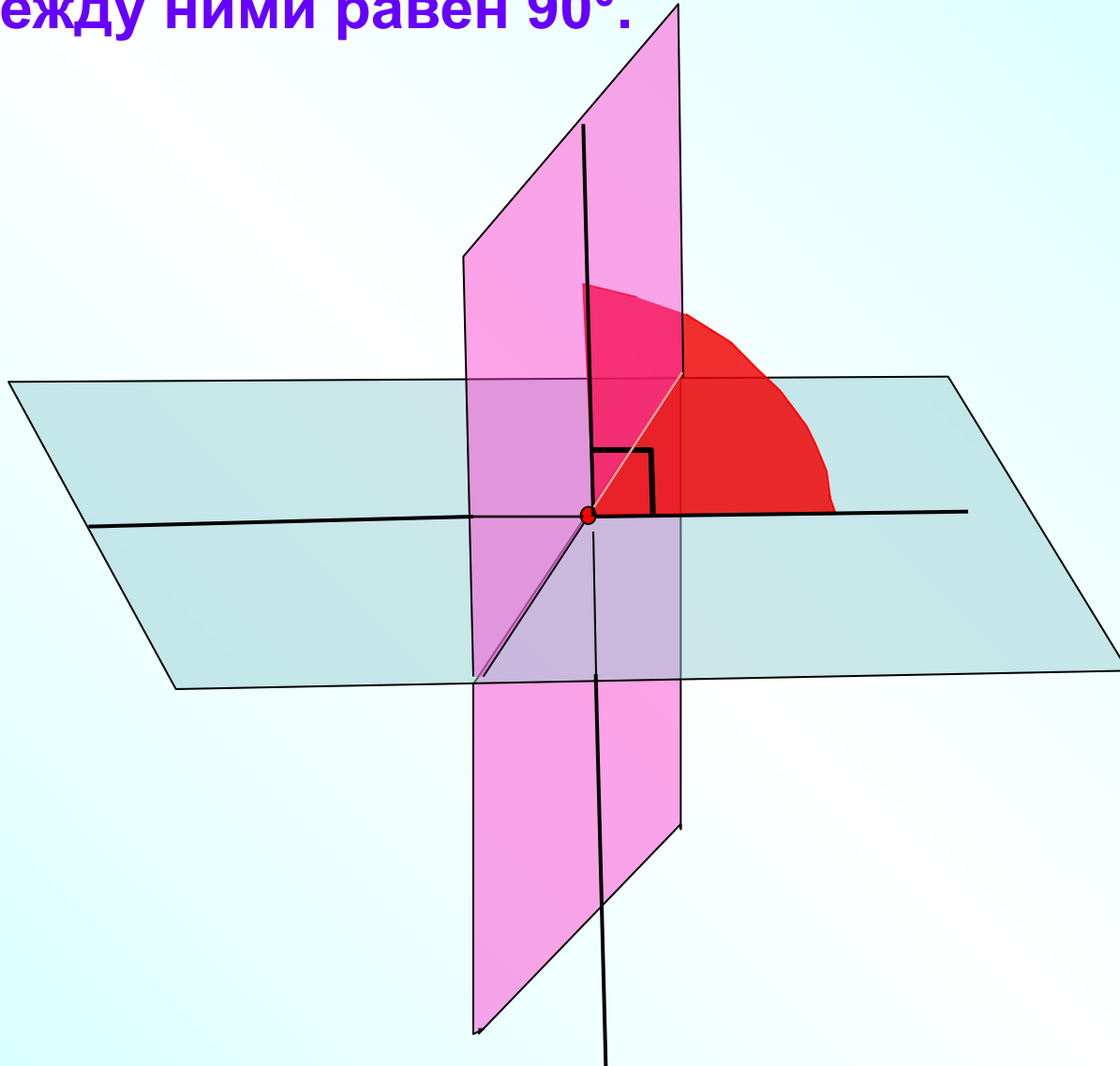
Построить линейный угол двугранного угла ВАСК.  
Треугольник АВС – прямоугольный.

$$\underset{\text{Н-я}}{AC \perp BC} \xRightarrow{\text{ТПП}} \underset{\text{П-я}}{AC \perp NC}$$



Угол BCN – линейный угол двугранного угла ВАСК

Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен  $90^{\circ}$ .

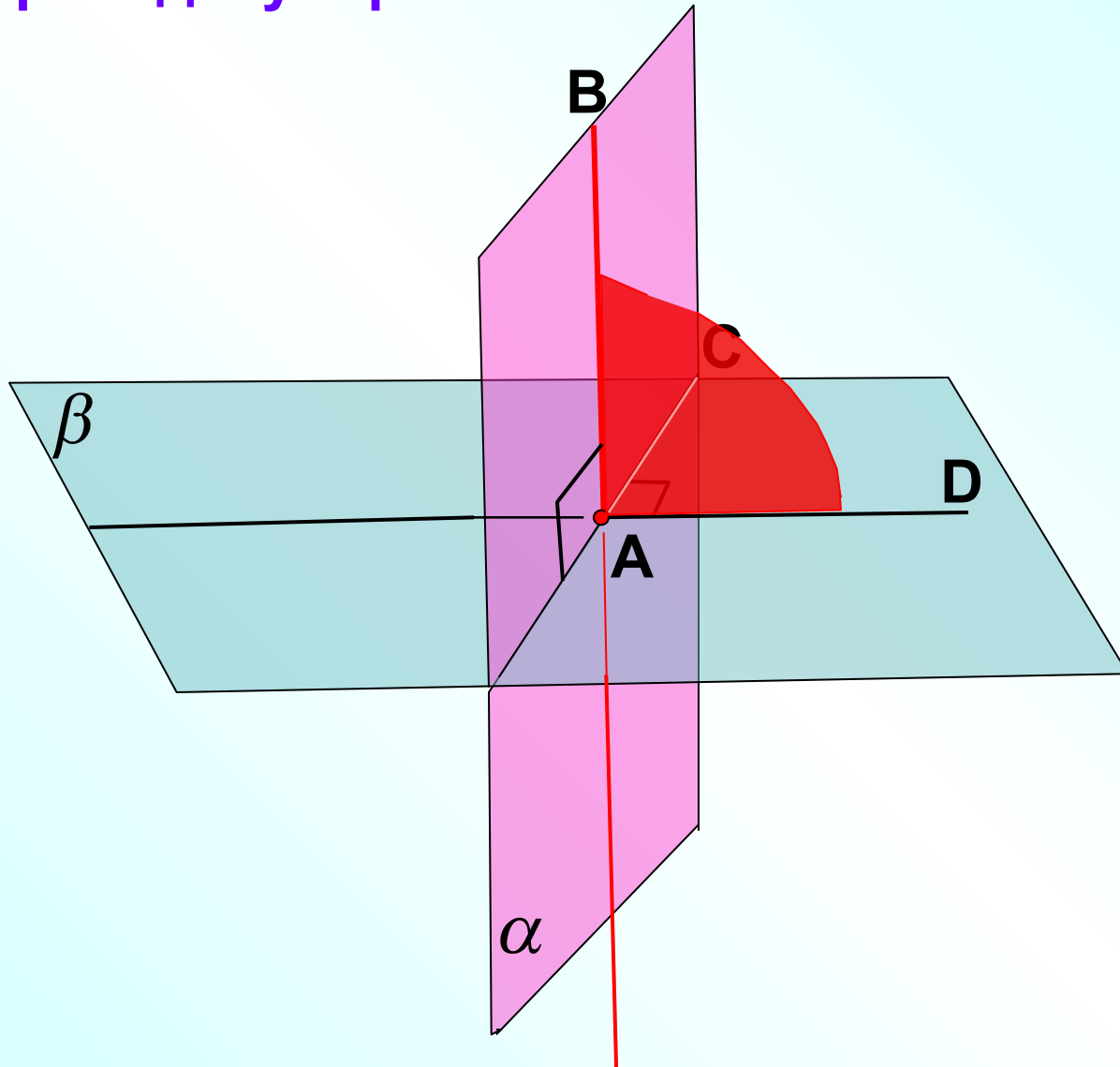




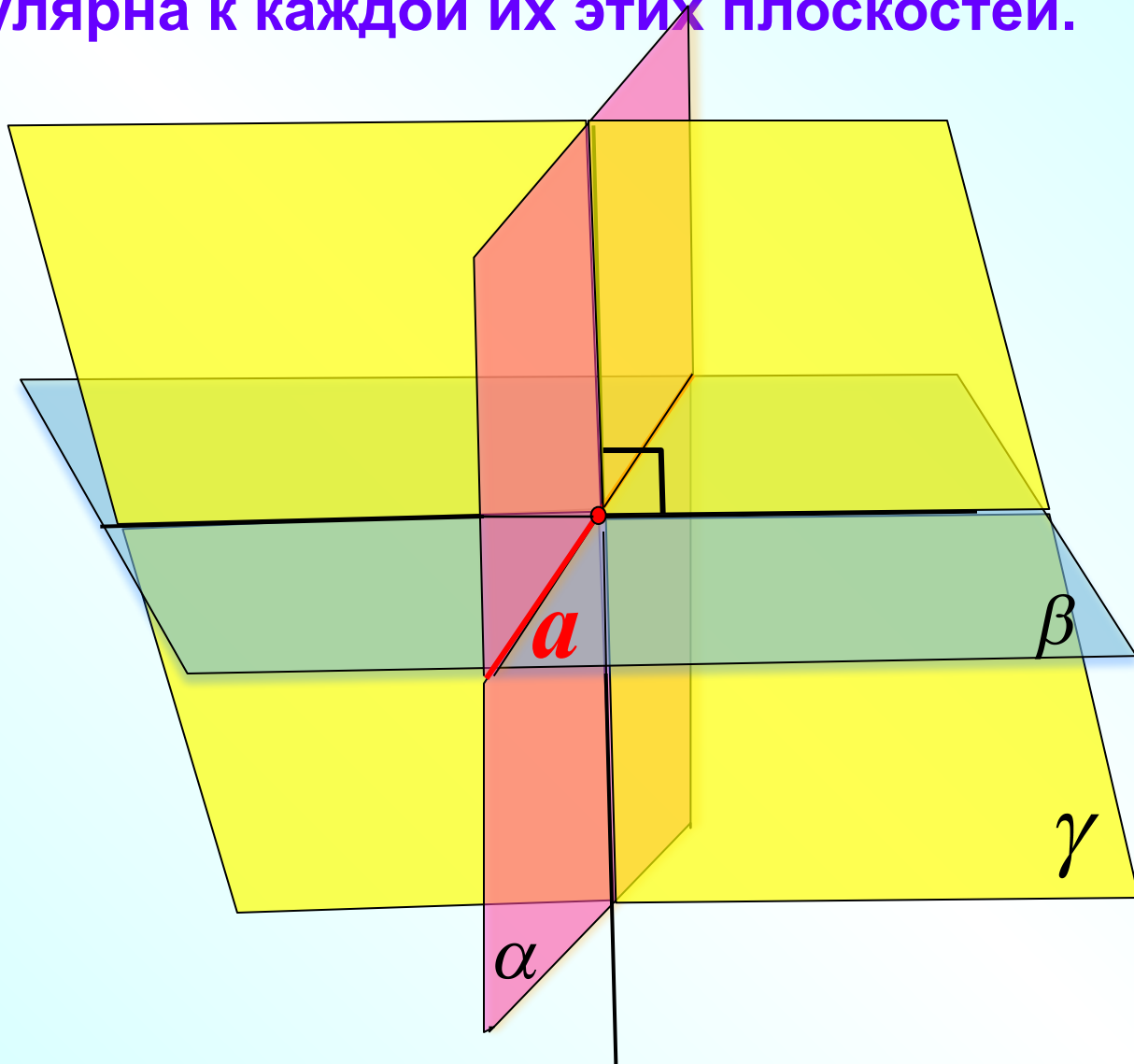
**Примером взаимно перпендикулярных плоскостей служат плоскости стены и пола комнаты, плоскости стены и потолка.**

## Признак перпендикулярности двух плоскостей.

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

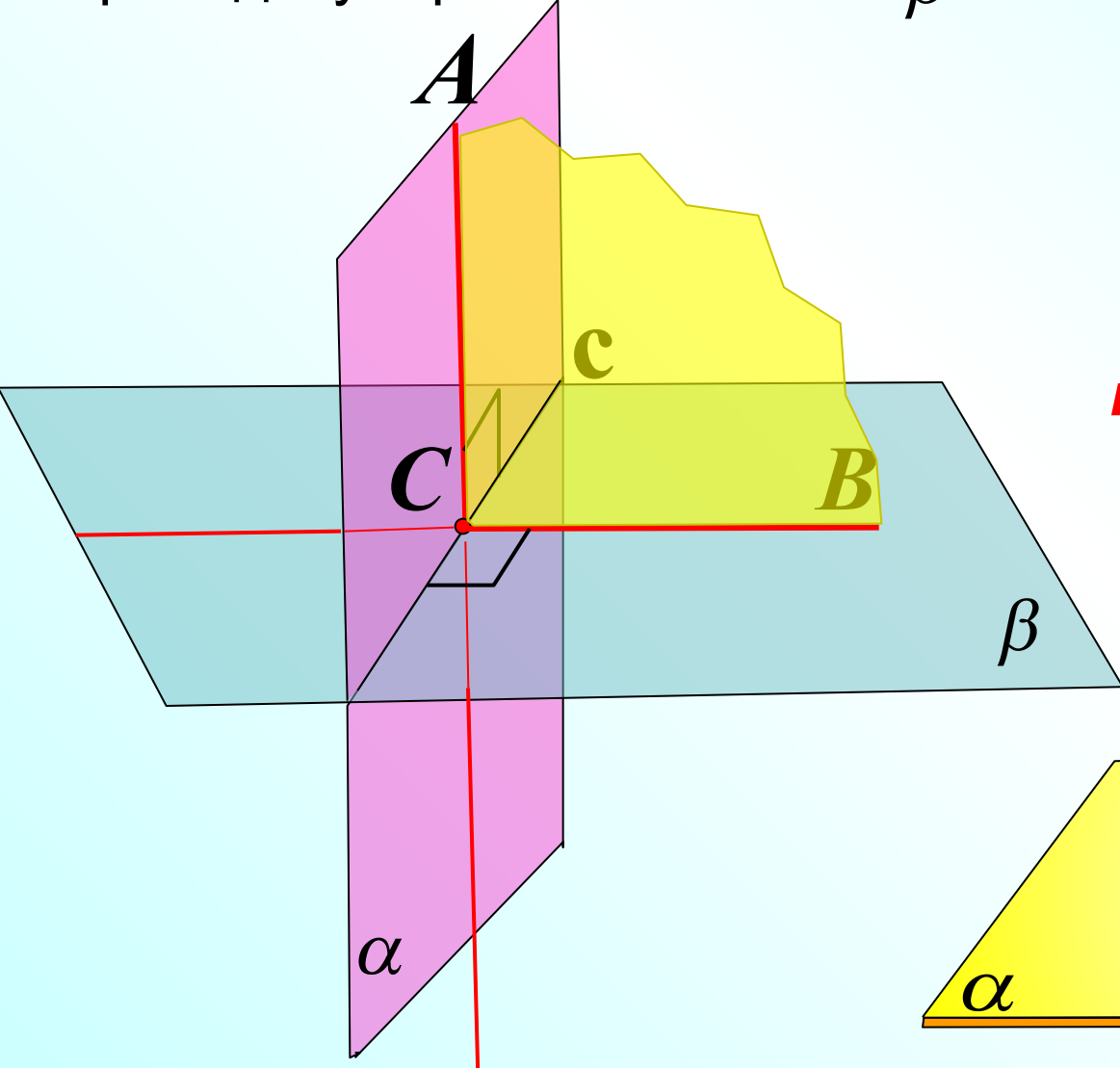


**Следствие.** Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

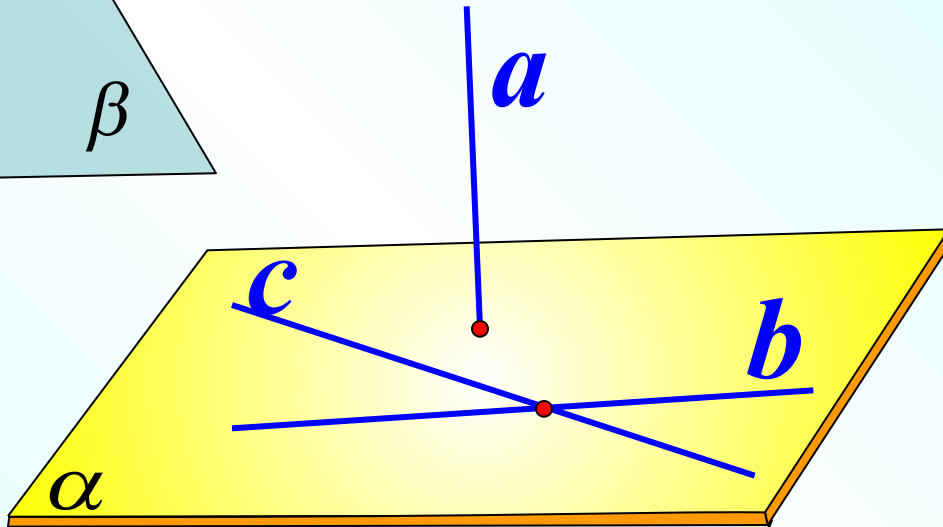


**№ 178.** Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  взаимно перпендикулярны пересекаются по прямой  $c$ . Докажите, что любая прямая плоскости  $\alpha$ , перпендикулярная к прямой  $c$ , перпендикулярна к плоскости  $\beta$ .

Подсказка

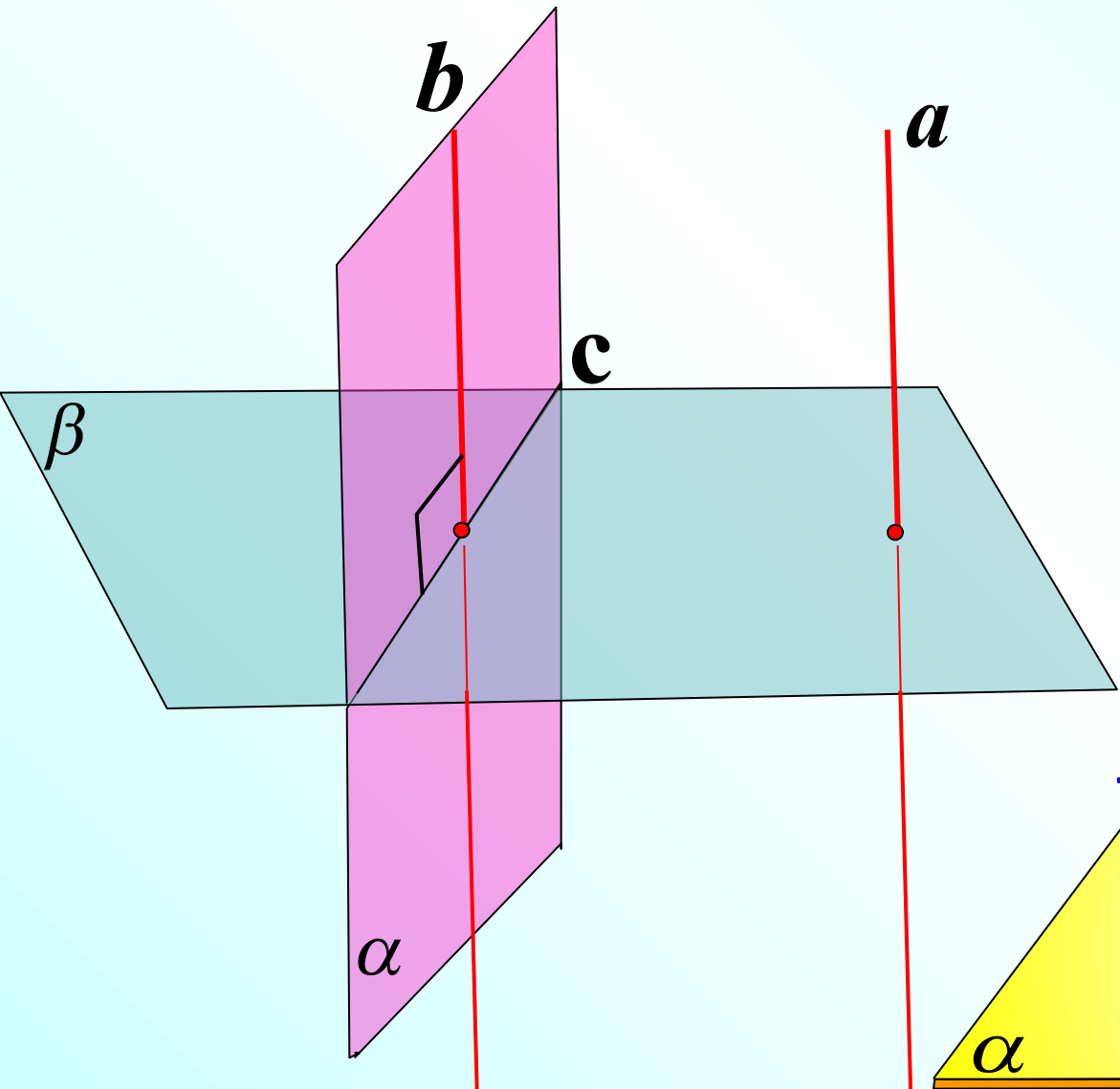


*Признак перпендикулярности прямой и плоскости*

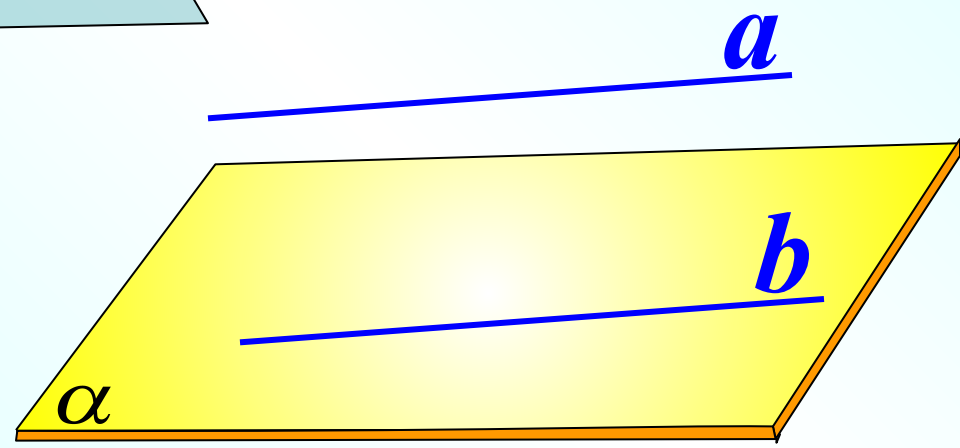


**№ 180.** Докажите, что плоскость и не лежащая в ней прямая, перпендикулярные к одной и той же плоскости, параллельны.

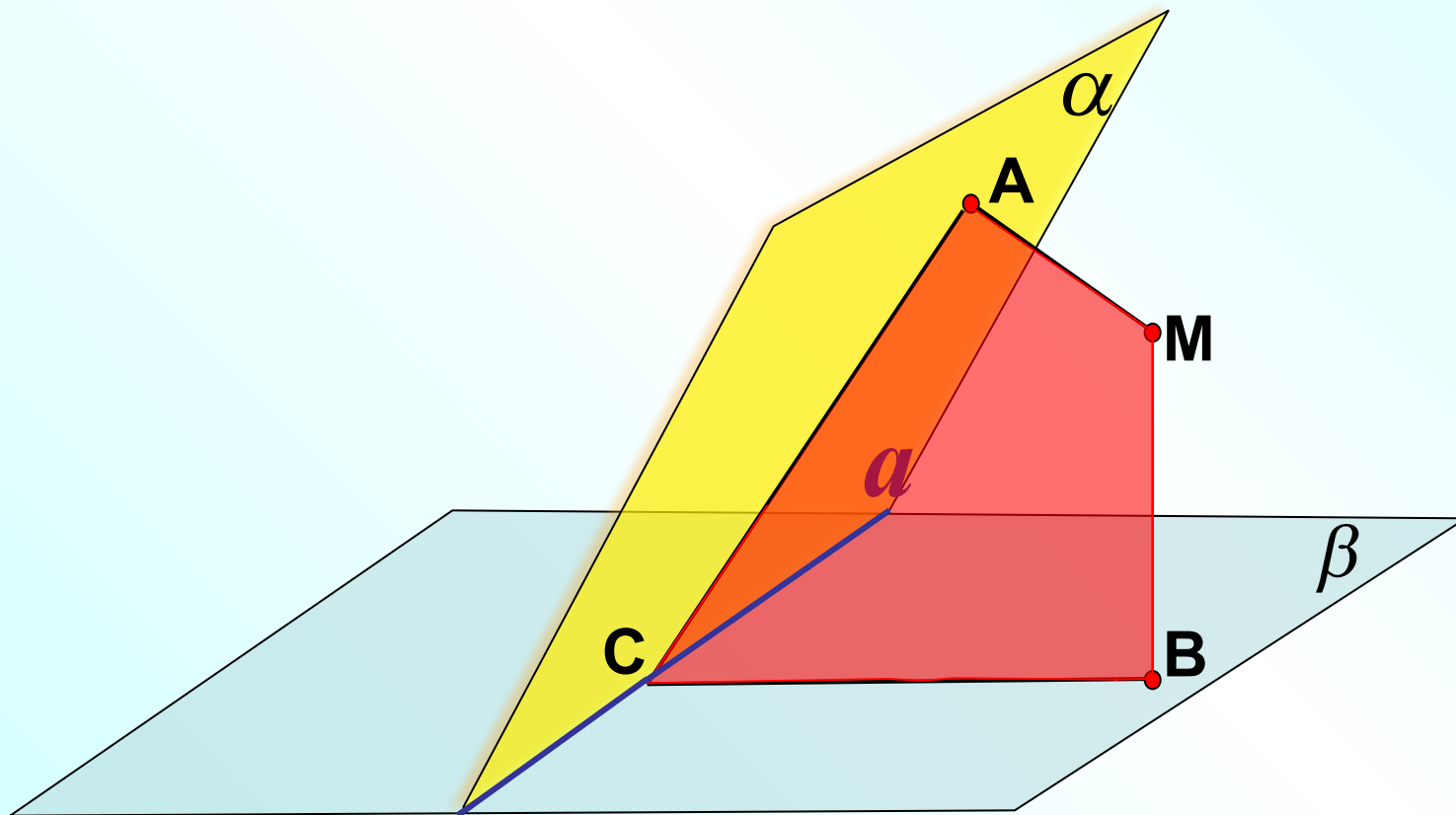
Подсказка



*Признак параллельности прямой и плоскости*

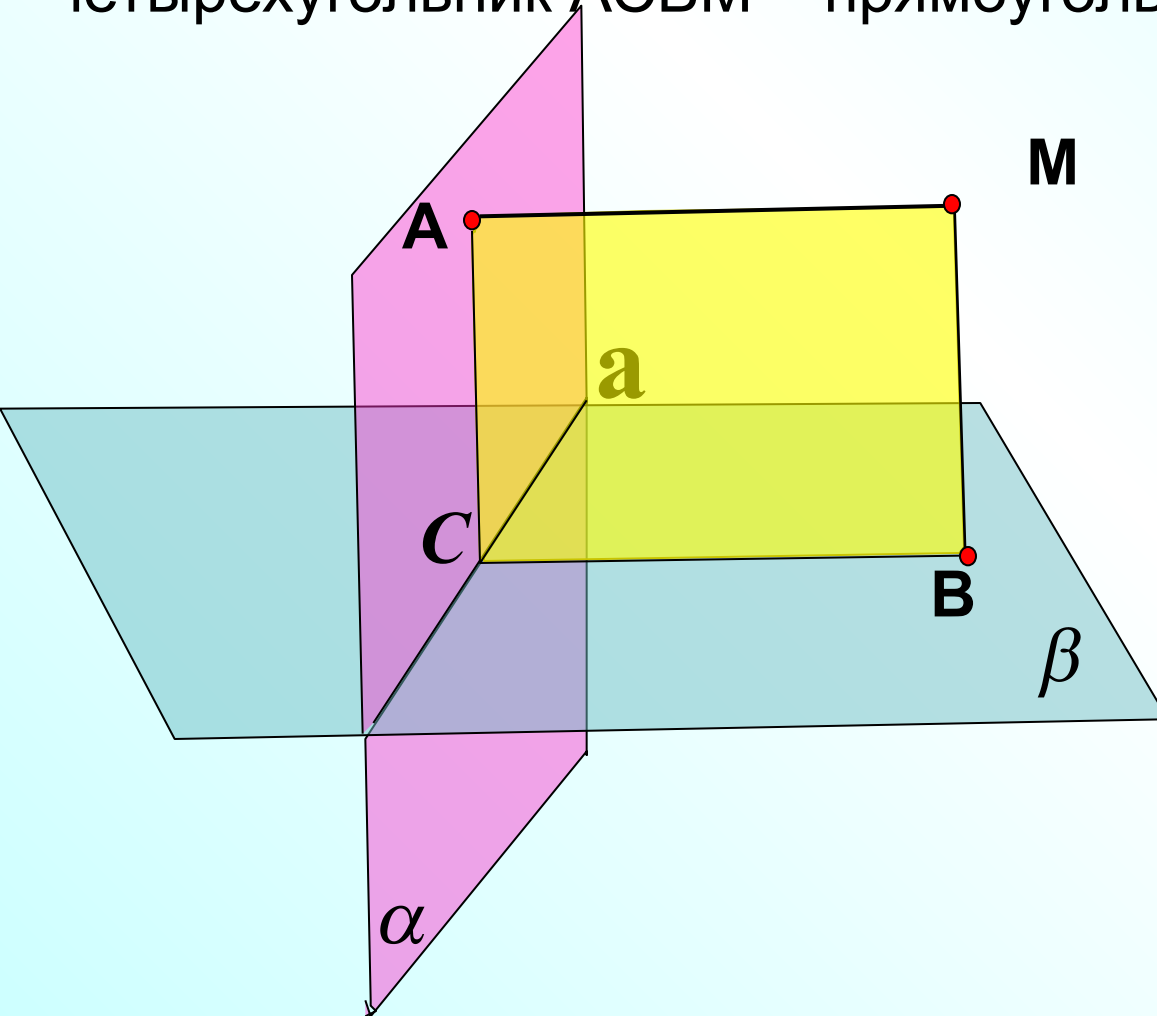


**№ 181.** Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$ . Из точки  $M$  проведены перпендикуляры  $MA$  и  $MB$  соответственно к плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$ . Прямая  $a$  пересекает плоскость  $AMB$  в точке  $C$ . Докажите, что  $MC \perp a$ .

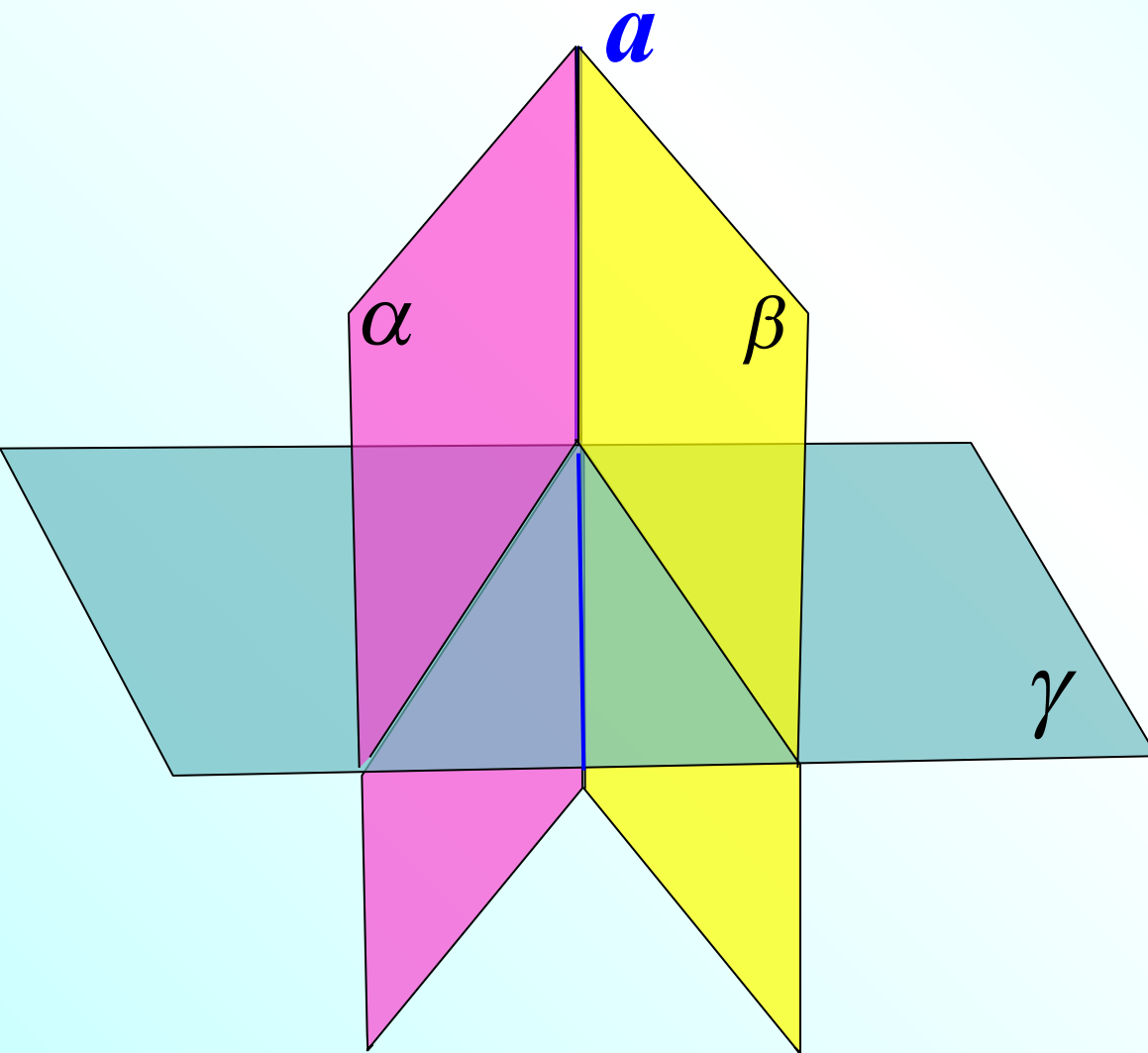




**№ 182.** Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  взаимно перпендикулярны пересекаются по прямой  $a$ . Из точки  $M$  проведены перпендикуляры  $MA$  и  $MB$  к этим плоскостям. Прямая  $a$  пересекает плоскость  $AMB$  в точке  $C$ . Докажите, что четырехугольник  $ACBM$  – прямоугольник.

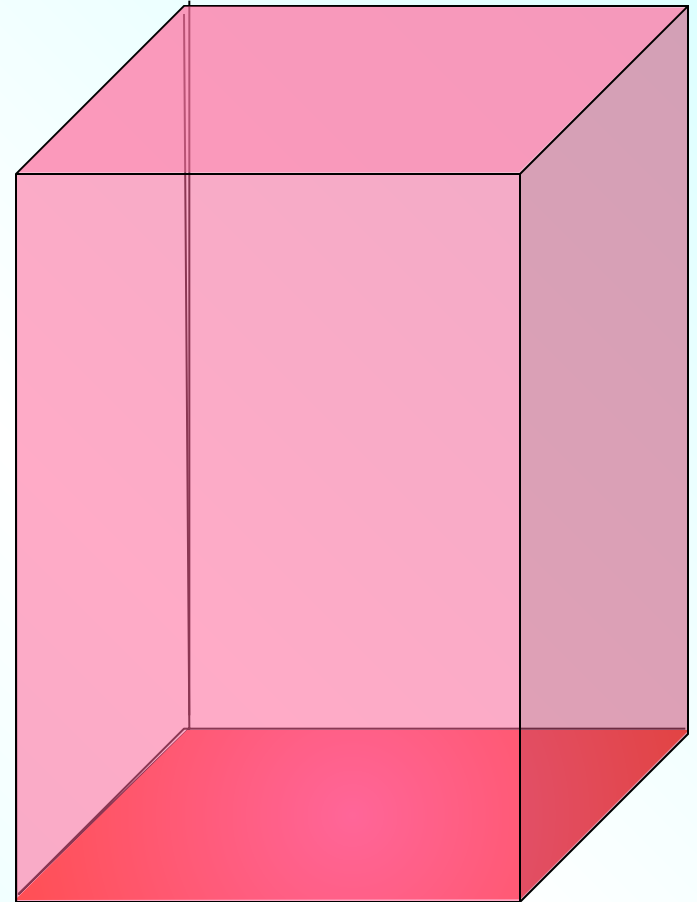
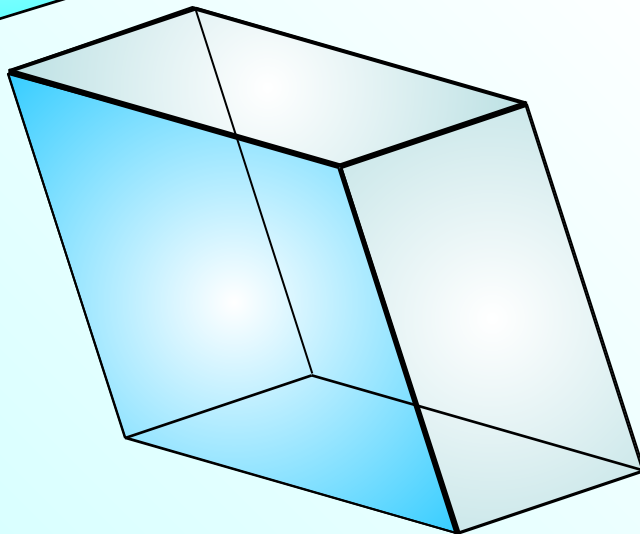
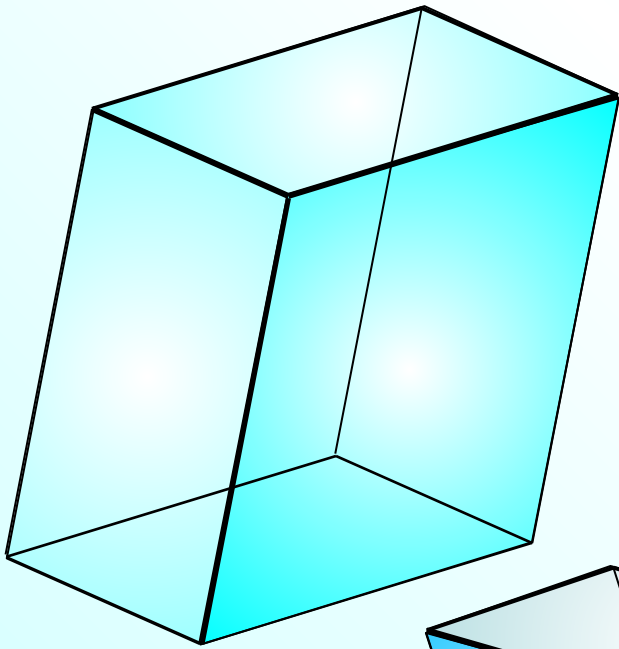


**№ 183.** Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$  и перпендикулярны к плоскости  $\gamma$ . Докажите, что прямая  $a$  перпендикулярна к плоскости  $\gamma$ .

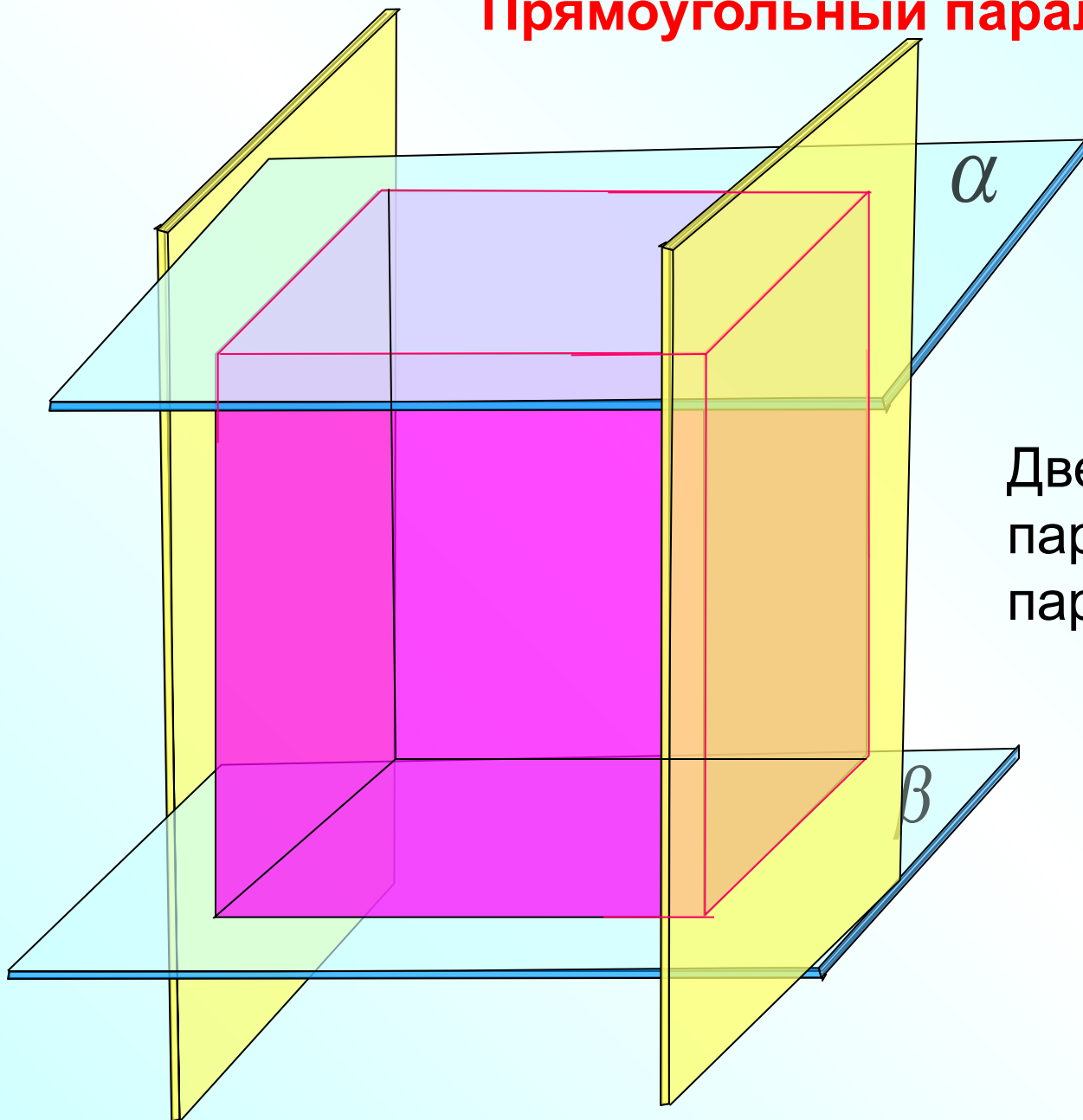


## Прямоугольный параллелепипед

Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники.



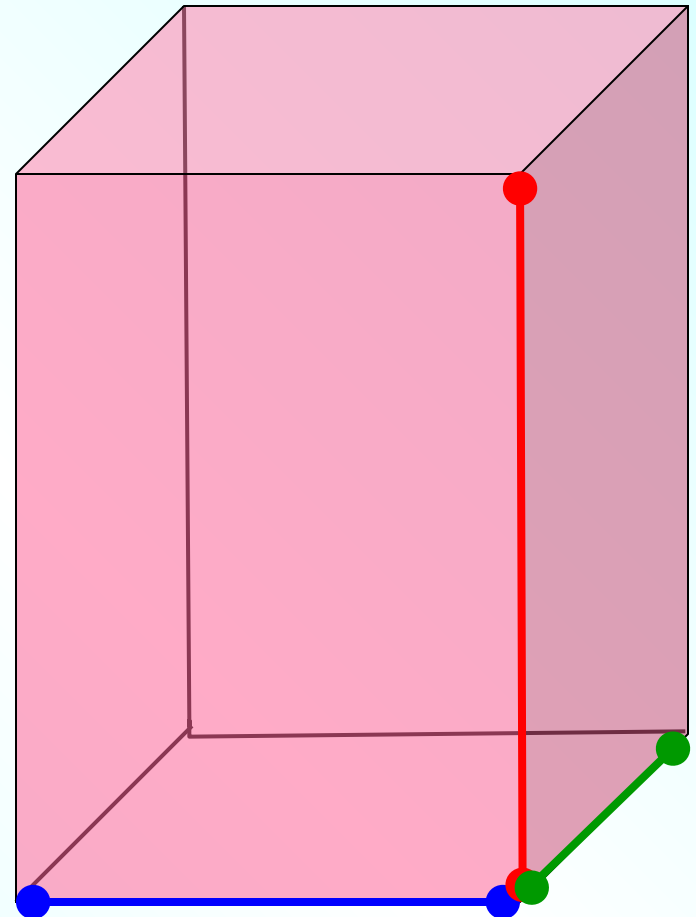
# Прямоугольный параллелепипед



Две грани  
параллелепипеда  
параллельны.

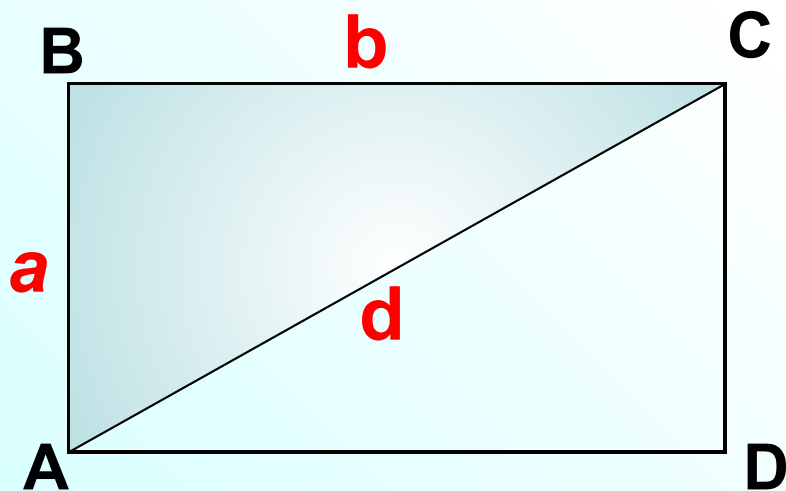
- 1<sup>0</sup>. В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней – прямоугольники.
- 2<sup>0</sup>. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые.

Длины трех ребер, имеющих общую вершину, называются измерениями прямоугольного параллелепипеда.



## Планиметрия

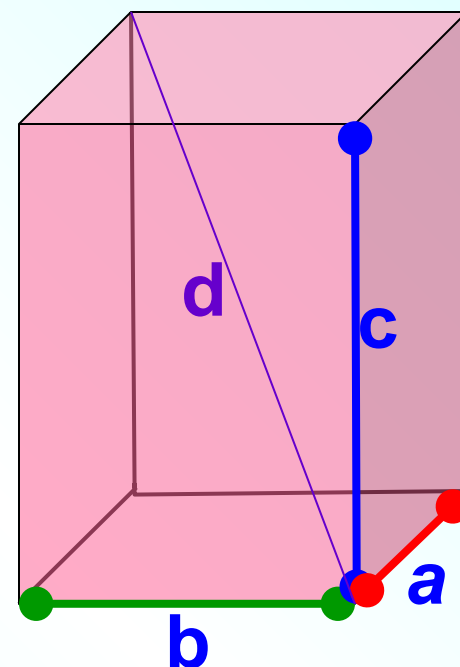
В прямоугольнике квадрат диагонали равен сумме квадратов двух его измерений.



$$d^2 = a^2 + b^2$$

## Стереометрия

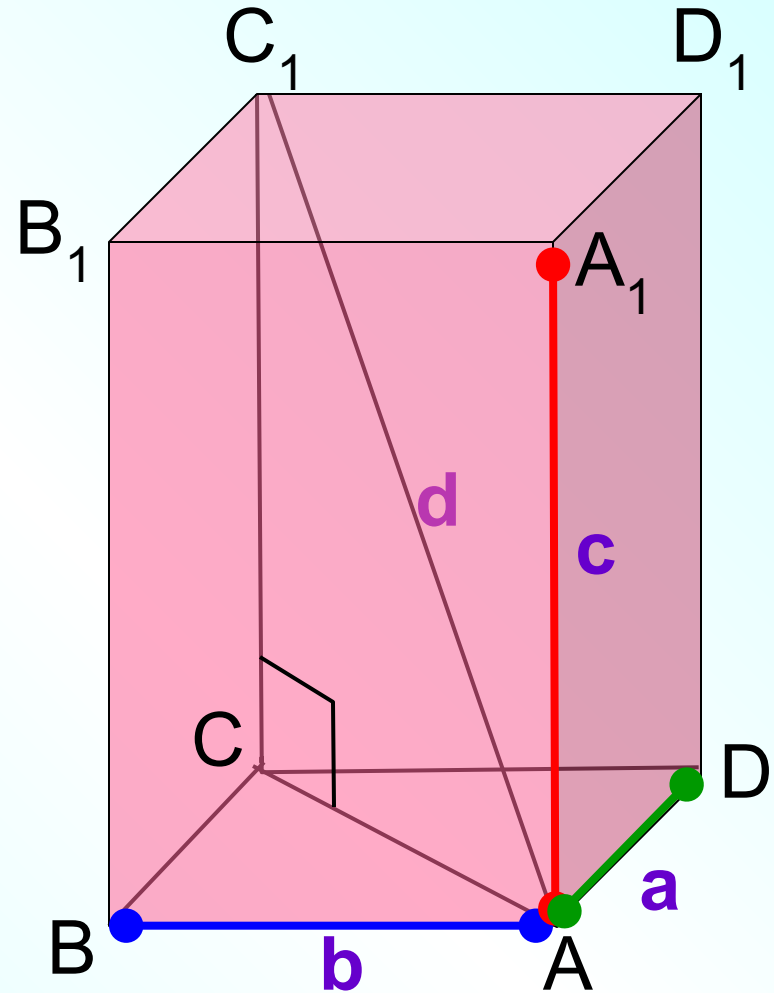
Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.



$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

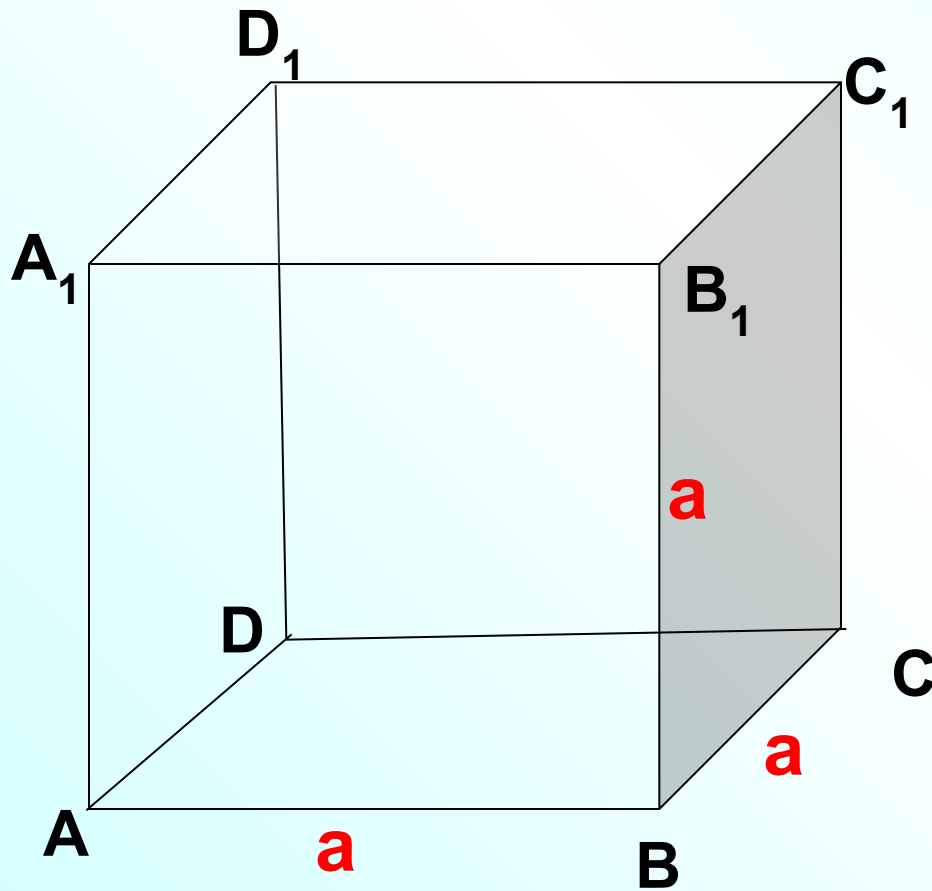
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



**Следствие.**

Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

**№ 188.** Ребро куба равно **a**. Найдите диагональ куба.



$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$d^2 = 3a^2$$

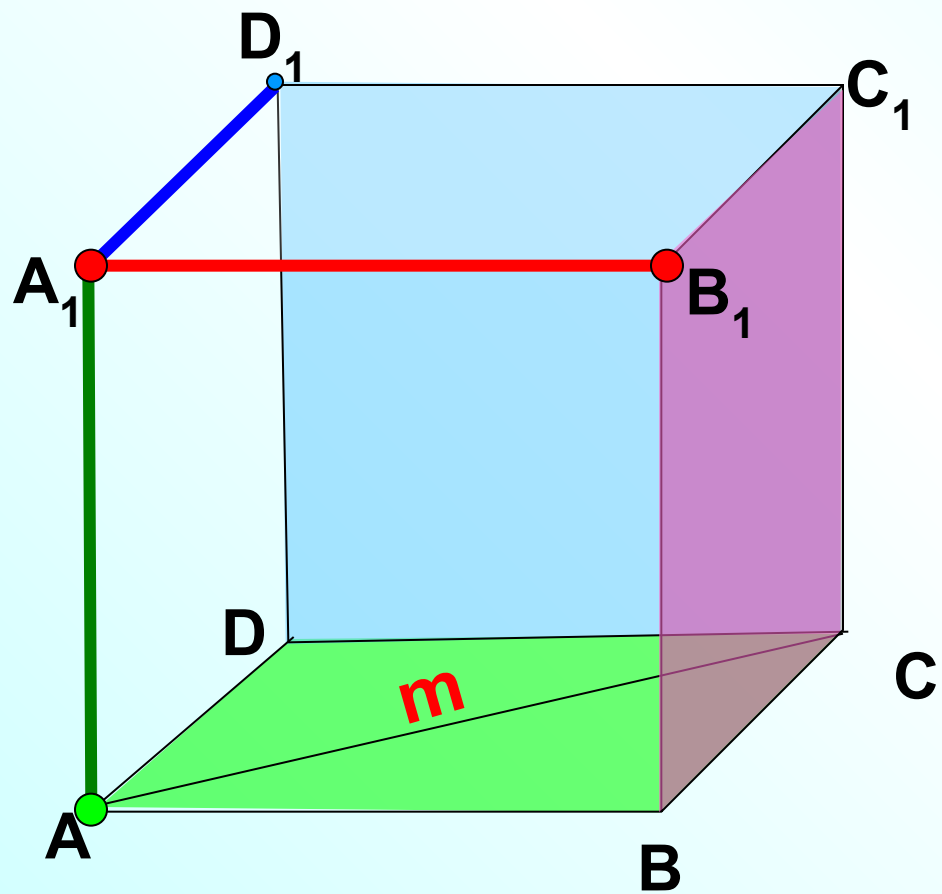
$$d = \sqrt{3a^2}$$

$$d = |a| \sqrt{3}$$

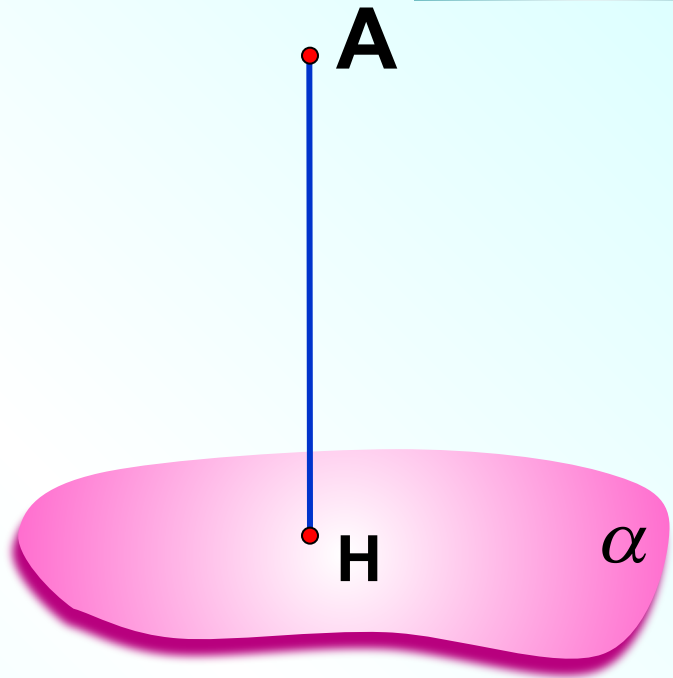
$$d = a\sqrt{3}$$



**№ 189.** Найдите расстояние от вершины куба до плоскости любой грани, в которой не лежит эта вершина, если:  
 а) диагональ грани куба равна  $m$ .  
 б) диагональ куба равна  $d$ .

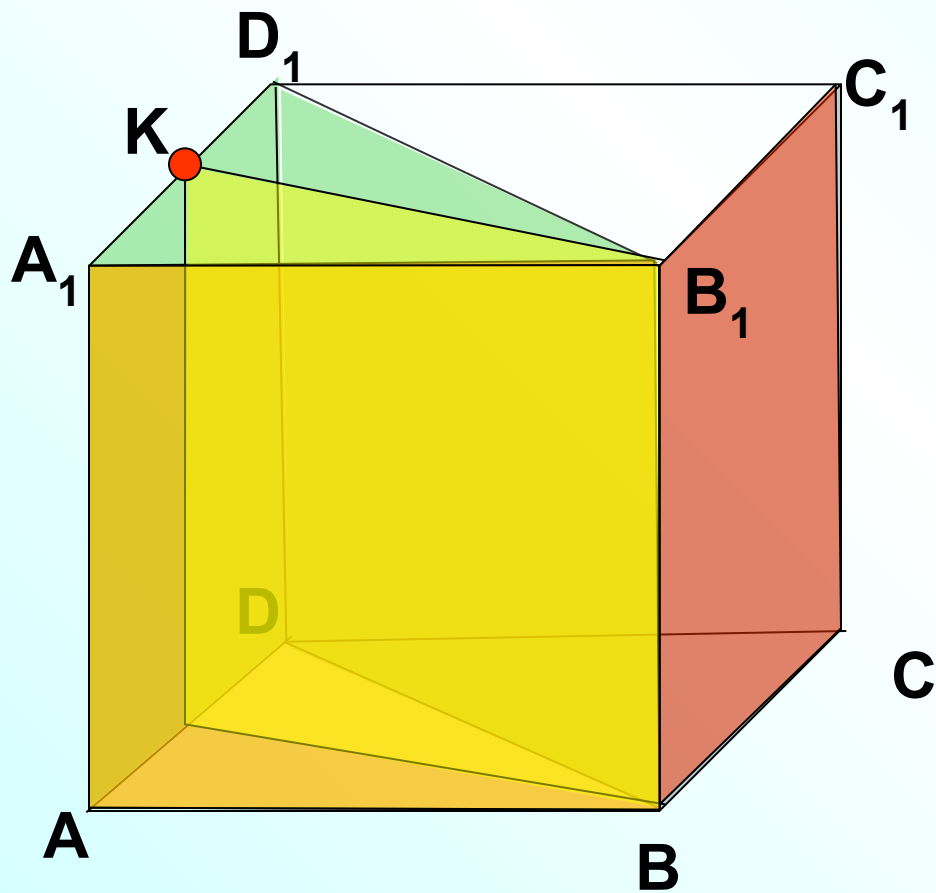


Подсказка

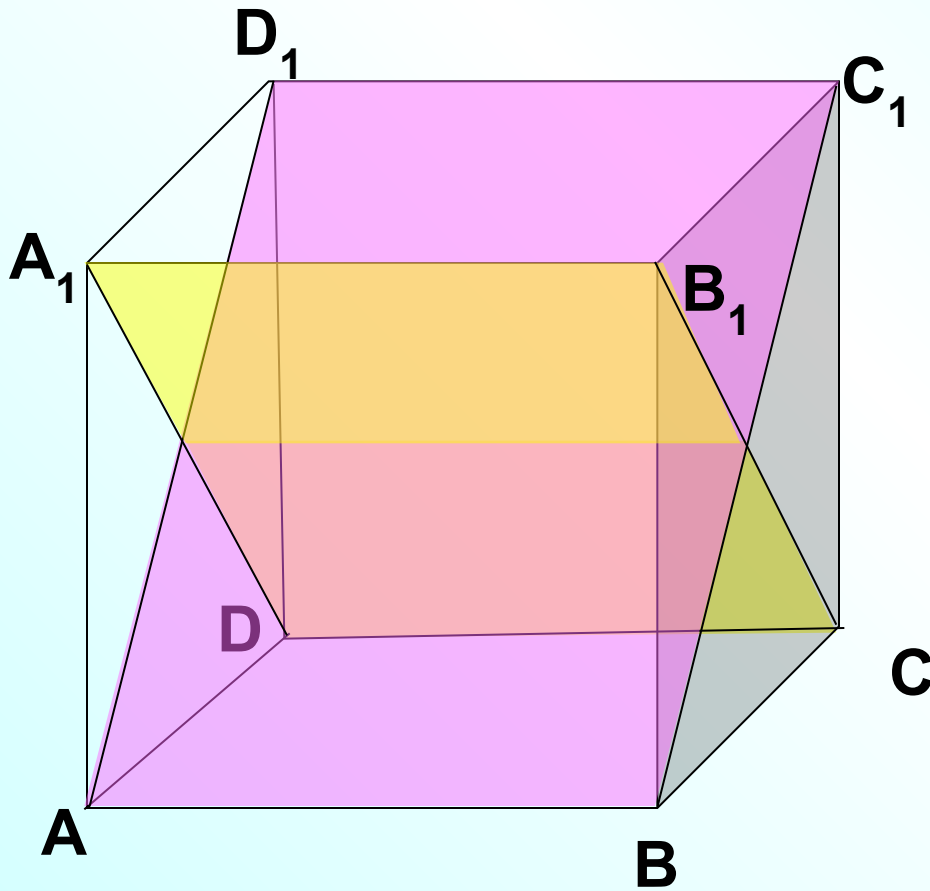


Расстояние от точки до плоскости – длина перпендикуляра

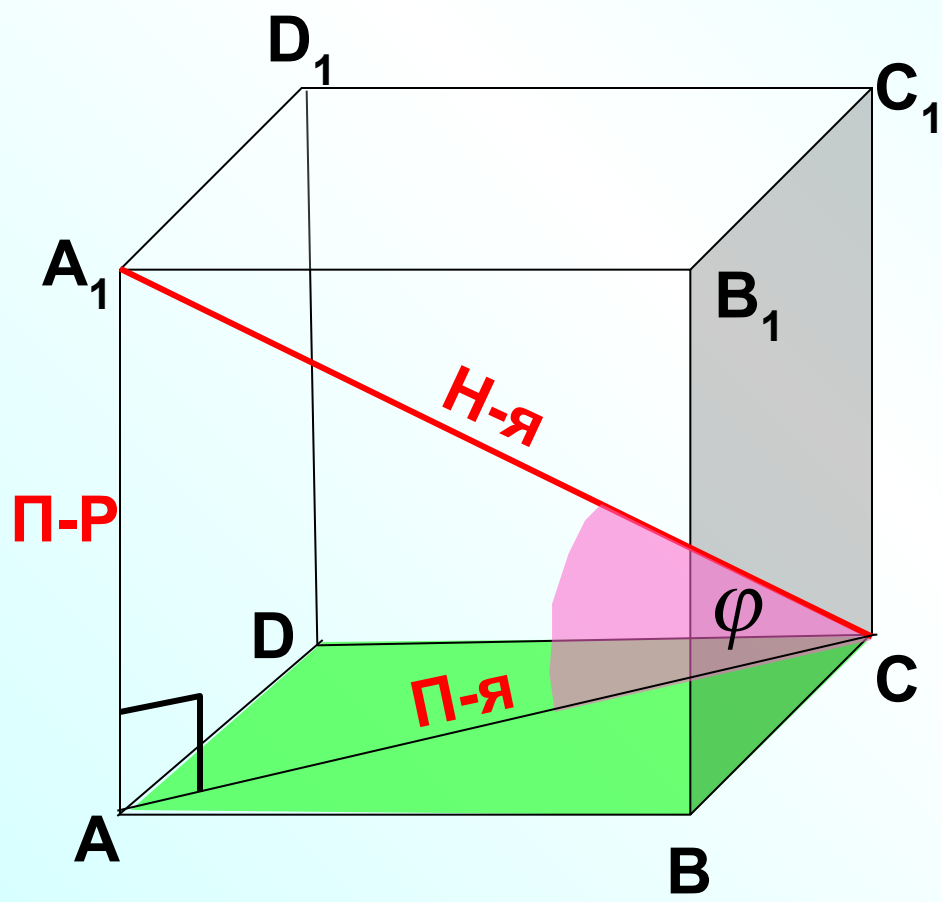
**№ 190.** Дан куб. Найдите следующие двугранные углы:  
а)  $ABB_1C$ ; б)  $ADD_1B$ ; в)  $A_1BB_1K$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1D_1$ .



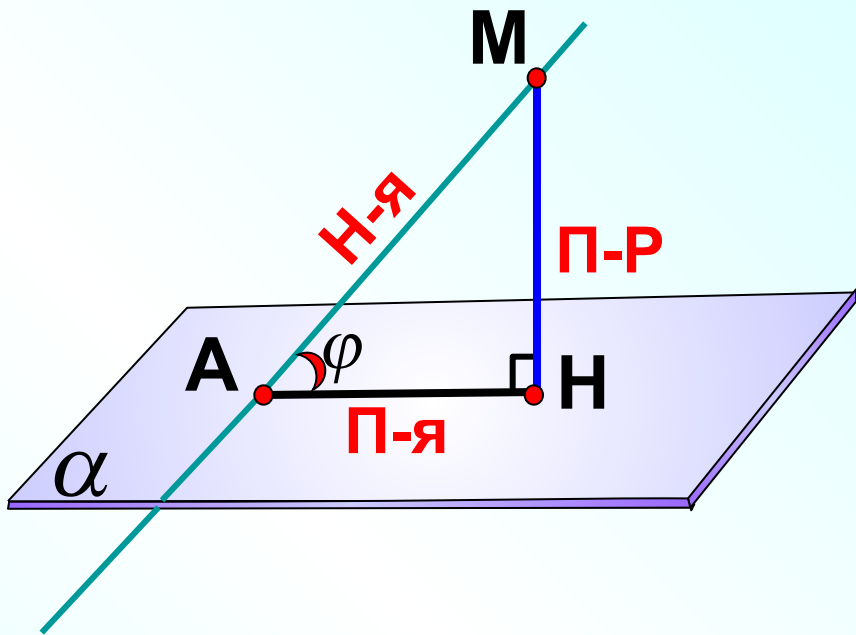
**№ 191.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Докажите, что плоскости  $ABC_1$  и  $A_1 B_1 D$  перпендикулярны.



**№ 192.** Найдите тангенс угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.



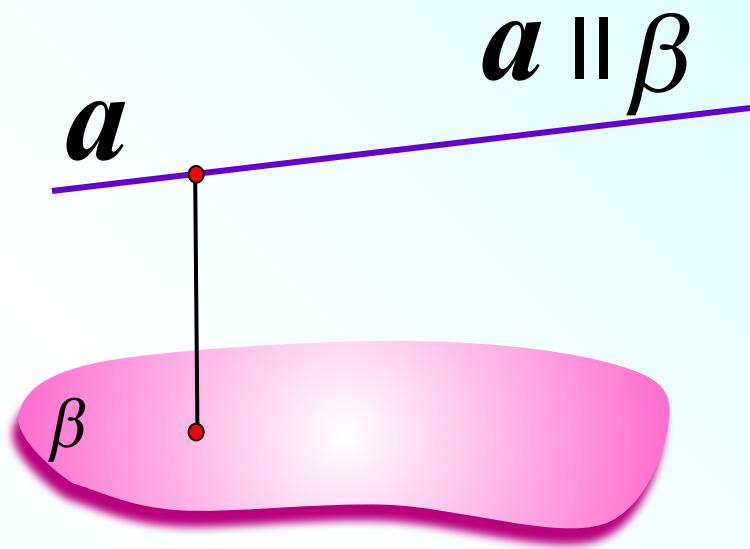
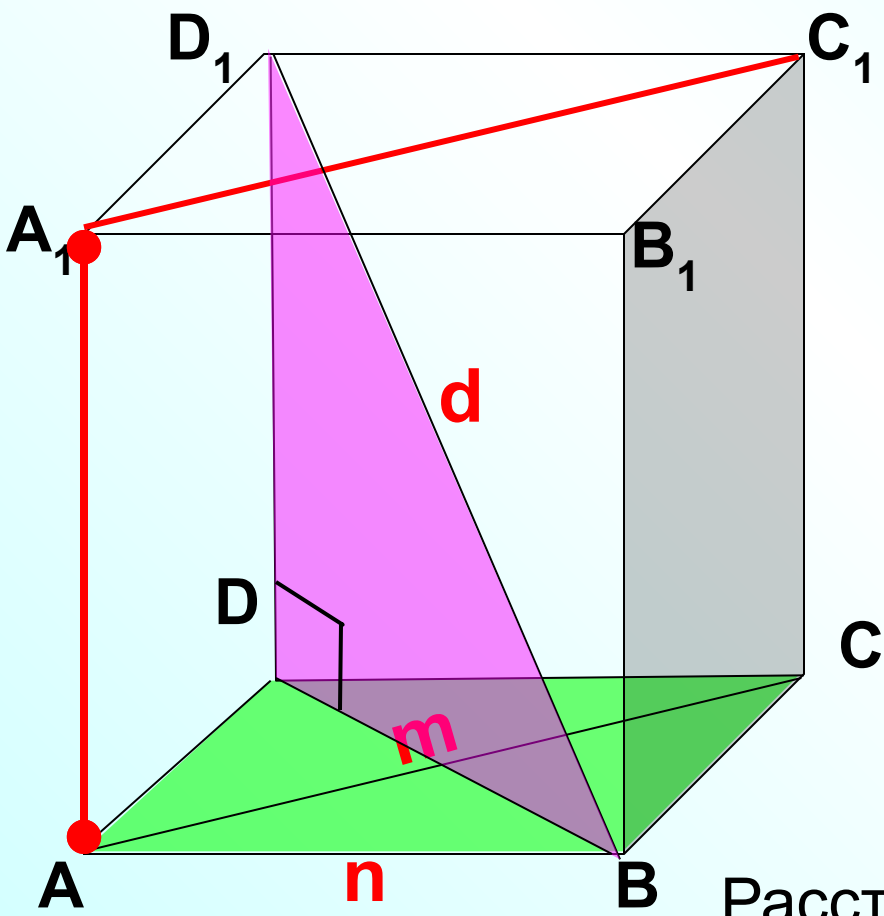
Подсказка



**Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.**

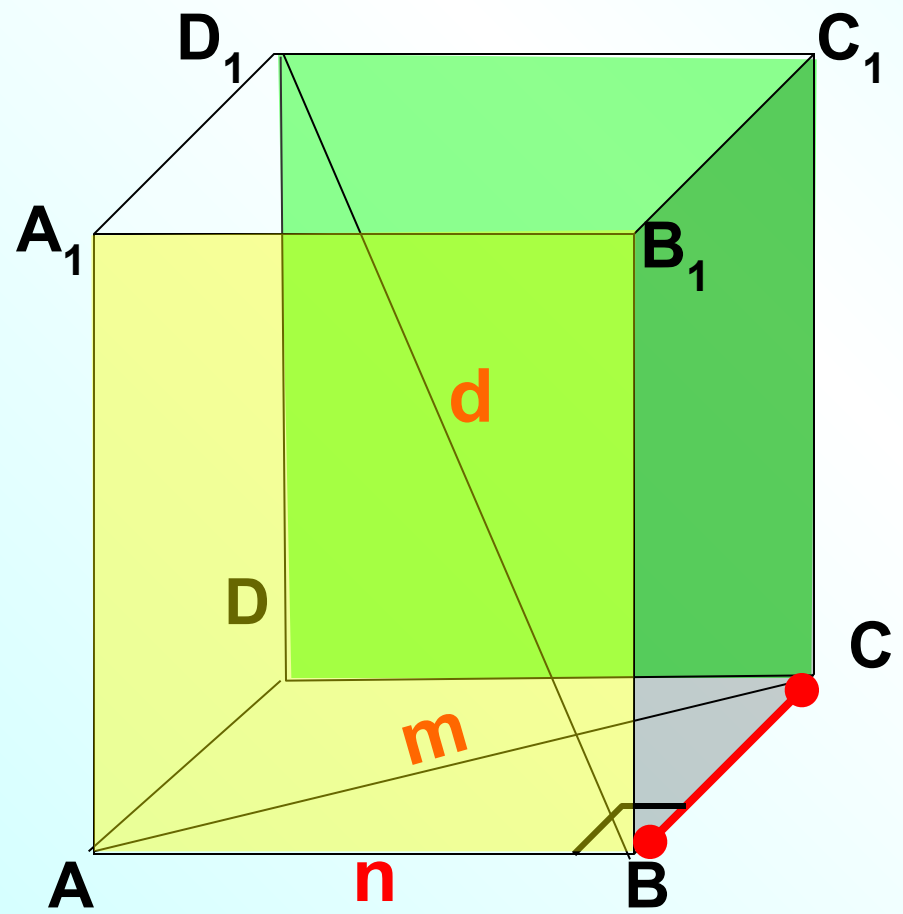
**№ 193.** Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .  
 Найдите расстояние между:  
 а) прямой  $A_1 C_1$  и плоскостью  $ABC$ ;

Подсказка

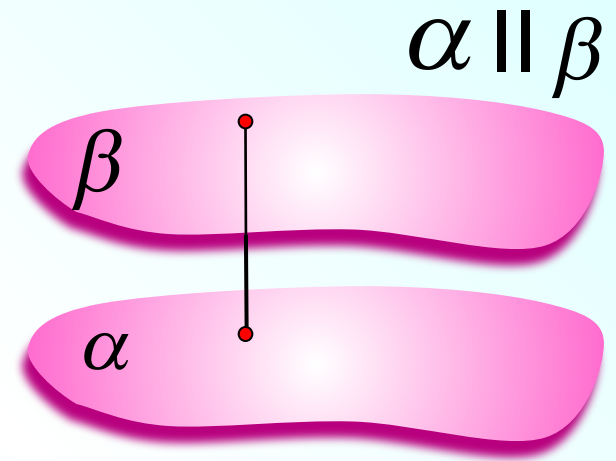


Расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется **расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью**

**№ 193.** Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   
 Найдите расстояние между:  
 б) плоскостями  $ABB_1$  и  $DCC_1$ ;



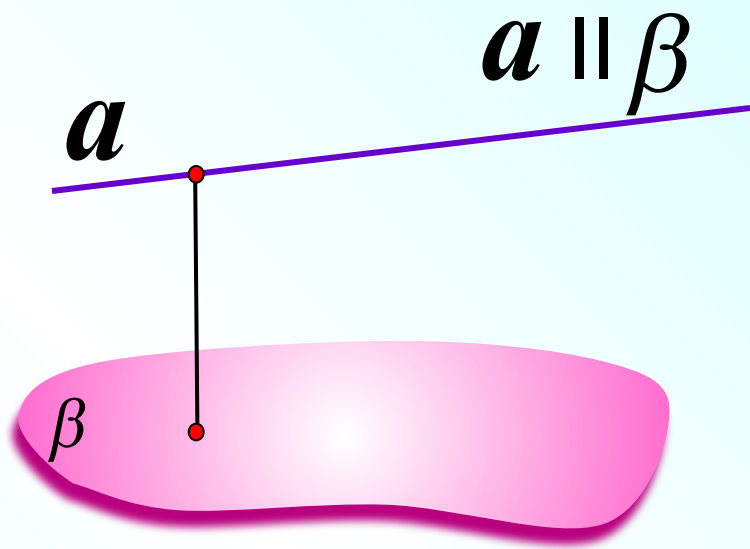
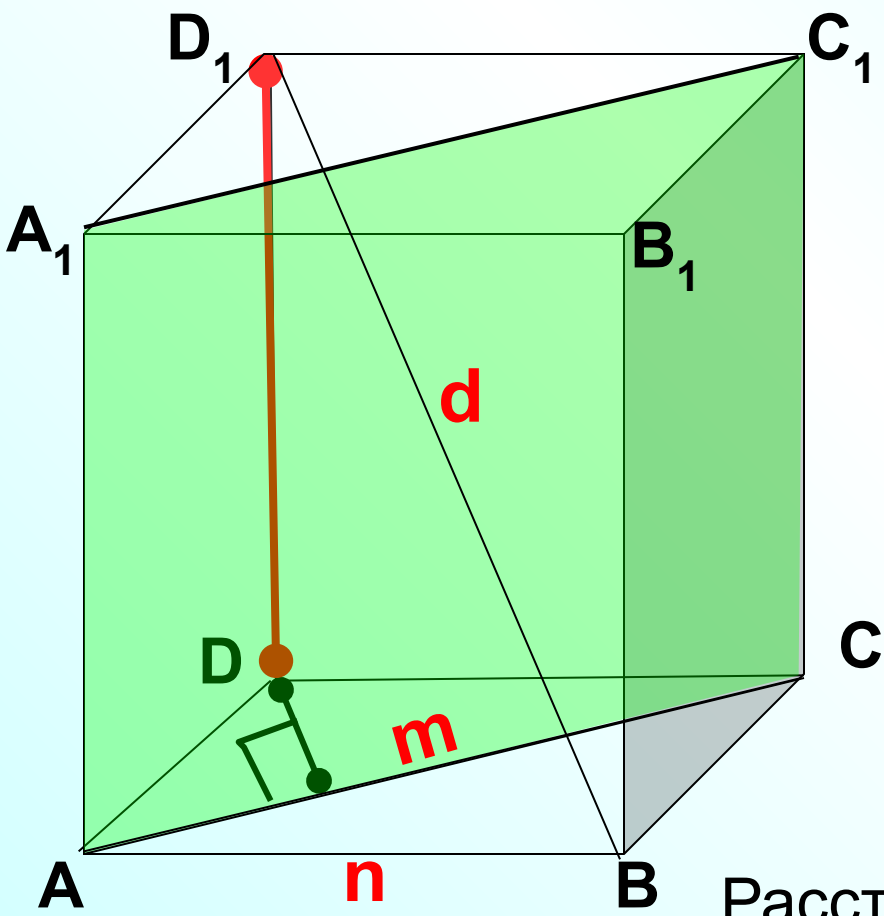
Подсказка



Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется **расстоянием между параллельными плоскостями.**

**№ 193.** Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .  
 Найдите расстояние между:  
 в) прямой  $DD_1$  и плоскостью  $ACC_1$ .

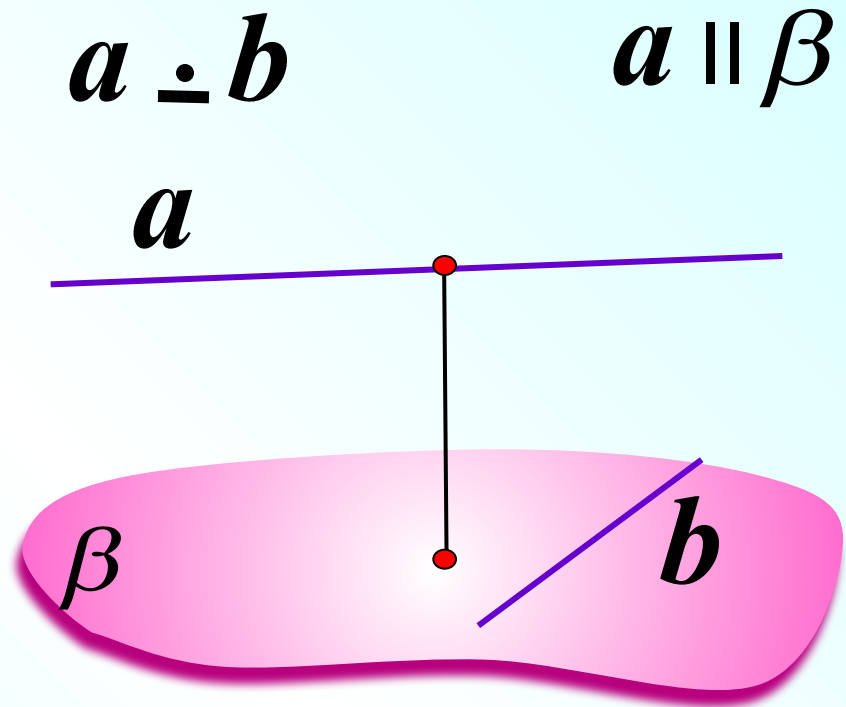
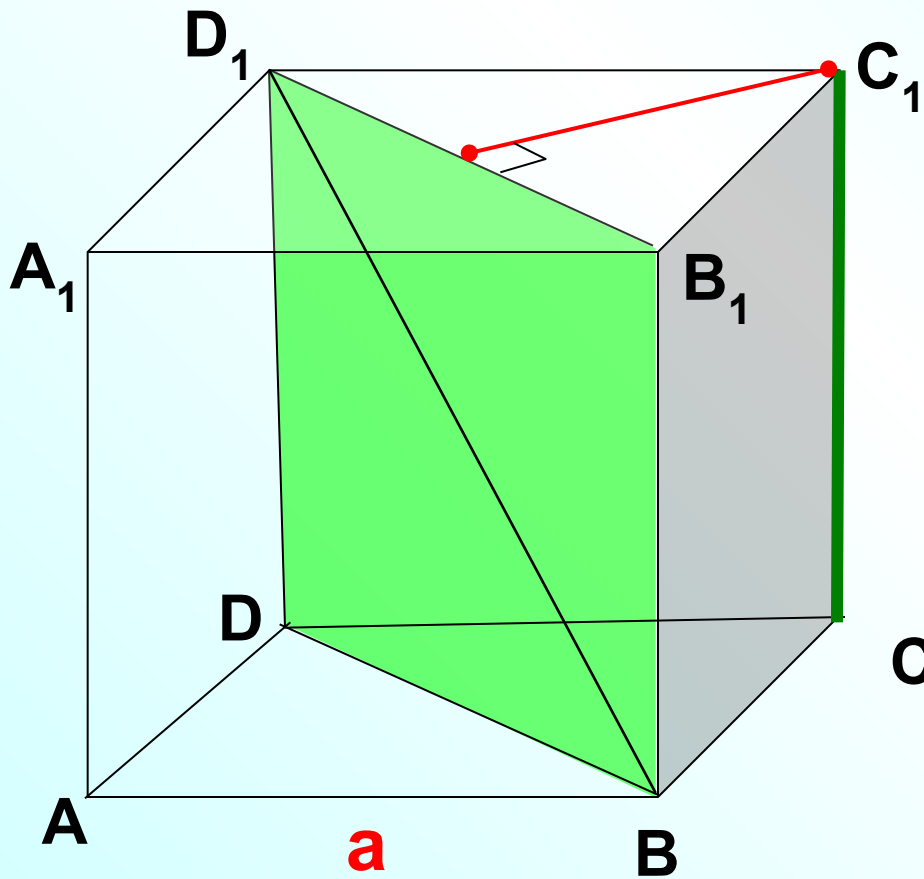
Подсказка



Расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется **расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью**

**№ 194.** Ребро куба равно **a**. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими:  
 а) диагональ куба и ребро куба;

Подсказка



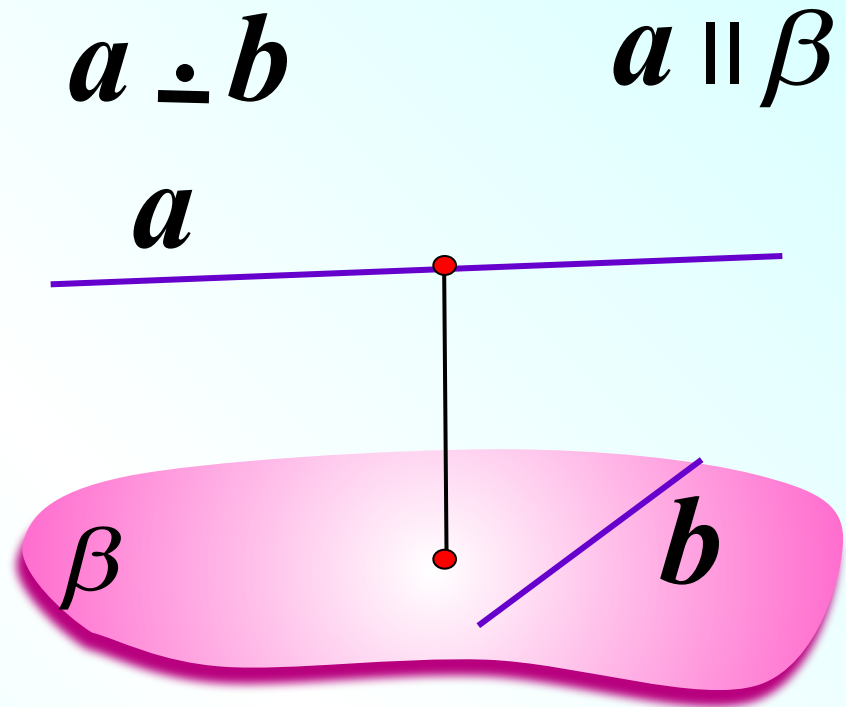
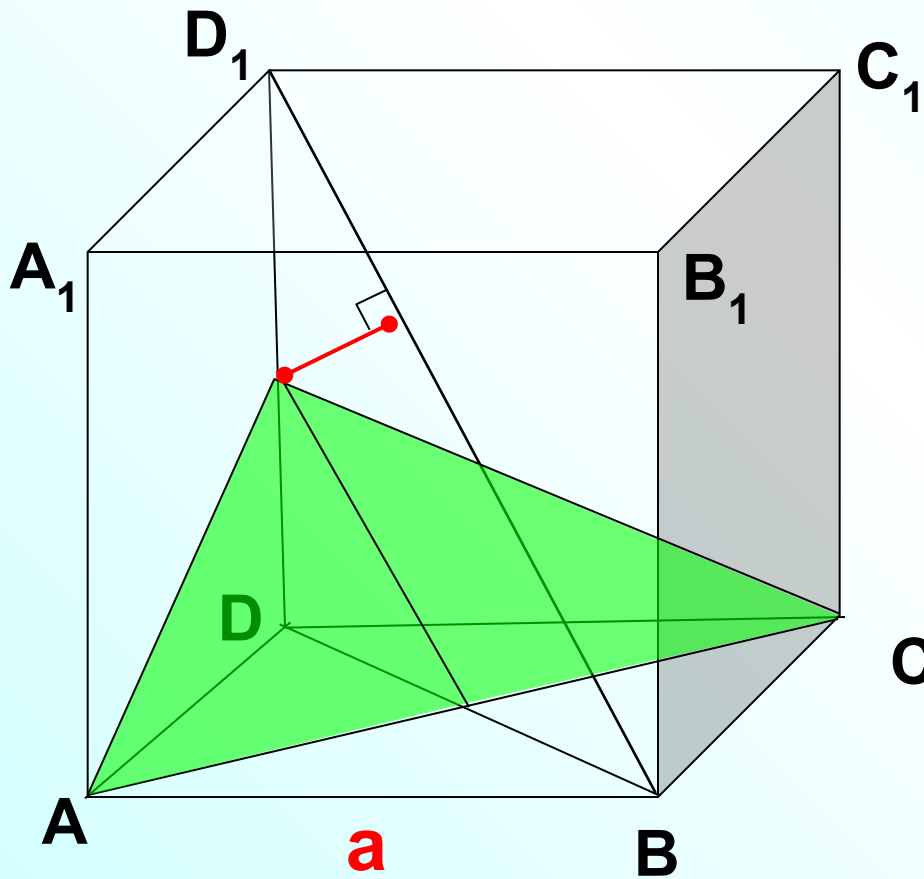
Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется **расстоянием между скрещивающимися прямыми.**



**№ 194.** Ребро куба равно **a**. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими:

б) диагональ куба и диагональ грани куба.

Подсказка



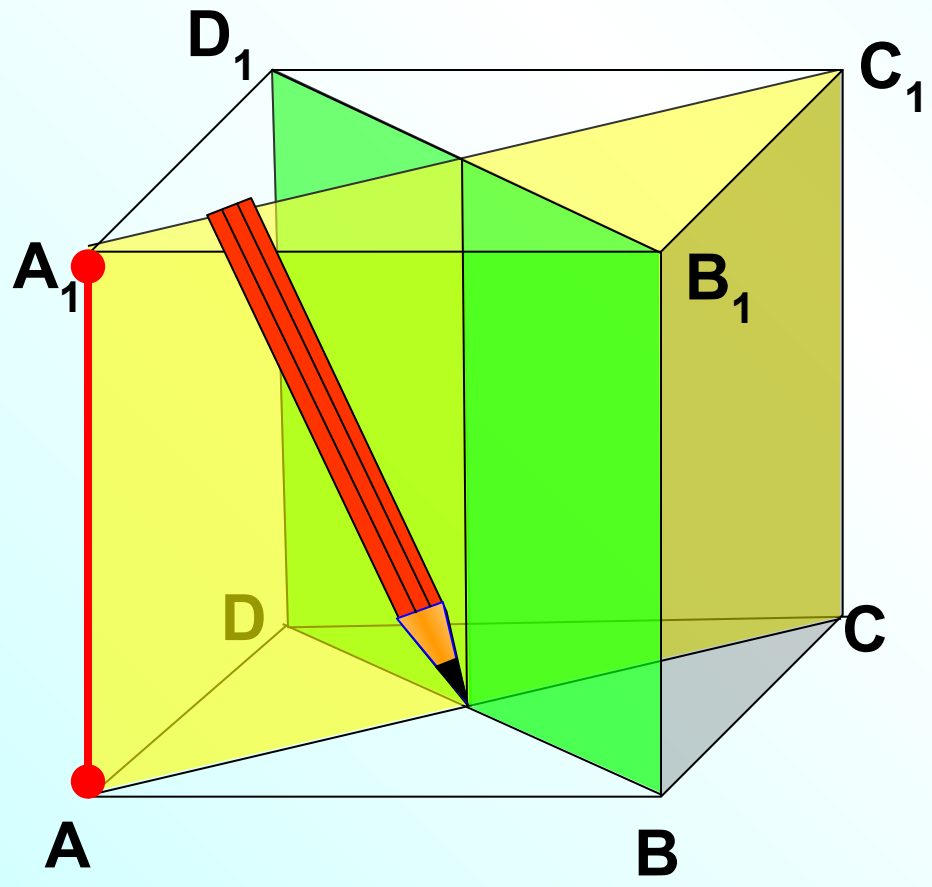
Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется

**расстоянием между скрещивающимися прямыми.**

**№ 196.**

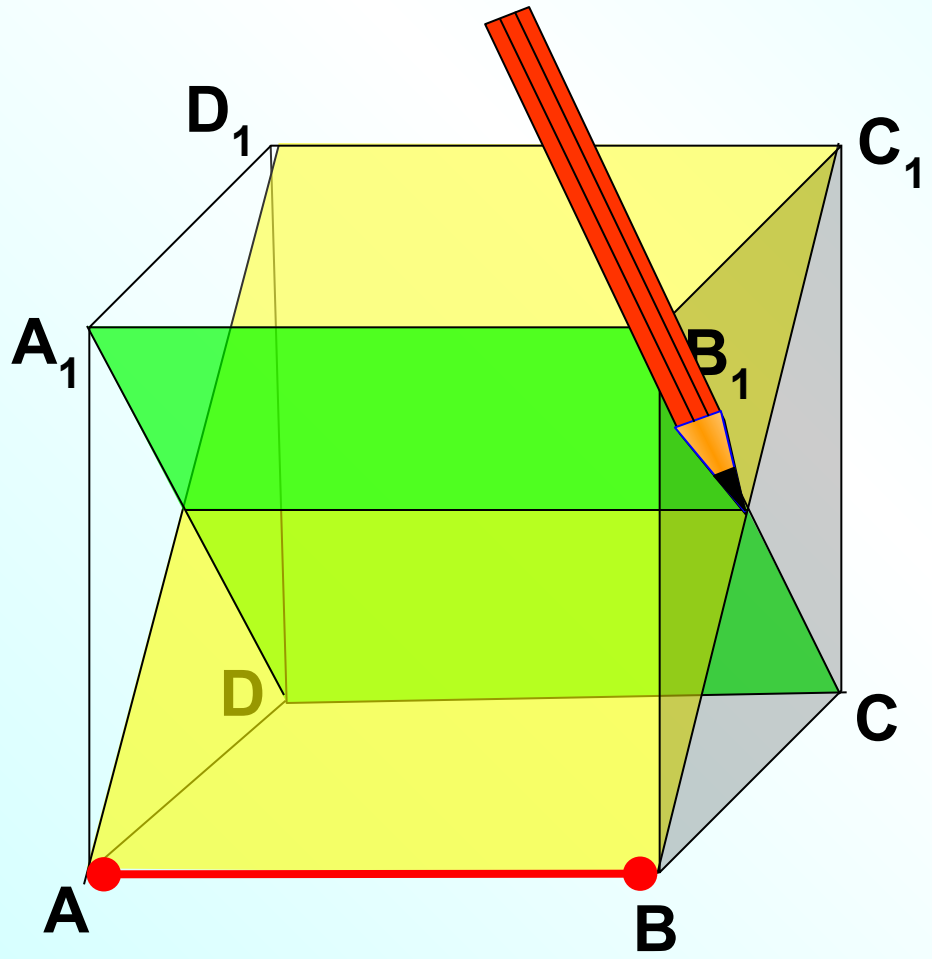
Изобразите куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и постройте его сечение плоскостью, проходящей через:

- а) ребро  $AA_1$  и перпендикулярной к плоскости  $BB_1 D_1$ ;

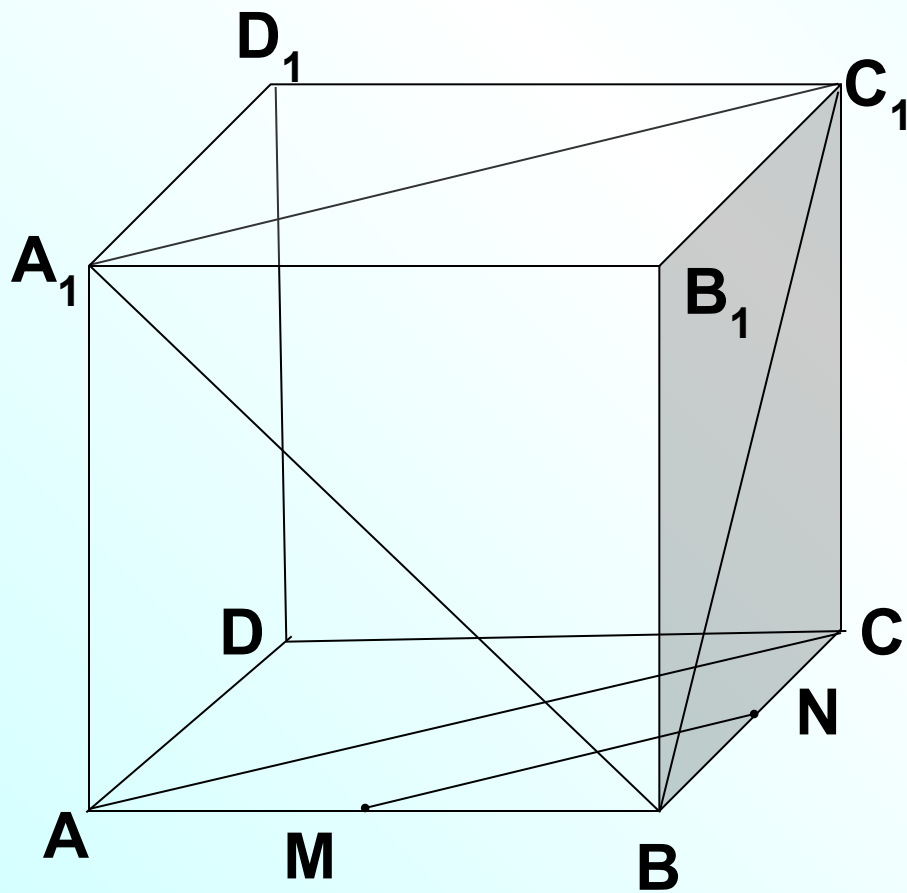


**№ 196.**

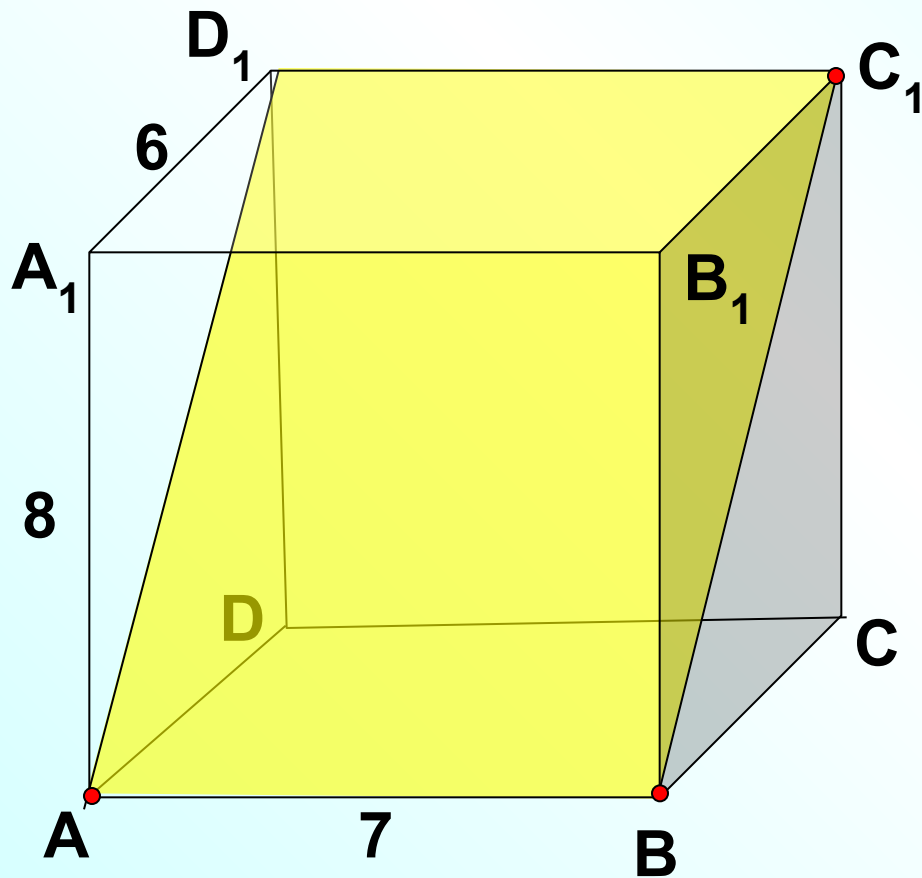
Изобразите куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и постройте его сечение плоскостью, проходящей через:  
б) ребро  $AB$  и перпендикулярной к плоскости  $CDA_1$ .



1. Найдите угол  $A_1BC_1$
2. Доказать, что  $MN \parallel A_1C_1$ , где  $M$  и  $N$  – середины ребер куба.



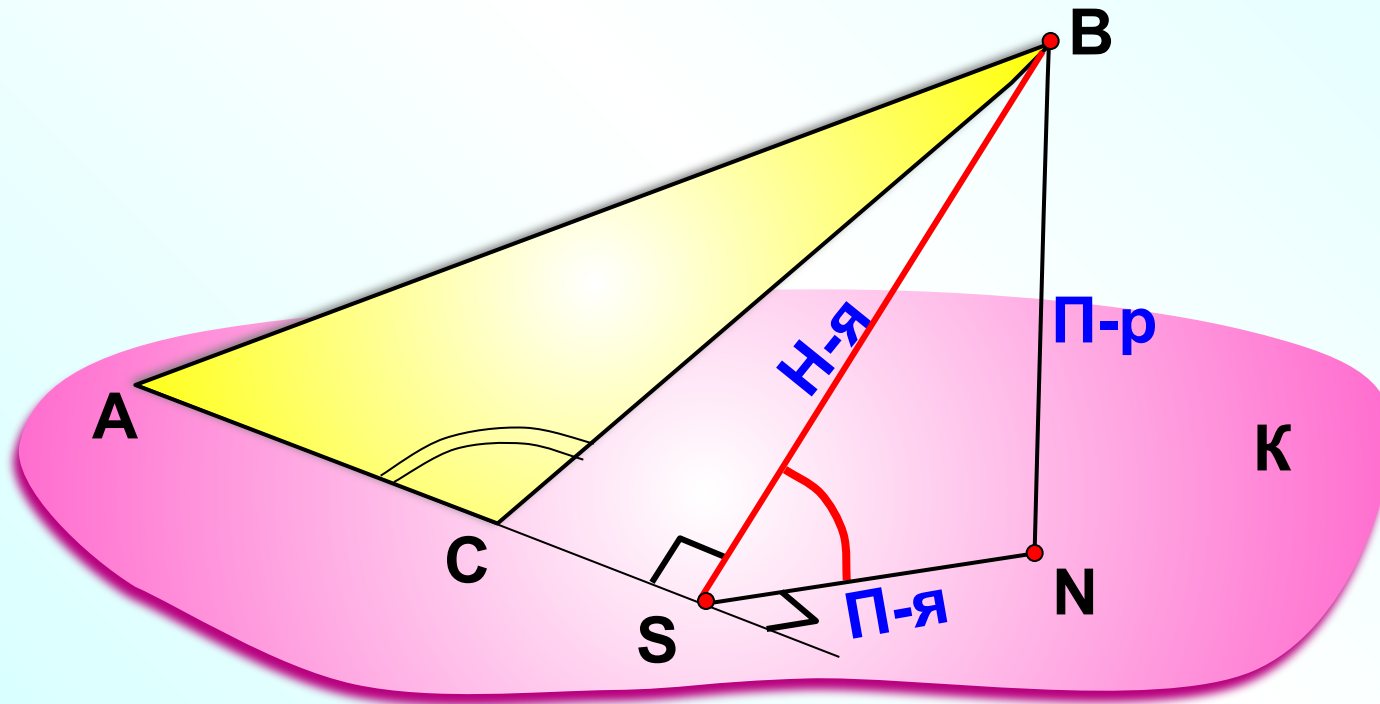
Найдите площадь сечения, проходящего через точки  $A$ ,  $B$  и  $C_1$



Построить линейный угол двугранного угла  $BACK$ .  
Треугольник  $ABC$  – тупоугольный.

$$AC \perp BS \xRightarrow{\text{ТПП}} AC \perp NS$$

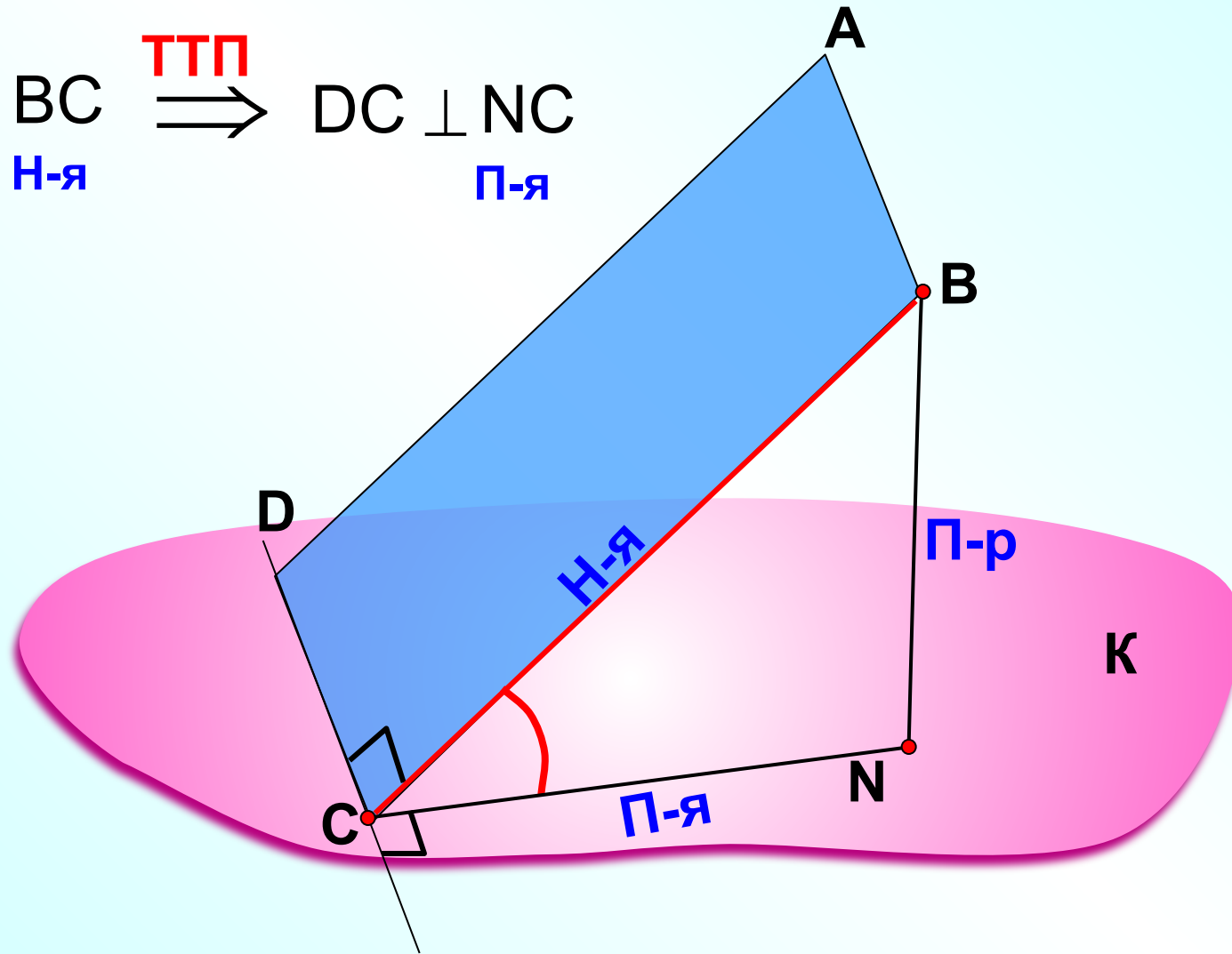
$\text{Н-я}$  $\text{П-я}$



Угол  $BSN$  – линейный угол двугранного угла  $BACK$

Построить линейный угол двугранного угла  $BDCK$ .  
 $ABCD$  – прямоугольник.

$$\begin{array}{ccc} DC \perp BC & \xRightarrow{\text{ТТП}} & DC \perp NC \\ \text{Н-я} & & \text{П-я} \end{array}$$

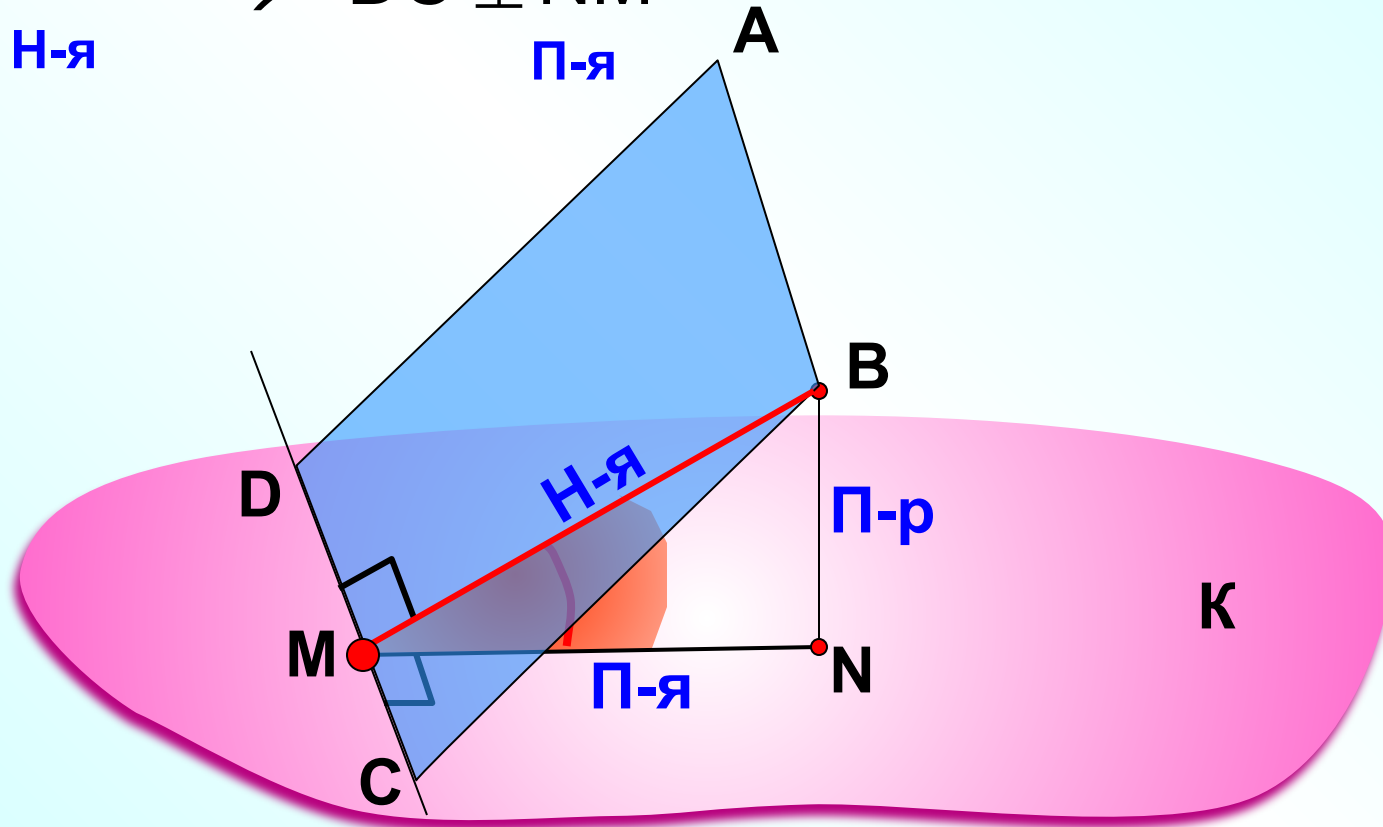


Угол  $BCN$  – линейный угол двугранного угла  $BDCK$

Построить линейный угол двугранного угла  $BDCK$ .  
 $ABCD$  – параллелограмм, угол  $C$  острый.

$$DC \perp BM \xrightarrow{\text{ТТП}} DC \perp NM$$

Н-яП-я



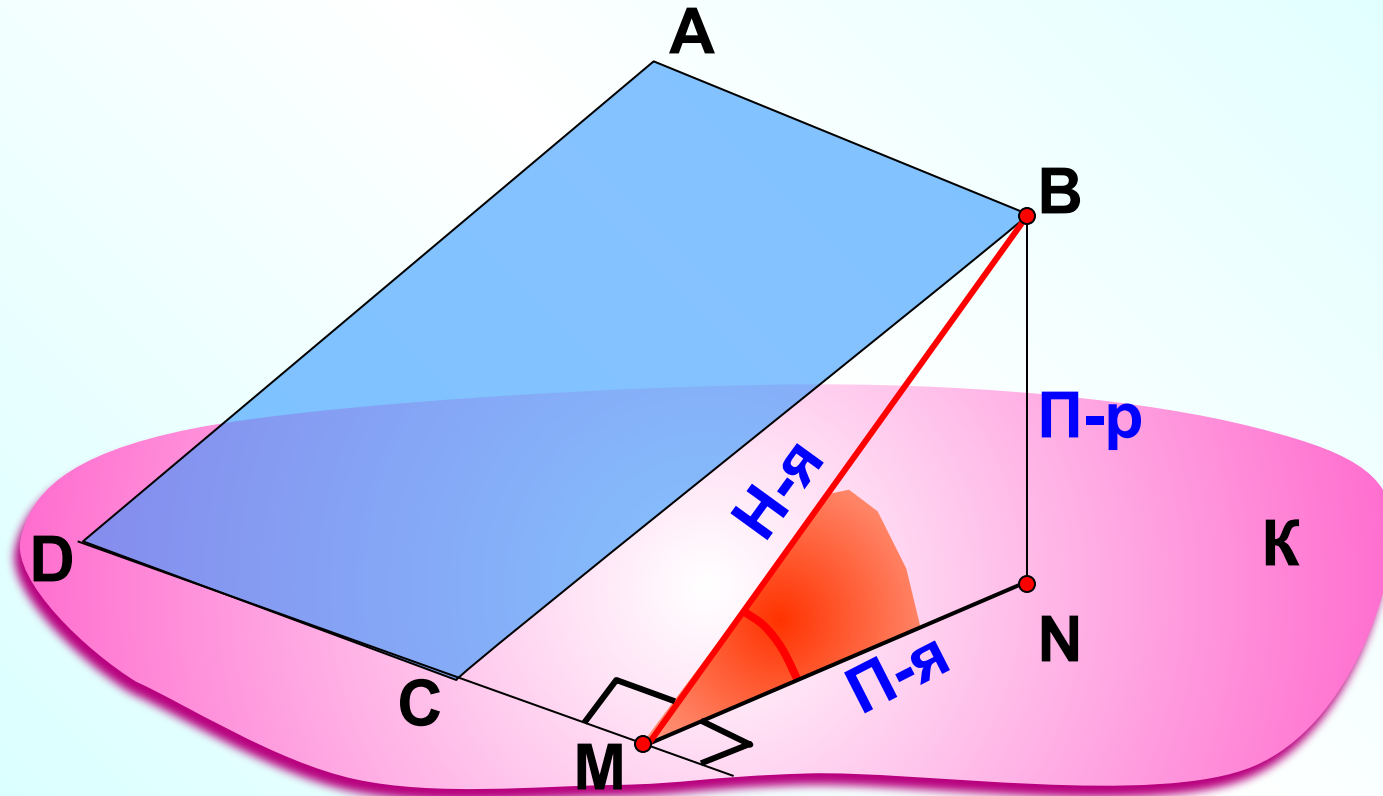
Угол  $BMN$  – линейный угол двугранного угла  $BDCK$



Построить линейный угол двугранного угла  $BDCK$ .  
 $ABCD$  – параллелограмм, угол  $C$  тупой.

$$DC \perp BM \xRightarrow{\text{ТТП}} DC \perp NM$$

$\text{Н-я}$  $\text{П-я}$

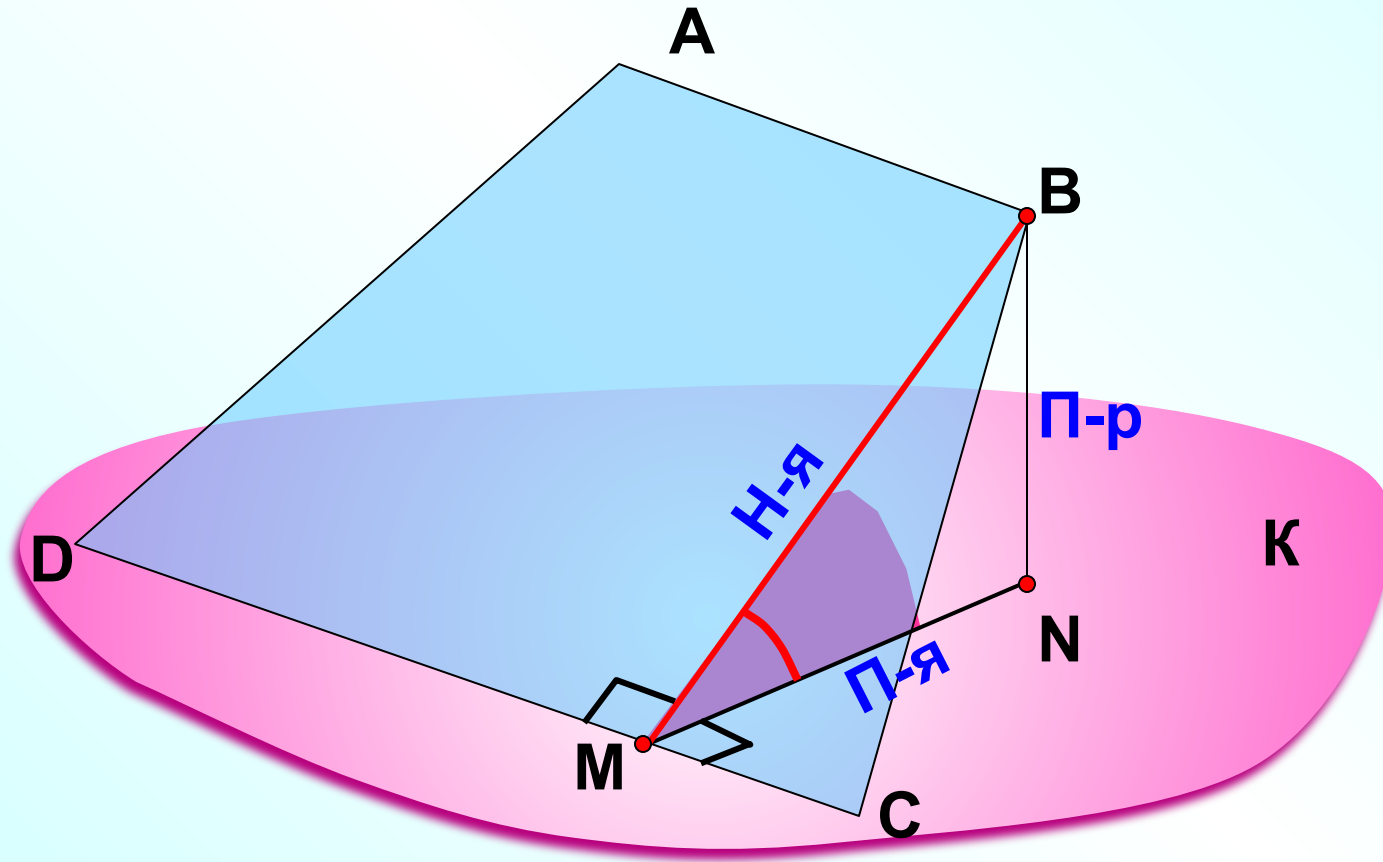


Угол  $BMN$  – линейный угол двугранного угла  $BDCK$

Построить линейный угол двугранного угла  $BDCK$ .  
 $ABCD$  – трапеция, угол  $C$  острый.

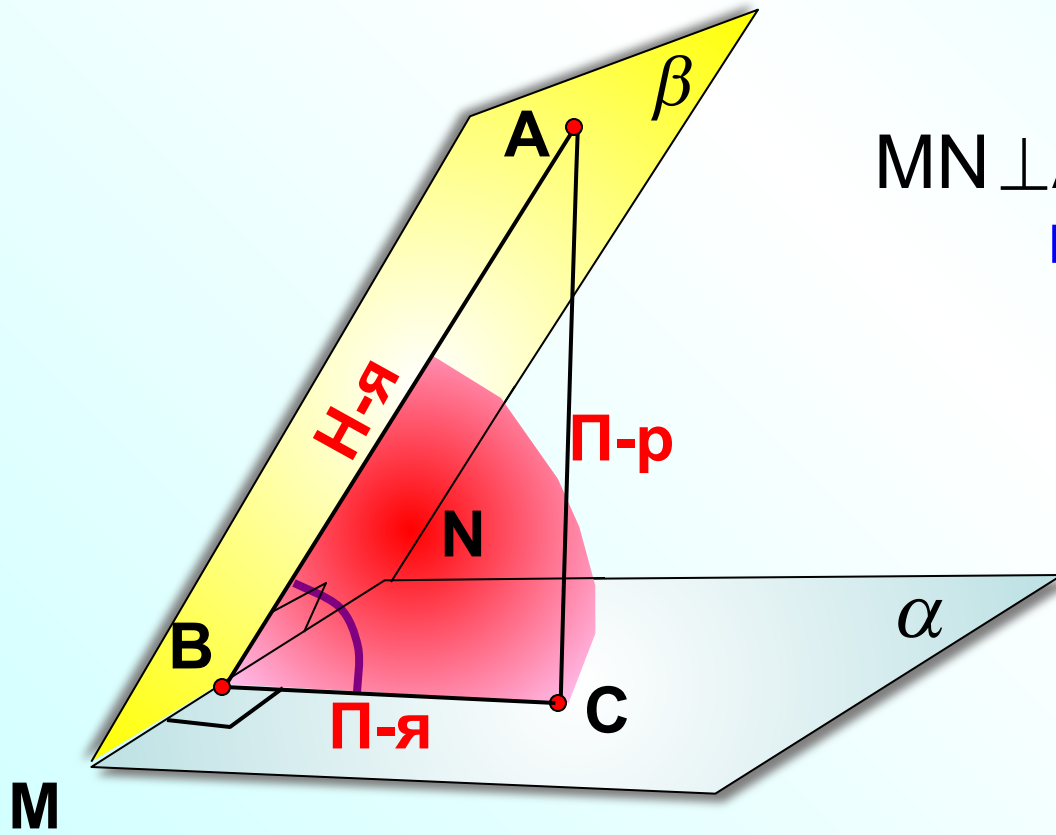
$$DC \perp BM \xRightarrow{\text{ТТП}} DC \perp NM$$

$\text{Н-я}$  $\text{П-я}$



Угол  $BMN$  – линейный угол двугранного угла  $BDCK$

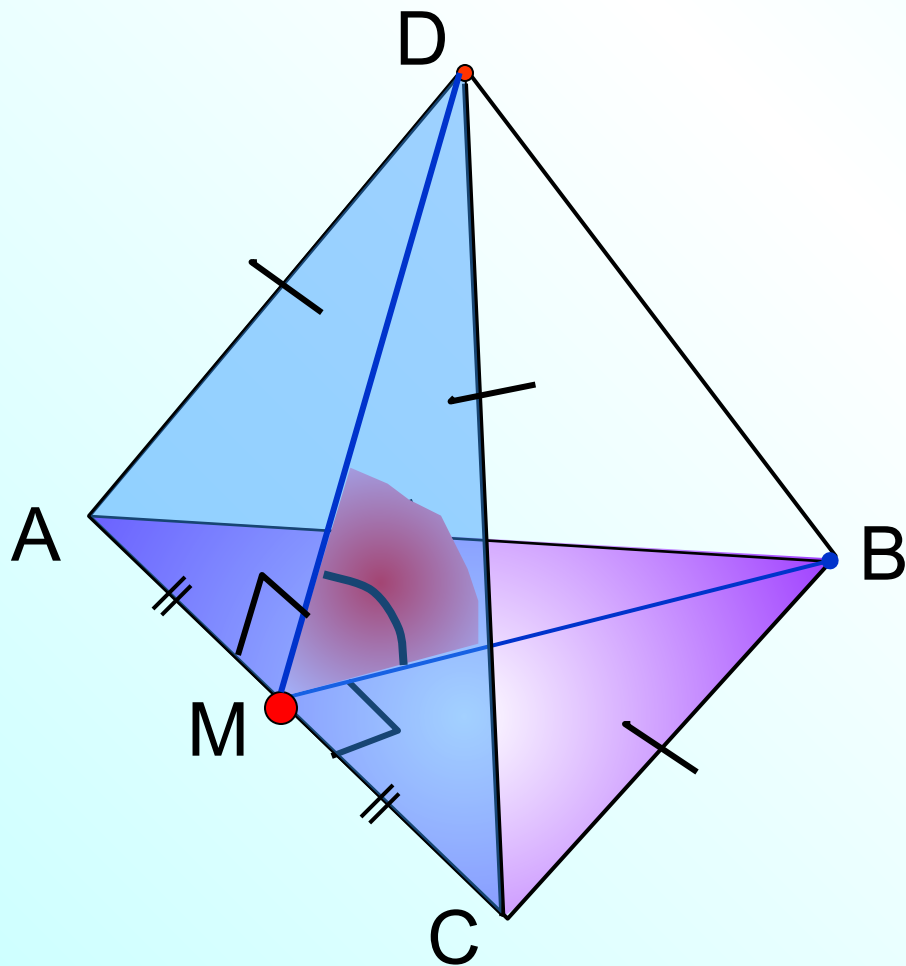
**№ 166.** Неперпендикулярные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $MN$ . В плоскости  $\beta$  из точки  $A$  проведен перпендикуляр  $AB$  к прямой  $MN$  и из той же точки  $A$  проведен перпендикуляр  $AC$  к плоскости  $\alpha$ . Докажите, что угол  $ABC$  – линейный угол двугранного угла  $AMNC$ .



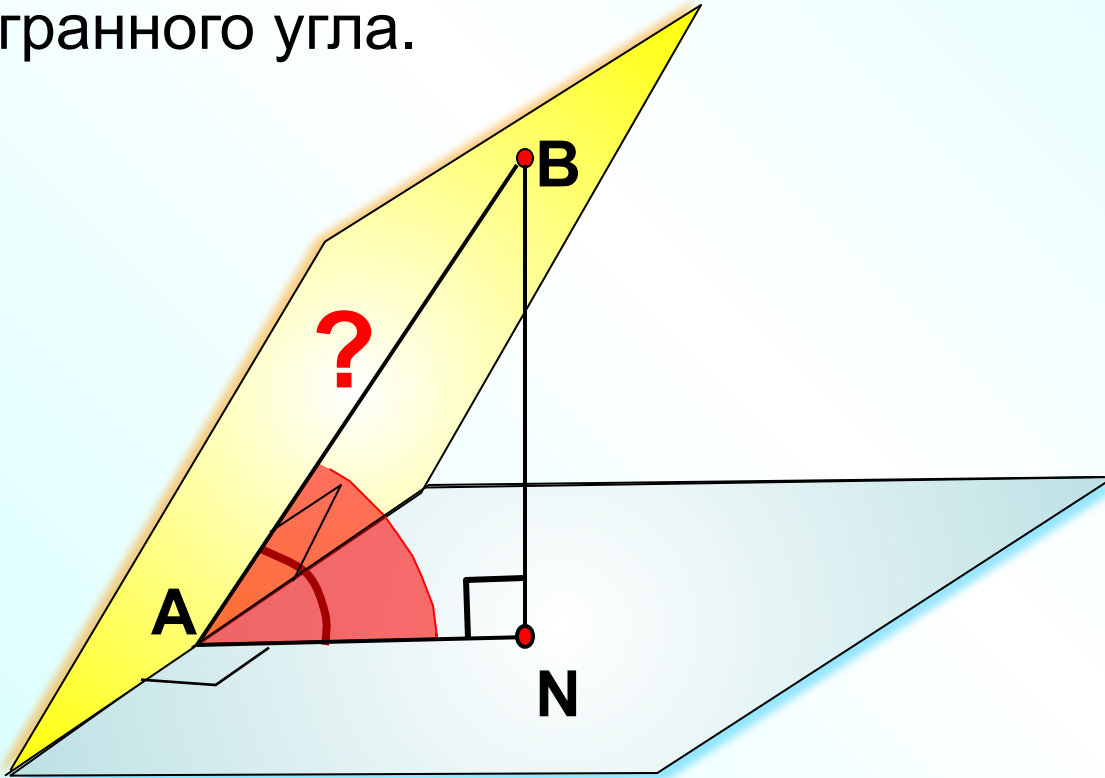
$$\begin{array}{ccc}
 MN \perp AB & \xRightarrow{\text{ТТП}} & MN \perp BC \\
 \text{Н-я} & & \text{П-я}
 \end{array}$$

Угол  $ABC$  – линейный угол двугранного угла  $AMNC$

**№ 167.** В тетраэдре  $DABC$  все ребра равны, точка  $M$  – середина ребра  $AC$ . Докажите, что угол  $DMB$  – линейный угол двугранного угла  $BACD$ .



**№ 168.** Двугранный угол равен  $\varphi$ . На одной грани этого угла лежит точка, удаленная на расстояние  $d$  от плоскости другой грани. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.



**№ 169.** Даны два двугранных угла, у которых одна грань общая, а две другие грани являются различными полуплоскостями одной плоскости. Докажите, что сумма этих двугранных углов равна  $180^\circ$ .

