

# Работа. Кинетическая энергия. Мощность.

Читает: Сограби Тимур  
Вагидович

ассистент кафедры  
физики и химии УрГЭУ

[sograbi\\_tv@usue.ru](mailto:sograbi_tv@usue.ru)

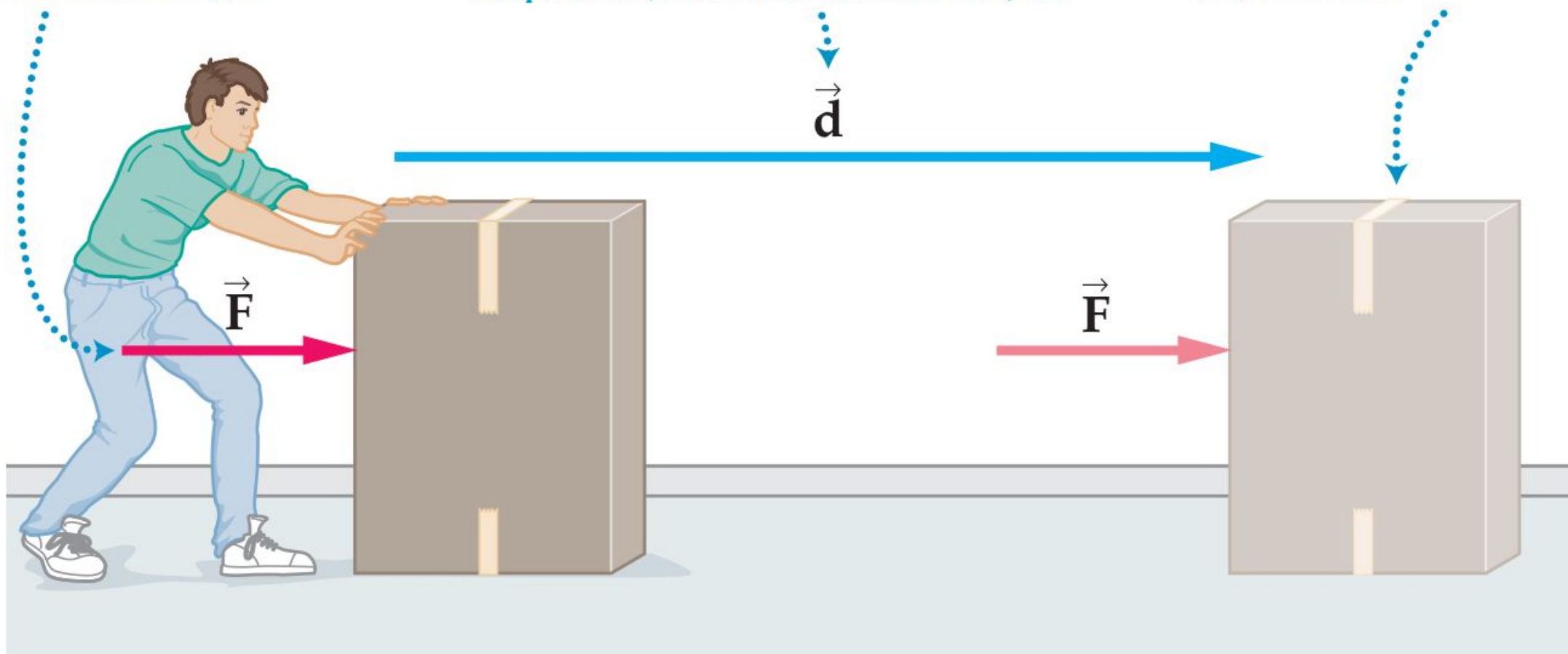
- Работа под действием постоянной силы
- Работа под углом к перемещению
- Кинетическая энергия и теорема энергии-работы
- Работа под действием переменной силы
- Мощность

# Работа под действием ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ

Постоянная сила  
величиной  $F$ ,...

... действующая в направлении  
перемещения величиной  $d$ ,...

... совершает работу  $W = Fd$   
над телом.



# Работа под действием постоянной силы

Работа – скалярная величина:

$$W = Fd$$

Единица измерения СИ: ньютон-метр ( $\text{Н} \cdot \text{м}$ ) = джоуль, Дж.

Определение джоуля:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2$$

# Работа под действием постоянной силы

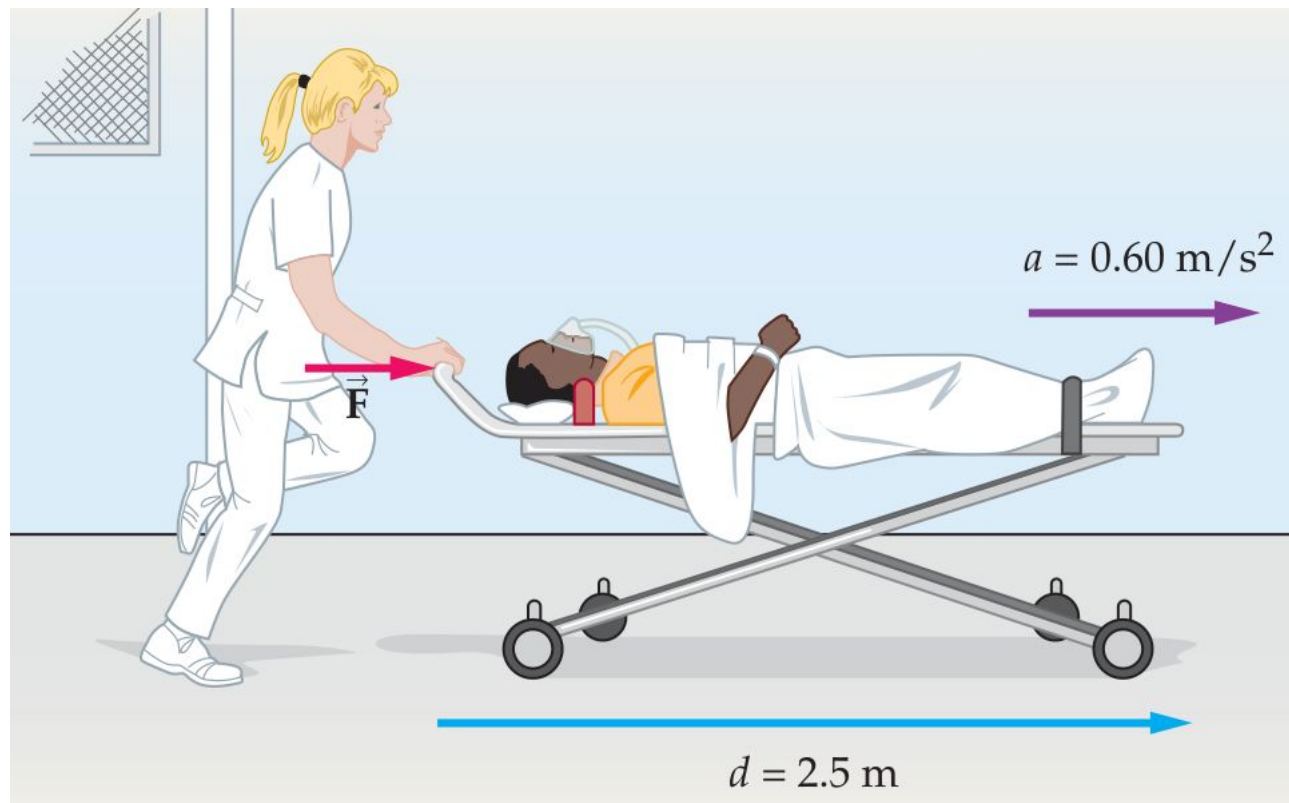
## Типичные значения работы

Деятельность	Эквивалентная работа, Дж
Извержение вулкана	
Сжигание 5 л бензина	
Ежедневная порция еды человека	
Растапливание кубика льда	
Горение лампочки на 100 Ватт 1 минуту	
Биение сердца человека	
Переворот страницы книги	
Прыжок блохи	

# Пример 1

Медсестра толкает пациента массой 72 кг на каталке массой 15 кг, придавая ускорение в  $0.60 \text{ м/с}^2$ .

- а) Определите работу, совершаемую медсестрой при прохождении ей дистанции в 2.5 м. Трение каталки не учитывается
- б) Какую дистанцию должна пройти медсестра, чтобы совершить работу в 140 Дж?



# Пример 1

a)

Определим силу, создаваемую медсестрой:

$$F = ma = (72 \text{ кг} + 15 \text{ кг})(0.60 \text{ м/с}^2) = 52 \text{ Н}$$

Работа медсестры равна произведению силы на перемещение:

$$W = Fd = (52 \text{ Н})(2.5 \text{ м}) = 130 \text{ Дж}$$

b)

$$W = Fd \Rightarrow d = \frac{W}{F} = \frac{140 \text{ Дж}}{52 \text{ Н}} = 2.7 \text{ м}$$

# Работа под углом к перемещению

Компонента силы в направлении перемещения –  $F \cos \theta$ .  
Это единственная компонента, совершающая работу.





# Работа под углом к перемещению

Если сила и перемещение сонаправлены, то

$$W = Fd \cos 0^\circ = Fd$$

Если направлены перпендикулярно, то

$$W = Fd \cos 90^\circ = 0$$

Таким образом, работа силы может быть объяснена двумя эквивалентными утверждениями:

1. Работа – это компонента силы в направлении перемещения, умноженная на величину перемещения.
2. Работа – это компонента перемещения в направлении силы, умноженная на величину силы.

# Работа под углом к перемещению

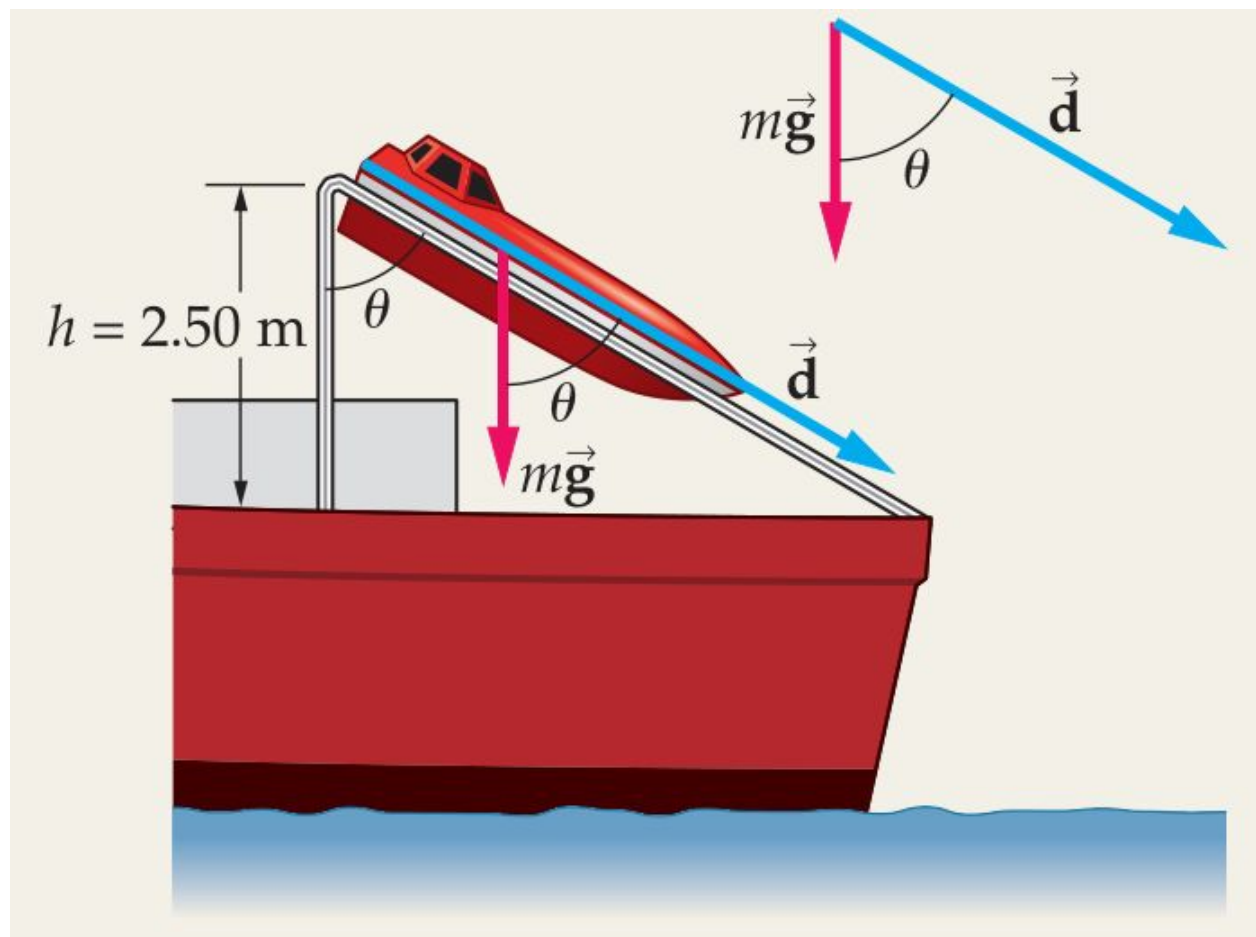
Работа может быть представлена как **скалярное произведение** между векторами  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{d}$ .

$$W = (\mathbf{F}, \mathbf{d}) = Fd \cos \theta$$

**Скалярное произведение векторов** – произведение длин этих векторов на косинус угла между ними.

# Пример 2

Спасательная лодка массой 4970 кг скользит по рампе длиной 5.00 м, затем падает с высоты 2.50 м. Определите работу силы гравитации над лодкой.



# Пример 2

1. Компонента  $F = mg$  в направлении движения:

$$F \cos \theta = (mg) \left( \frac{h}{d} \right) = 24400 \text{ Н}$$

2. Определим работу, умножая на расстояние:

$$W = (F \cos \theta) d = 122000 \text{ Дж}$$

3. Альтернатива: сократить расстояние до подстановки чисел:

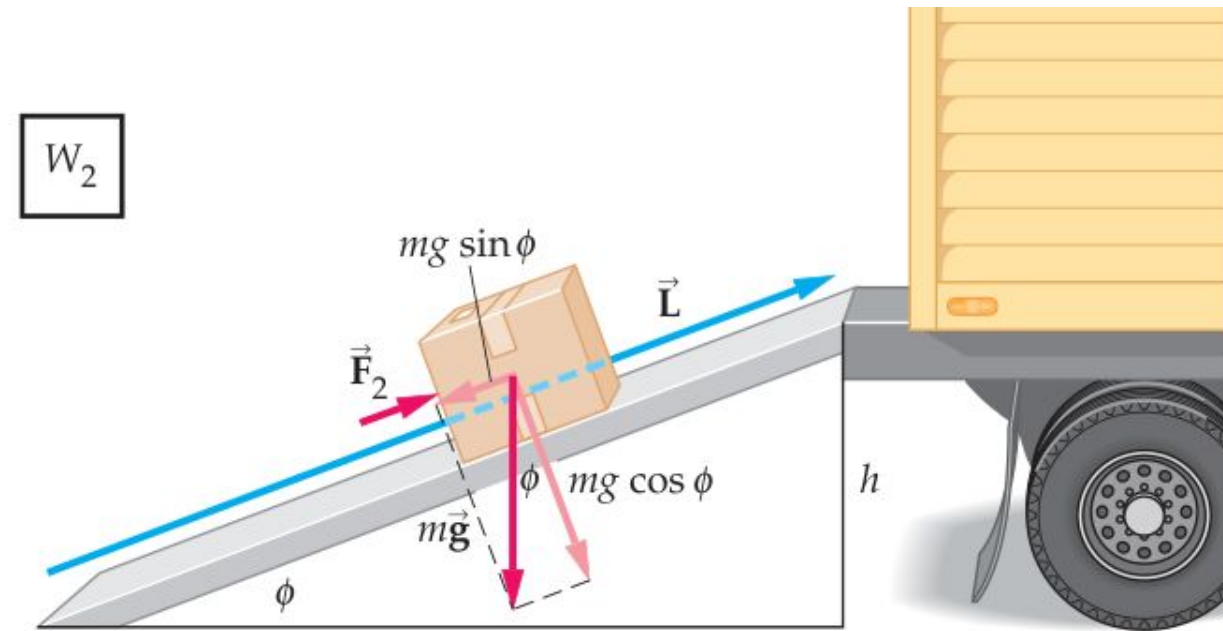
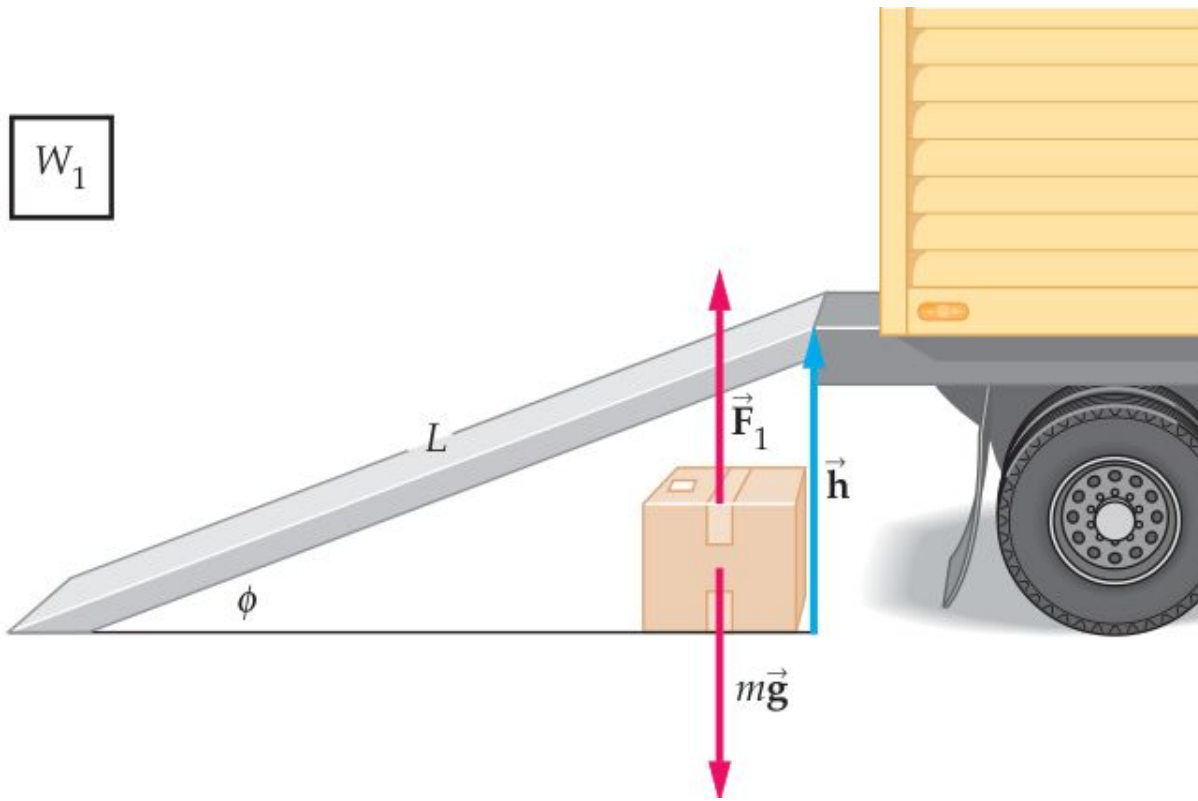
$$W = F \cos \theta d = mg \frac{h}{d} d = mgh = 122000 \text{ Дж}$$

Величина работы соответствует падению лодки с высоты  $h$ .

# Зависимость работы от пути

Вы хотите загрузить ящик в грузовик. Первый способ – поднять вертикально на высоту  $h$ , совершив работу  $W_1$ . Второй способ – протащить ящик по рампе длиной  $L$ , совершив работу  $W_2$ . Предполагая, что ящик скользит без трения, определите верное утверждение:

- a)  $W_1 < W_2$ , b)  $W_1 = W_2$ , c)  $W_1 > W_2$



# Зависимость работы от пути

Определим  $W_1$

$$F_1 = mg \Rightarrow W = mgh$$

Определим  $W_2$

$$W_2 = F_2 L$$

$$F_2 = mg \sin \phi, \text{ где } \sin \phi = h/L$$

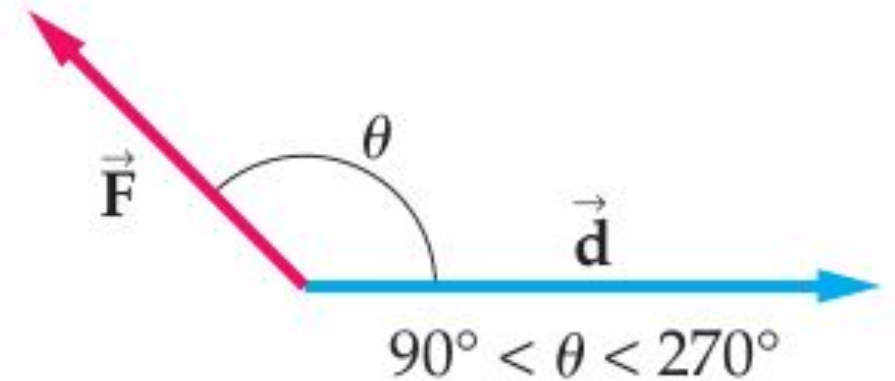
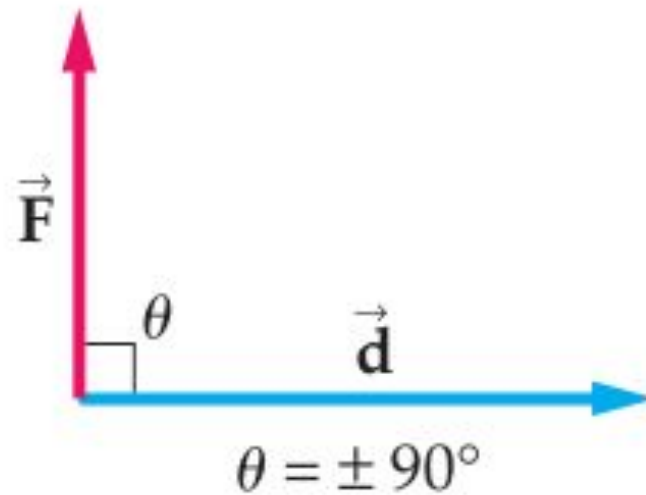
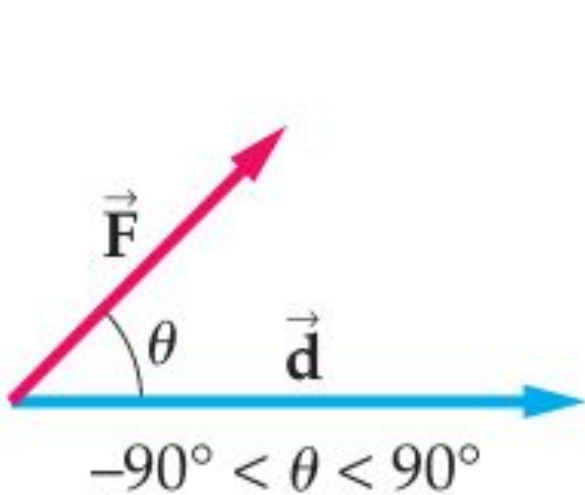
$$W_2 = (mg \sin \phi)L = (mg \sin \phi)L = (mg)(h/L)L = mgh = W_1$$

# Отрицательная работа и полная работа



Работа зависит от угла между силой  $\vec{F}$  и перемещением (или направлением движения)  $\vec{d}$ .  
Из данной зависимости следуют три возможности:

1. Работа положительна, если сила имеет компоненту в направлении движения ( $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ ).
2. Работа равна нулю, если сила не имеет компонент в направлении движения ( $\theta = \pm 90^\circ$ ).
3. Работа отрицательна, если сила имеет компоненту, противоположную направлению движения ( $90^\circ < \theta < 270^\circ$ ).



# Отрицательная работа и полная работа

Когда на тело действует более одной силы, полная работа – сумма работ, совершенных каждой силой в отдельности. Таким образом, если сила  $F_1$  совершает работу  $W_1$ , сила  $F_2$  совершает работу  $W_2$  и так далее, полная работа

$$W_{\text{полн}} = W_1 + W_2 + W_3 + \dots = \sum W$$

Эквивалентно, полная работа может быть рассчитана определением полной силы  $F_{\text{полн}}$ , и используя определение работы:

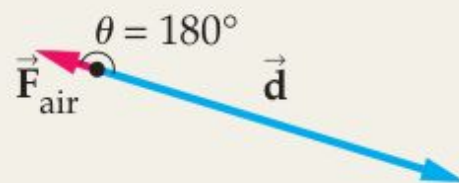
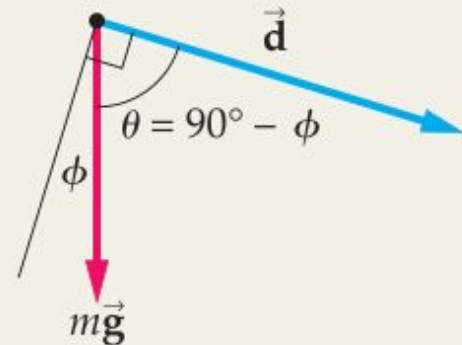
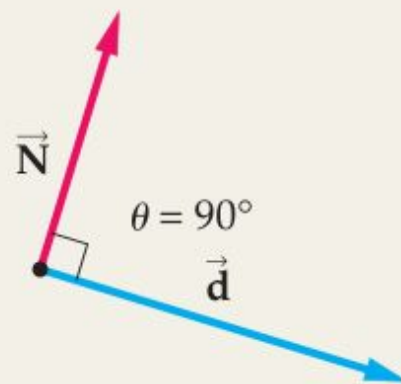
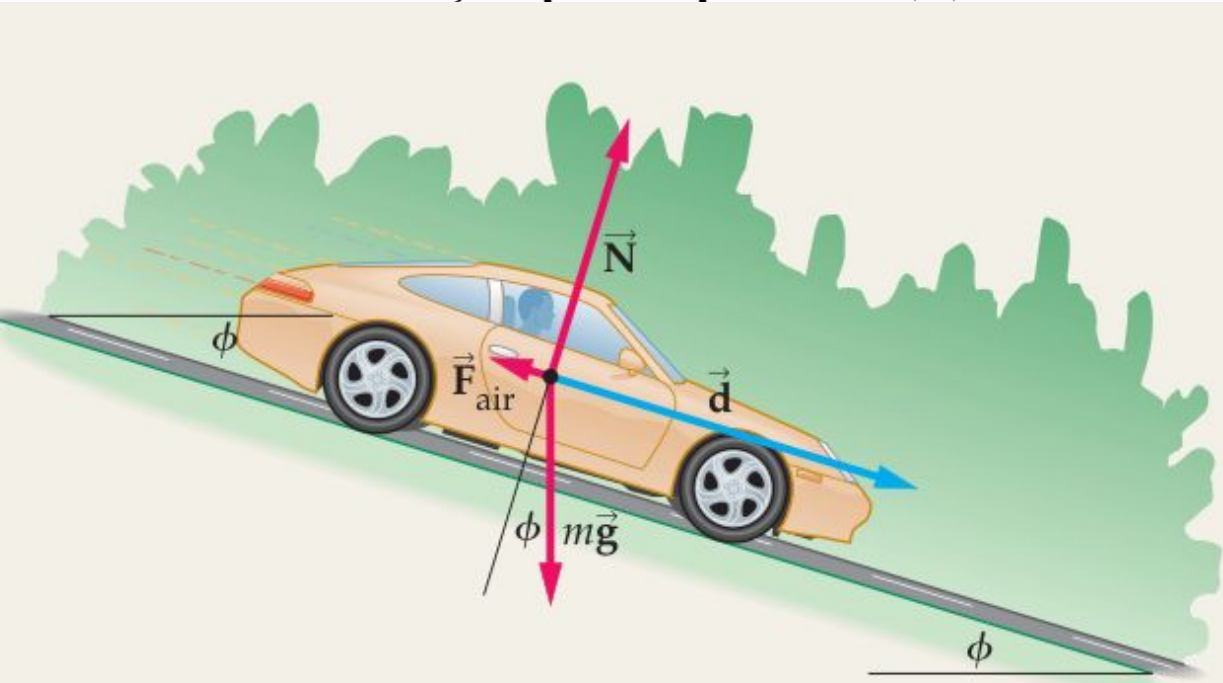
$$W_{\text{полн}} = (F_{\text{полн}} \cos \theta) d = F_{\text{полн}} d \cos \theta$$

Здесь  $\theta$  – угол между  $F_{\text{полн}}$  и перемещением  $d$ .



# Пример 3

Автомобиль массой  $m$  съезжает с горы, под наклоном  $\phi$  под горизонтом. На автомобиль действуют три силы: 1. Нормальная сила  $N$ , создается дорогой. 2. Сила сопротивления воздуха. 3. Сила гравитации,  $mg$ . Найдите полную работу сил, действующих на автомобиль, при прохождении им расстояния  $d$ .



# Пример 3

Рассчитаем работу каждой силы по определению  $W = Fd \cos \theta$ , где  $\theta$  – угол между данной силой и перемещением  $d$ . Полная работа – сумма работ, совершенных каждой из трех сил.

1. Работа нормальной силы  $N$

$$W_N = Nd \cos \theta = Nd \cos 90^\circ = 0$$

2. Работа силы сопротивления воздуха, угол  $\theta = 180^\circ$

$$W_{air} = F_{air}d \cos 180^\circ = -F_{air}d$$

3. Работа силы гравитации, угол  $\theta = 90^\circ - \phi$ . Из тригонометрии известно, что  $\cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi$

$$W_{mg} = mgd \cos(90^\circ - \phi) = mgd \sin \phi$$

4. Полная работа есть сумма частных:

$$W_{\text{полн}} = W_N + W_{air} + W_{mg} = 0 - F_{air}d + mgd \sin \phi$$

# Пример 3



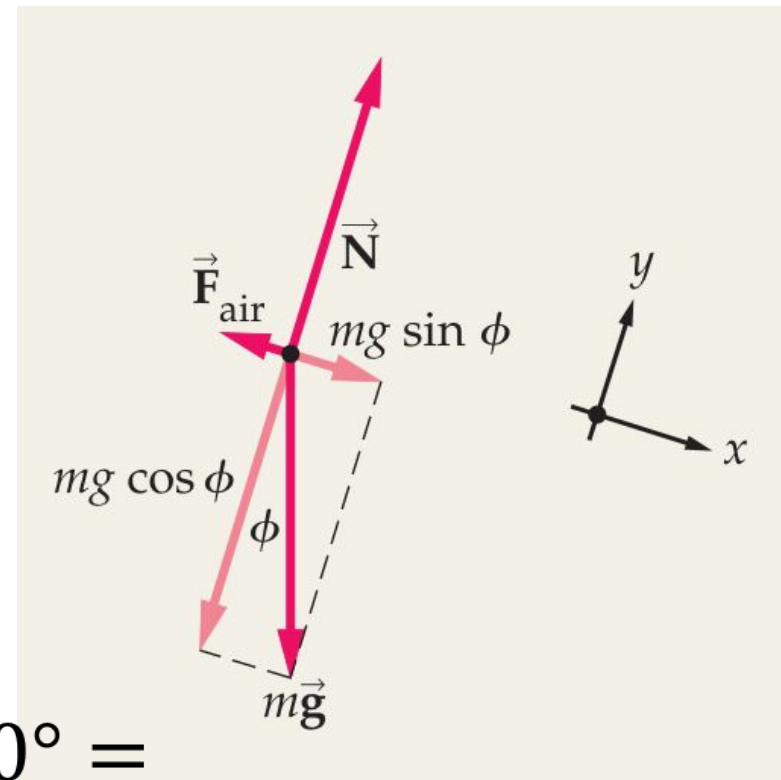
Аналогично рассчитаем полную работу через полную силу, используя определение  $W_{\text{полн}} = F_{\text{полн}} d \cos \theta$

1. Величина полной силы:

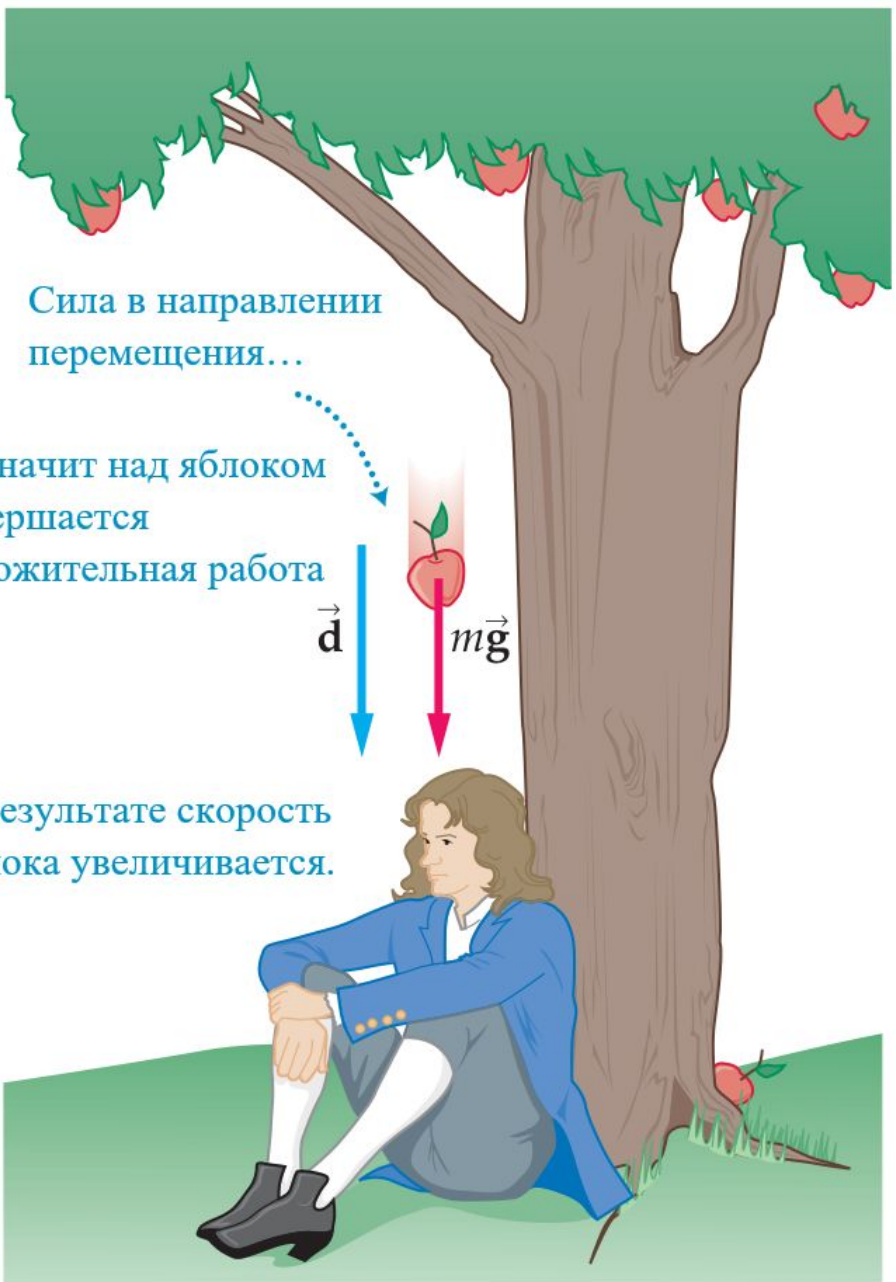
$$F_{\text{полн}} = mg \sin \phi - F_{\text{air}}$$

2. Направление  $F_{\text{полн}}$  совпадает с направлением перемещения  $d$ , следовательно  $\theta = 0^\circ$ . Определяем  $W_{\text{полн}}$

$$W_{\text{полн}} = F_{\text{полн}} d \cos \theta = (mg \sin \phi - F_{\text{air}}) d \cos 0^\circ = mgd \sin \phi - F_{\text{air}} d$$

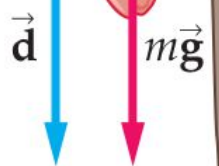


# Кинетическая энергия и теорема работы-энергии



Сила в направлении перемещения...

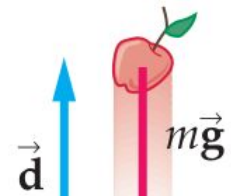
... значит над яблоком совершается положительная работа



В результате скорость яблока увеличивается.



Над яблоком совершается отрицательная работа...



... и его скорость уменьшается.

# Кинетическая энергия и теорема работы-энергии

Пусть яблоко массой  $m$  падает в воздухе. На него действуют две силы: сила гравитации  $mg$  и сила сопротивления воздуха  $F_{air}$ .

Полная сила придает яблоку постоянное ускорение вниз:

$$a = \frac{F_{\text{полн}}}{m}$$

Если начальная скорость яблока  $v_H$ , конечная  $v_K$ , то из кинематики движения с постоянным ускорением:

$$v_K^2 = v_H^2 + 2ad \Rightarrow 2ad = v_K^2 - v_H^2$$

Подставляем ускорение:

$$2 \frac{F_{\text{полн}}}{m} d = v_K^2 - v_H^2 \Rightarrow F_{\text{полн}} d = W_{\text{полн}} = \frac{1}{2} m v_K^2 - \frac{1}{2} m v_H^2 \quad \text{— полная работа над яблоком.}$$

# Кинетическая энергия и теорема работы-энергии

**Кинетическая энергия  $E_k$**  – энергия, которой обладает тело при движении.

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Измеряется в джоулях, скалярная величина.

**Кинетическая энергия неотрицательна.**

**Типичные значения кинетической энергии**

Источник	Приближенная кинетическая энергия, Дж
Человек на скорости ходьбы	

## Теорема работы-энергии (теорема о кинетической энергии системы):

Изменение кинетической энергии системы равно работе всех внутренних и внешних сил, действующих на тело.

**ИЛИ**

Полная работа, совершенная над телом равна изменению его кинетической энергии:

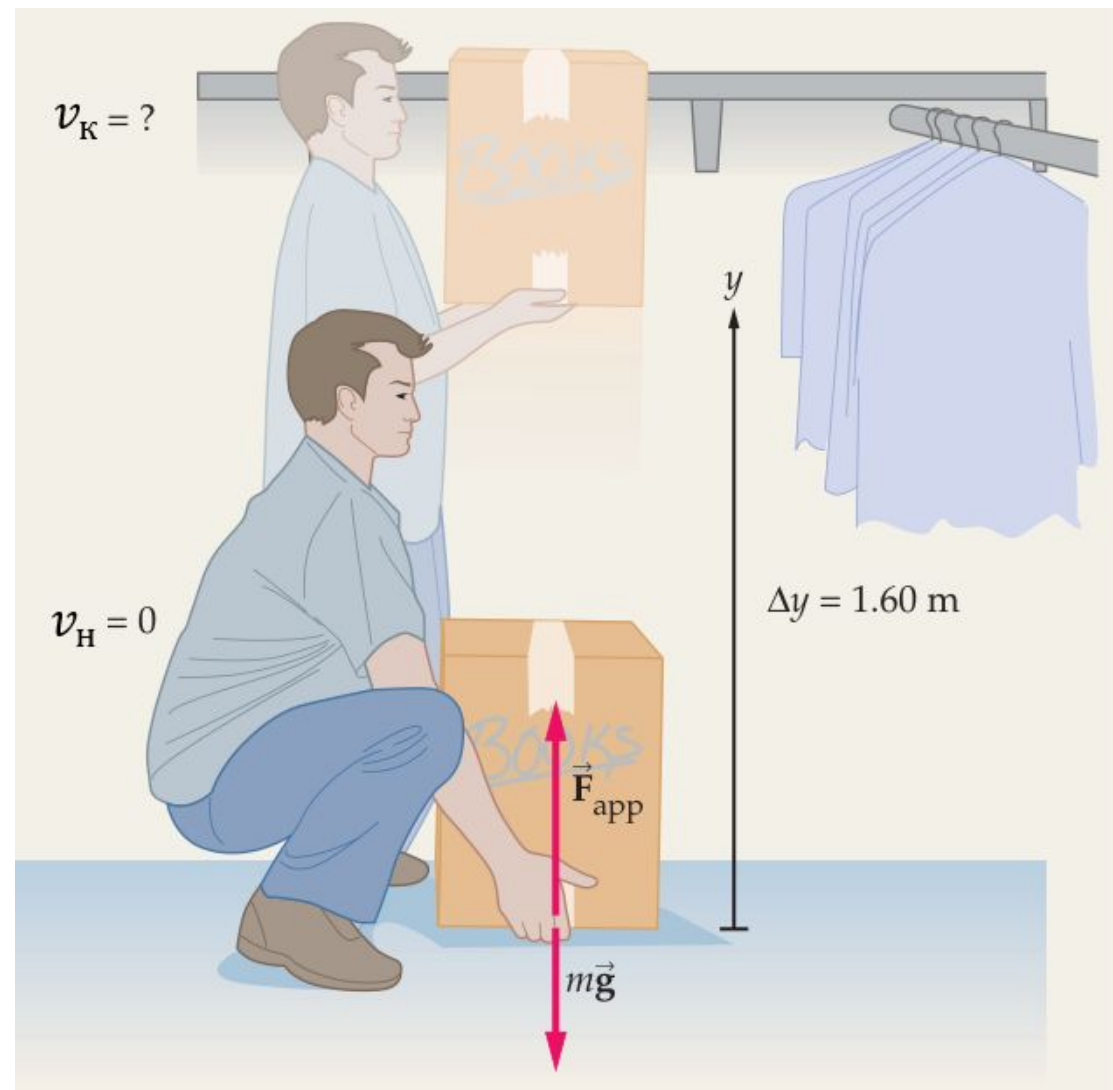
$$W_{\text{полн}} = \Delta E_k = \frac{1}{2} m v_{\text{к}}^2 - \frac{1}{2} m v_{\text{н}}^2$$

# Пример 4



Ящик с книгами массой  $4.10$  кг поднимается вертикально вверх из состояния покоя на расстояние  $1.60$  м с постоянной силой вверх  $52.7$  Н. Найдите:

- а) Работу приложенной силы
- б) Работу силы гравитации
- с) Конечную скорость ящика







a)

Определим работу приложенной силы.  $\theta = 0^\circ$ , расстояние  $\Delta y = 1.60$  м

$$W_{app} = F_{app} \cos \theta \Delta y = 84.3 \text{ Дж}$$

b)

Определим работу силы гравитации.  $\Delta y = 1.60$  м, но угол  $\theta = 180^\circ$

$$W_g = mg \cos 180^\circ \Delta y = -64.4 \text{ Дж}$$

c)

Полная работа над ящиком  $W_{\text{полн}}$  есть сумма всех работ:

$$W_{\text{полн}} = W_{app} + W_g = 19.9 \text{ Дж}$$

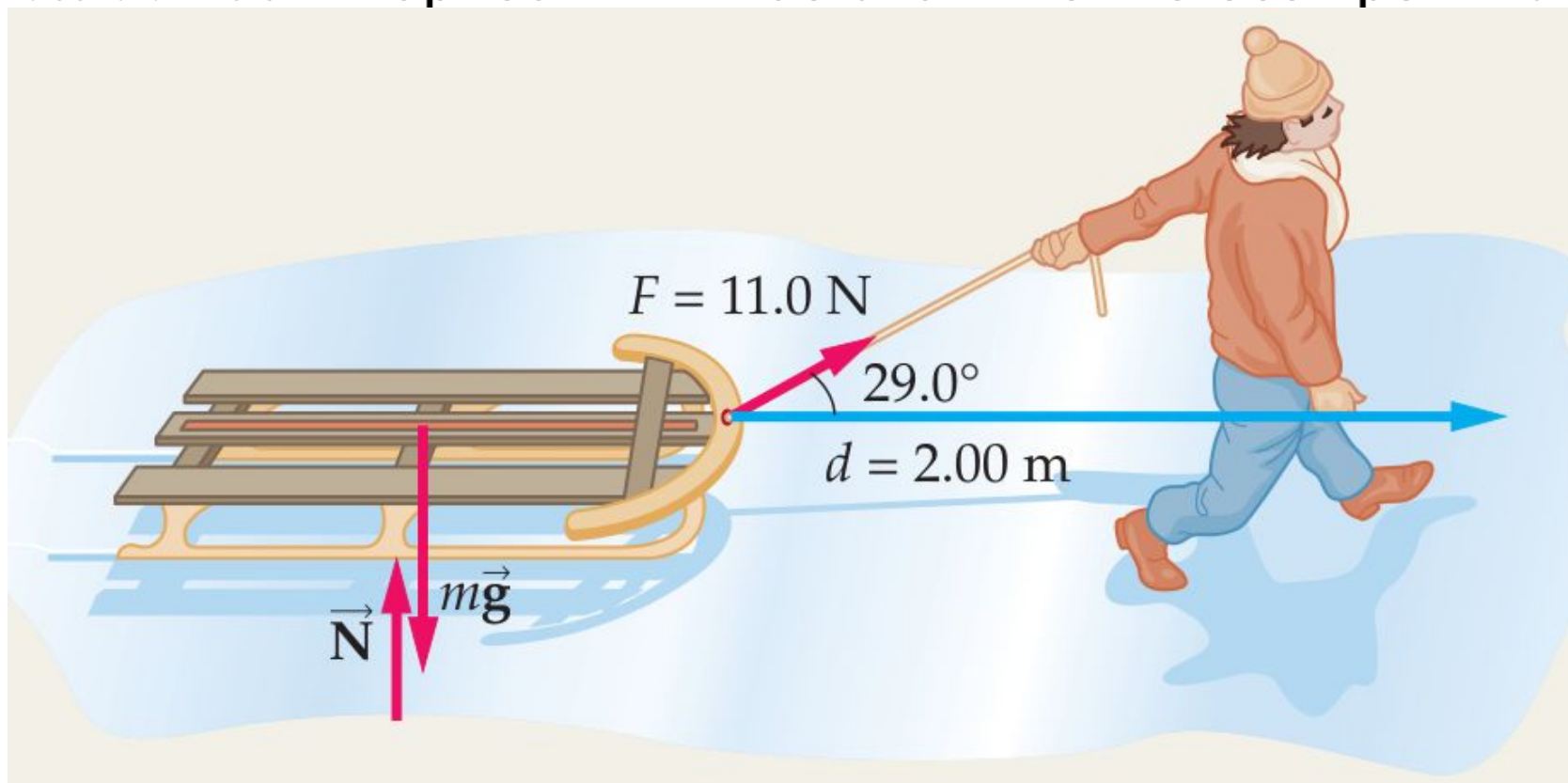
Для определения конечной скорости ящика используем теорему о кинетической энергии системы:

$$W_{\text{полн}} = \frac{1}{2} m v_{\text{к}}^2 - \frac{1}{2} m v_{\text{н}}^2 = \frac{1}{2} m v_{\text{к}}^2 \Rightarrow v_{\text{к}} = \sqrt{\frac{2W_{\text{полн}}}{m}} = 3.12 \text{ м/с}$$

# Пример 5

Мальчик прилагает силу  $11.0\text{ Н}$  под углом в  $29^\circ$  к горизонту на сани массой  $6.40\text{ кг}$ . Найти:

- Работу, совершенную мальчиком
- Конечную скорость саней после  $2.00$  метров, предполагая начальную скорость  $0.500\text{ м/с}$  и горизонтальное скольжение без трения.





a)

Работа, совершенная мальчиком есть  $Fd \cos \theta$

$$W_M = Fd \cos \theta = 19.2 \text{ Дж} = W_{\text{ПОЛН}}$$

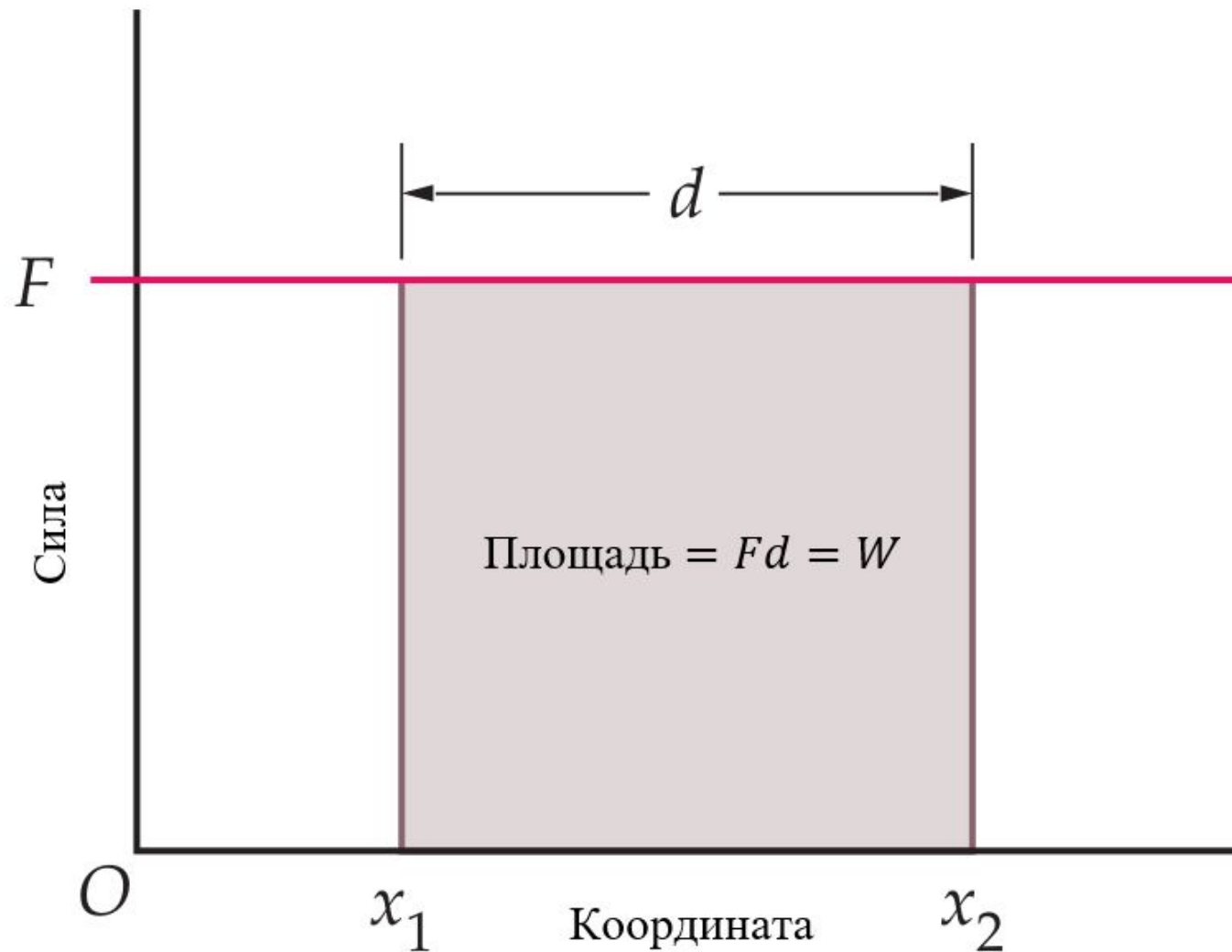
b)

Используем теорему о кинетической энергии системы чтобы найти конечную скорость:

$$W_{\text{ПОЛН}} = \Delta E_k = \frac{1}{2} m v_K^2 - \frac{1}{2} m v_H^2 \Rightarrow v_K = \sqrt{\frac{2W_{\text{ПОЛН}}}{m} + v_H^2} = 2.50 \text{ м/с}$$

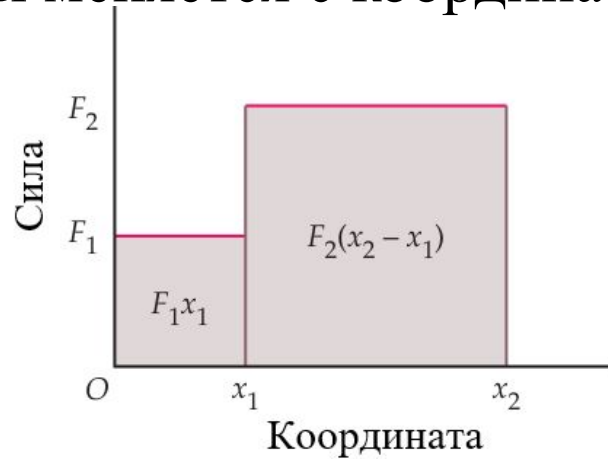
# Работа, совершенная переменной силой

Если сила постоянна, работа может быть представлена графически:

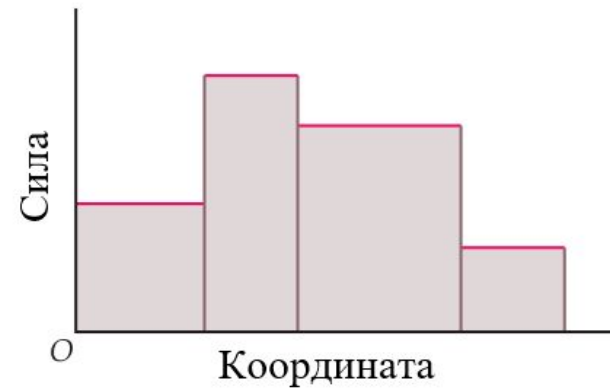


# Работа, совершенная переменной силой

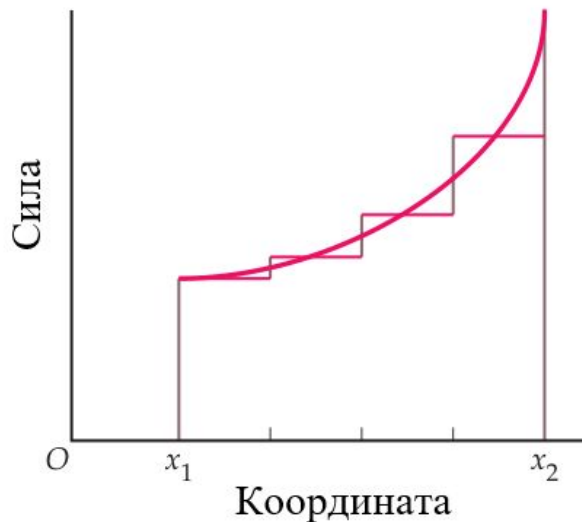
Если величина силы меняется с координатой, силу можно аппроксимировать (приблизить) кривой:



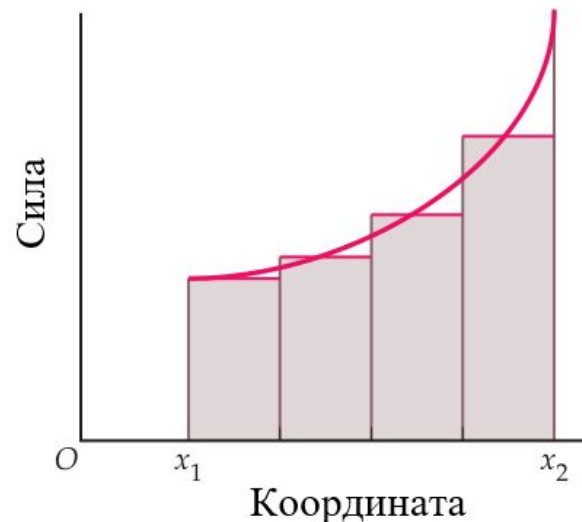
(a)



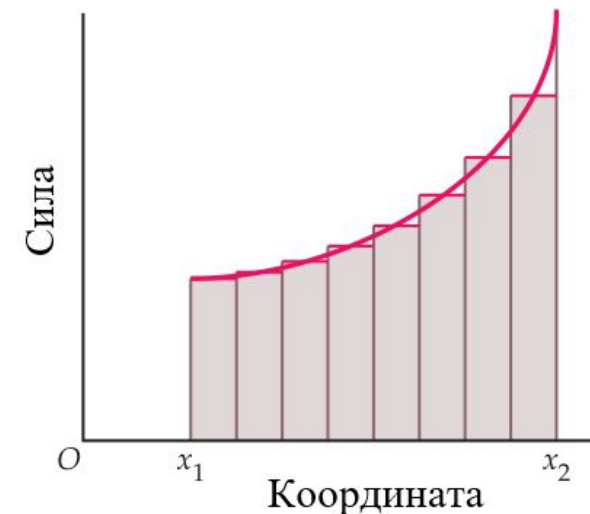
(b)



(a) Аппроксимируем непрерывную силу



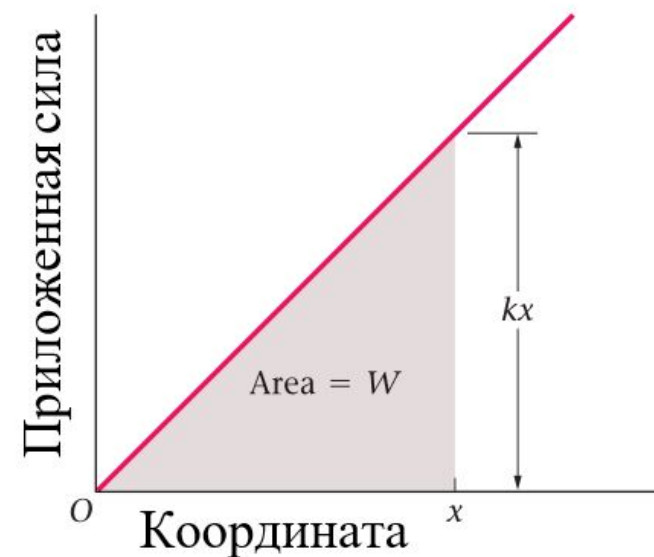
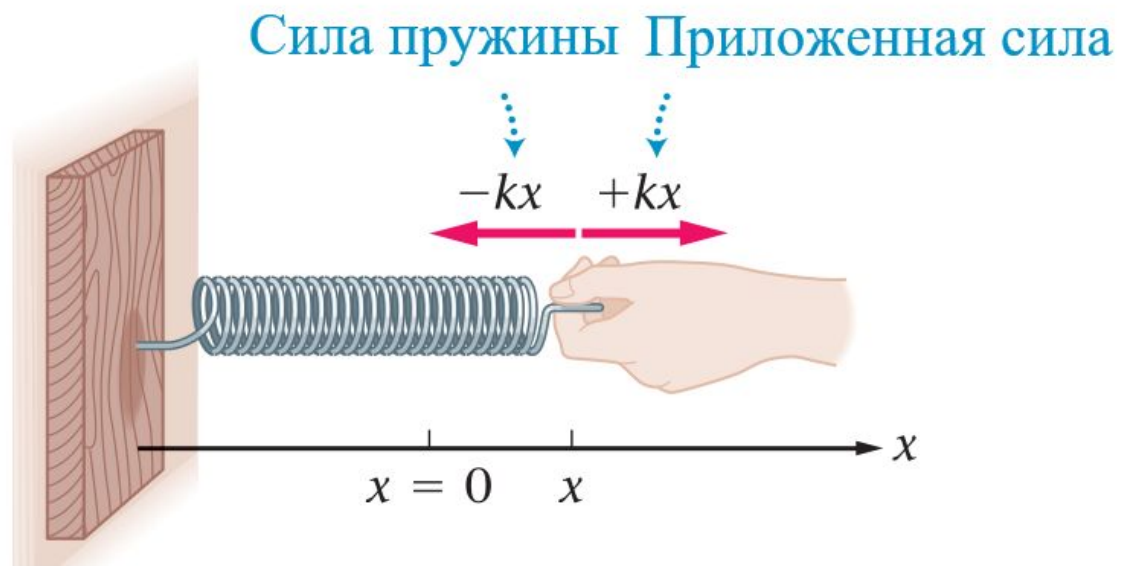
(b) Аппроксимируем работу непрерывной силы



(c) Улучшенная аппроксимация

Работа по растяжению или сжатию пружины на расстояние  $x$  из равновесия:

$$W = \frac{1}{2} kx^2$$

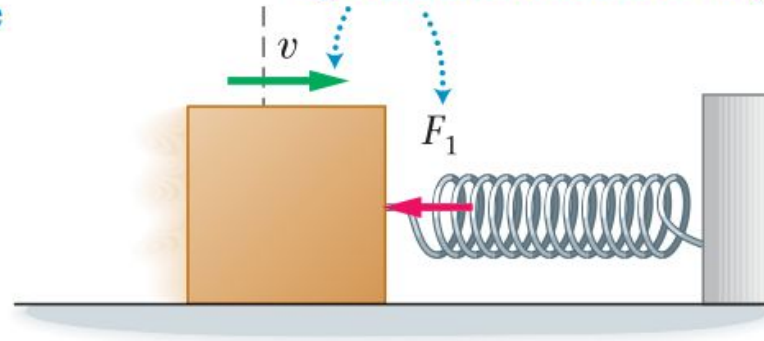


Начальная скорость блока  $v_0$

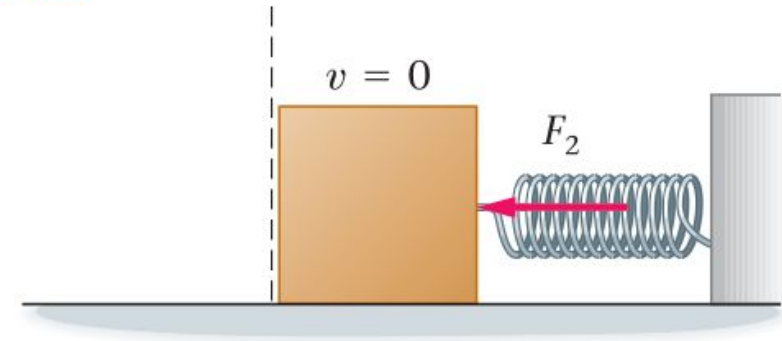


(a)

Пружина совершает отрицательную работу над блоком – сила и перемещение противоположно направлены



(b)



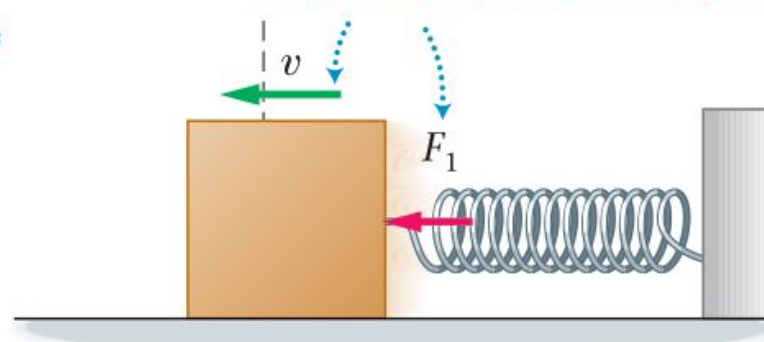
(c)

Конечная скорость блока  $v_0$

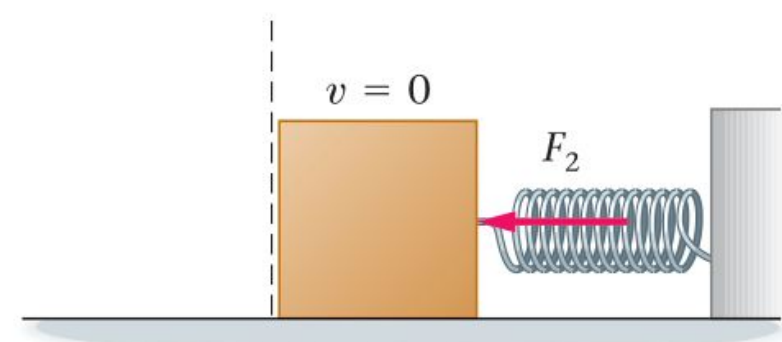


(f)

Пружина совершает положительную работу над блоком – направления силы и перемещения совпадают



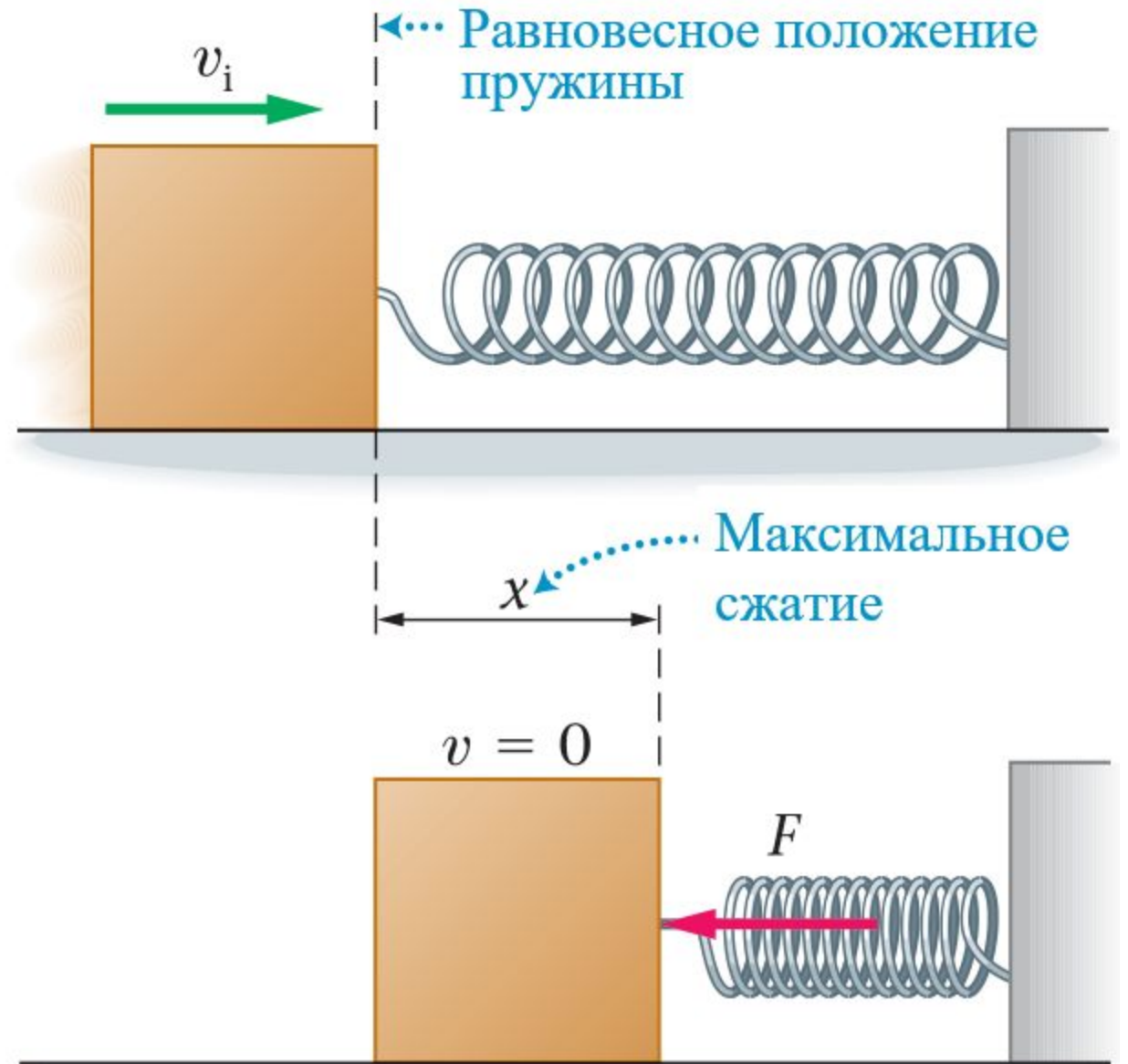
(e)



(d)

# Пример 6

Блок массой  $1.5 \text{ кг}$  с начальной скоростью  $v_{\text{н}} = 2.2 \text{ м/с}$  скользит без трения по горизонтальной поверхности, приходя в контакт с пружиной. Пружина сжимается из состояния равновесия до полной остановки блока. Определите максимальное сжатие пружины, предполагая ее коэффициент жесткости  $k = 475 \text{ Н/м}$ .





## Пример 6



1.

Определим начальную и конечную кинетическую энергию блока:

$$E_{кн} = \frac{1}{2} m v_{н}^2 = 3.6 \text{ Дж}$$

$$E_{кк} = 0$$

2.

Изменение кинетической энергии блока:

$$\Delta E_k = E_{кк} - E_{кн} = -3.6 \text{ Дж}$$

3.

Отрицательная работа пружины равна отрицательному изменению кинетической энергии блока:

$$-\frac{1}{2} k x^2 = \Delta E_k = -3.6 \text{ Дж}$$

Отсюда

$$x = \sqrt{-\frac{2\Delta E_k}{k}} = 0.12 \text{ м}$$

# Мощность

Мощность – мера того, как быстро выполняется работа.

Пусть работа  $W$  выполняется за время  $t$ . Средняя мощность за данное время:

$$P = \frac{W}{t}$$

Единица измерения Ватт (Вт)

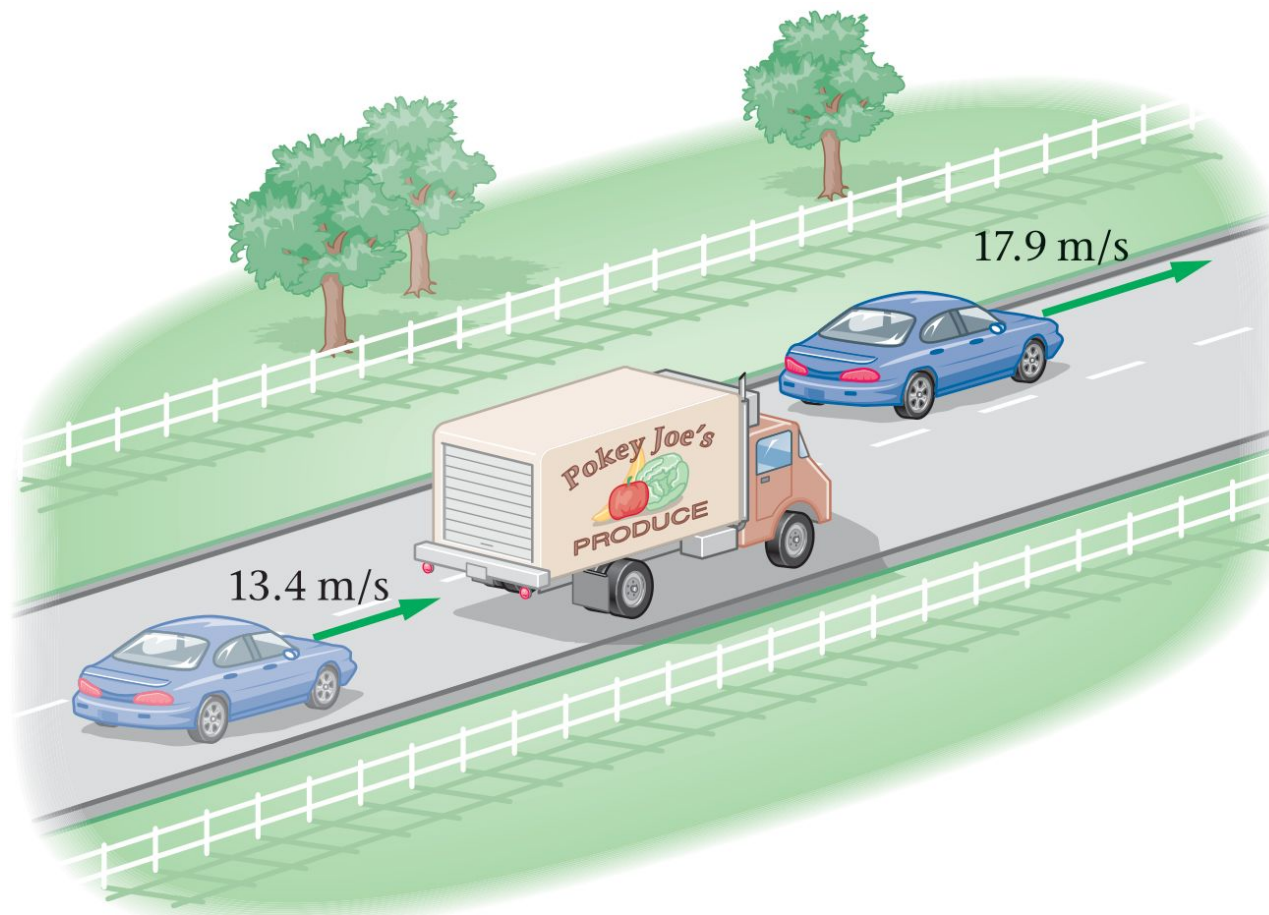
$$1 \text{ Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3}$$

1 лошадиная сила:

$$1 \text{ л. с.} = 746 \text{ Вт}$$

# Пример 7

Для обгона медленного грузовика автомобилю необходимо разогнаться с  $13.4 \text{ м/с}$  до  $17.9 \text{ м/с}$  за  $3 \text{ с}$ . Какова минимальная мощность для такого маневра? Масса автомобиля  $1.30 \cdot 10^3 \text{ кг}$ .



# Пример 7



1.

Определим изменение кинетической энергии:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v_K^2 - \frac{1}{2} m v_H^2 = 9.16 * 10^4 \text{ Дж}$$

2.

Воспользуемся теоремой о К. Э. системы и разделим на время, чтобы определить мощность:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\Delta E_k}{t} = 3.05 * 10^4 \text{ Вт} = 40.9 \text{ л. с.}$$

Реальная мощность должна быть больше из-за трения.

# СВЯЗЬ МОЩНОСТИ СО СКОРОСТЬЮ

Рассмотрим тело, движущееся с постоянной скоростью  $v$ .

Если тело проходит расстояние  $d$ , то работа и мощность двигателя

$$W = Fd \Rightarrow P = \frac{W}{t} = \frac{Fd}{t}$$

Поскольку скорость постоянна

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow P = F \left( \frac{d}{t} \right) = Fv$$

- Сила в направлении движения: работа равна силе умноженной на расстояние ( $W = Fd$ )
- Сила под углом к движению: работа равна компоненте силы в направлении движения умноженной на расстояние [ $W = (F \cos \theta)d$ ]
- Отрицательная и полная работа: работа отрицательна, если сила направлена против движения; полная работа есть сумма работ каждой силы
- Кинетическая энергия:  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$
- Теорема о кинетической энергии системы:  $W_{\text{полн}} = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv_{\text{к}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{н}}^2$

- Работа переменной силы равна площади под кривой силы
- Работа по сжатию и растяжению пружины на расстояние  $x$  от равновесия:  $W = \frac{1}{2} kx^2$
- Средняя мощность – работа, деленная на время её выполнения:  
 $P = \frac{W}{t}$
- При движении с постоянной скоростью  $P = Fv$

# Спасибо за внимание!

