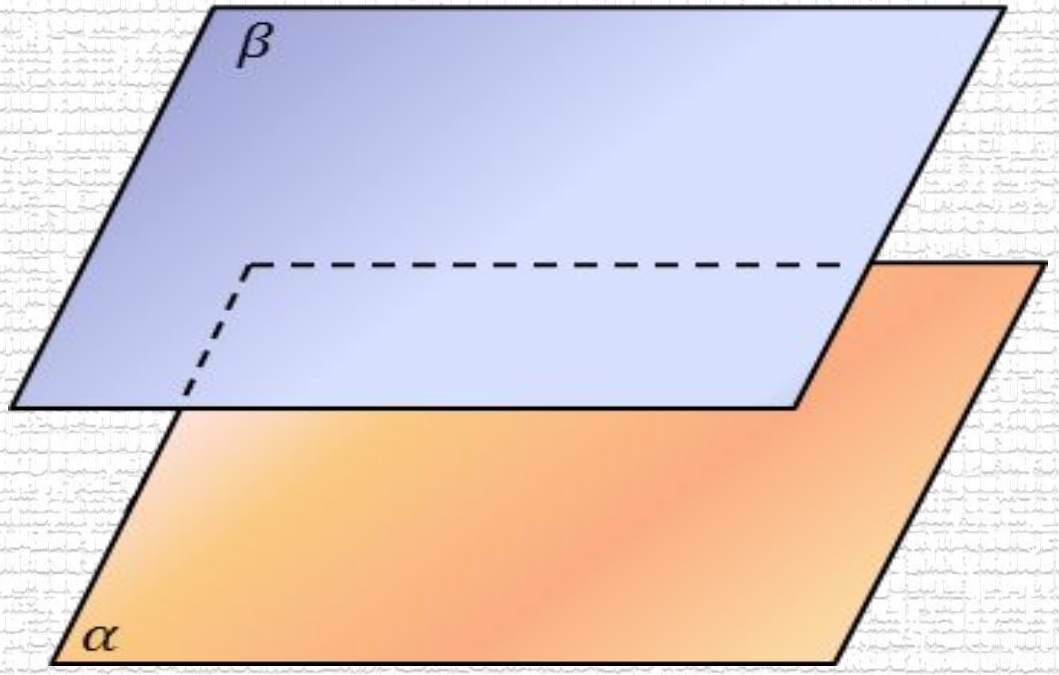
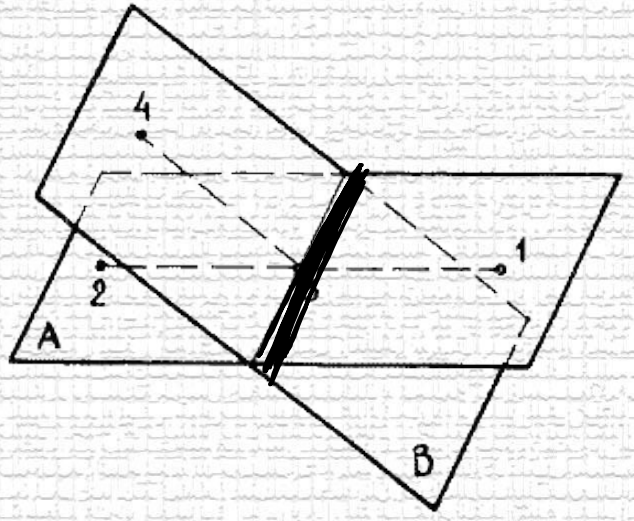
Взаимное расположение плоскостей. Параллельные плоскости



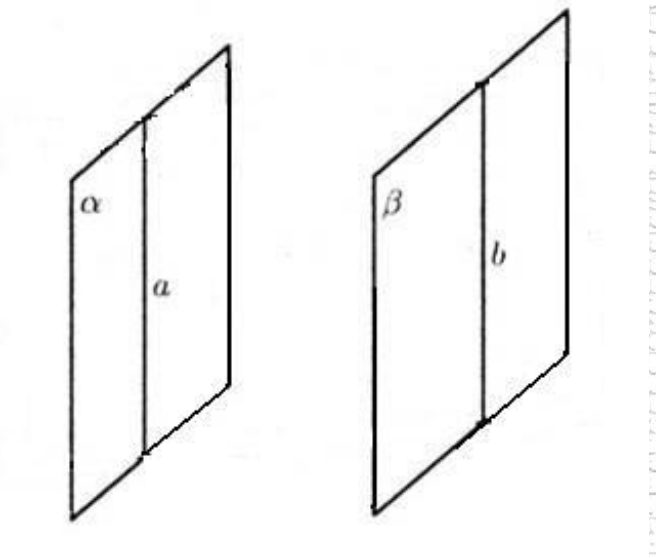
Пересекающиеся плоскости

Плоскости называются пересекающимися, если они имеют общие точки



Параллельные плоскости

Плоскости, не имеющие общих точек, называются параллельными



Теорема. Признак параллельности плоскостей

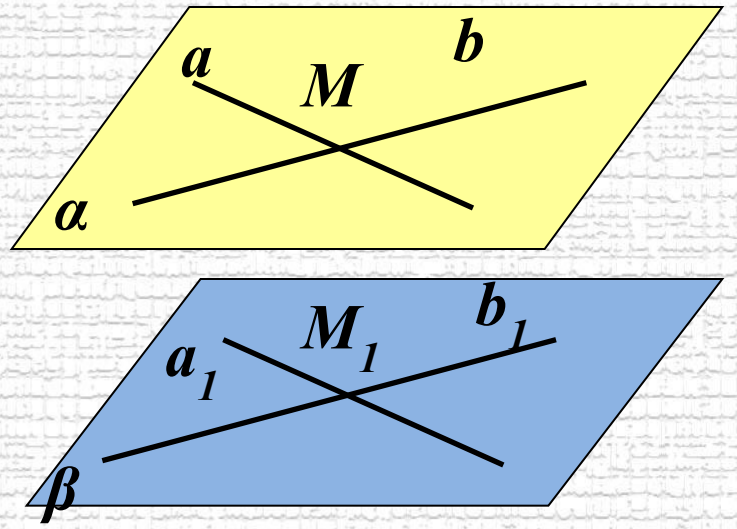
Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Дано: $a \cap b = M;\ a \in \alpha;\ b \in \alpha$

$a_1 \cap b_1 = M_1;\ a_1 \in \beta;\ b_1 \in \beta$

$a \parallel a_1;\ b \parallel b_1$

Доказать: $\alpha \parallel \beta$



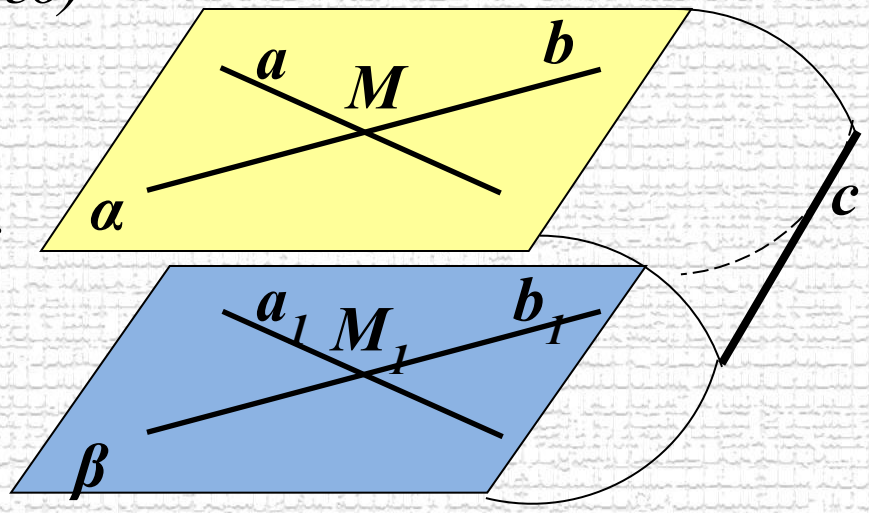
Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

По признаку параллельности прямой и плоскости $a \parallel \beta$ и $b \parallel \beta$.

Доказательство: *(от противного)*

Пусть $\alpha \cap \beta = c$

1) *Тогда* $a \parallel \beta$, *т.к.* $\boldsymbol{a \parallel a_1,\ a_1 \in \beta}$
   $a \in \alpha$; $\alpha \cap \beta = c$, *значит* $a \parallel c$.
2) $b \parallel \beta$, *т.к.* $\boldsymbol{b \parallel b_1,\ b_1 \in \beta}$
   $b \in \alpha$ $\alpha \cap \beta = c$, *значит* $b \parallel c$.
3) *Имеем* $a \parallel b$, *то есть через точку M проходят* ***две прямые a и b, параллельные прямой c.***

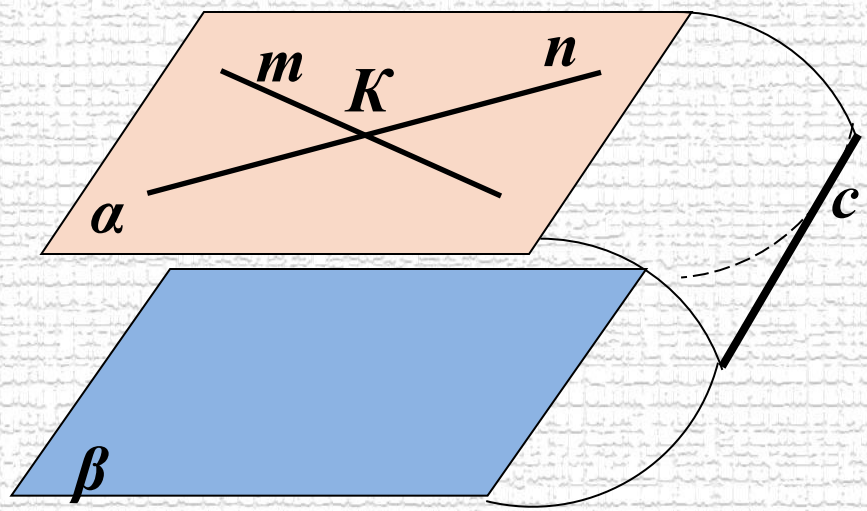


Получили противоречие. Значит, $\boldsymbol{\alpha \parallel \beta}$.

Задача №1.

Дано: $m \cap n = K$, $m \in \alpha$, $n \in \alpha$,
$m \parallel \beta$, $n \parallel \beta$.

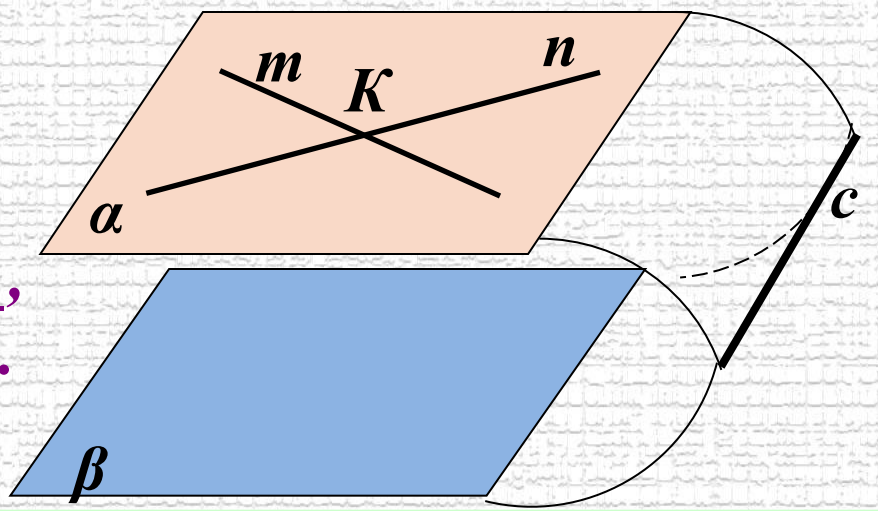
Доказать: $\alpha \parallel \beta$.



Задача №1.

Дано: $m \cap n = K$, $m \in \alpha$, $n \in \alpha$,
$m \parallel \beta$, $n \parallel \beta$.

Доказать: $\alpha \parallel \beta$.



1) Допустим, что $\alpha \cap \beta = c$

2) Так как $n \parallel \beta$, $m \parallel \beta$,
то $m \parallel c$ и $n \parallel c$.

3) Получаем, что через точку K проходят две прямые параллельные прямой c.

Вывод: $\alpha \parallel \beta$

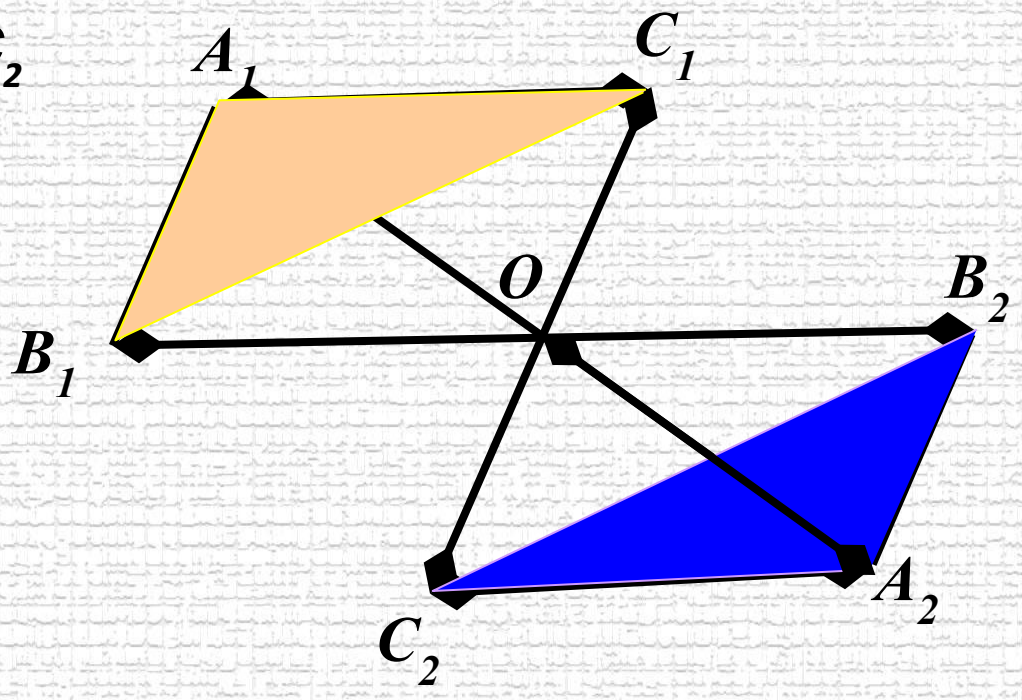
Задача №2.

Дано: отрезки A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2

$O \in A_1A_2$; $O \in B_1B_2$; $O \in C_1C_2$

$A_1O = OA_2$; $B_1O = OB_2$; $C_1O = OC_2$

Доказать: $A_1B_1C_1 \parallel A_2B_2C_2$



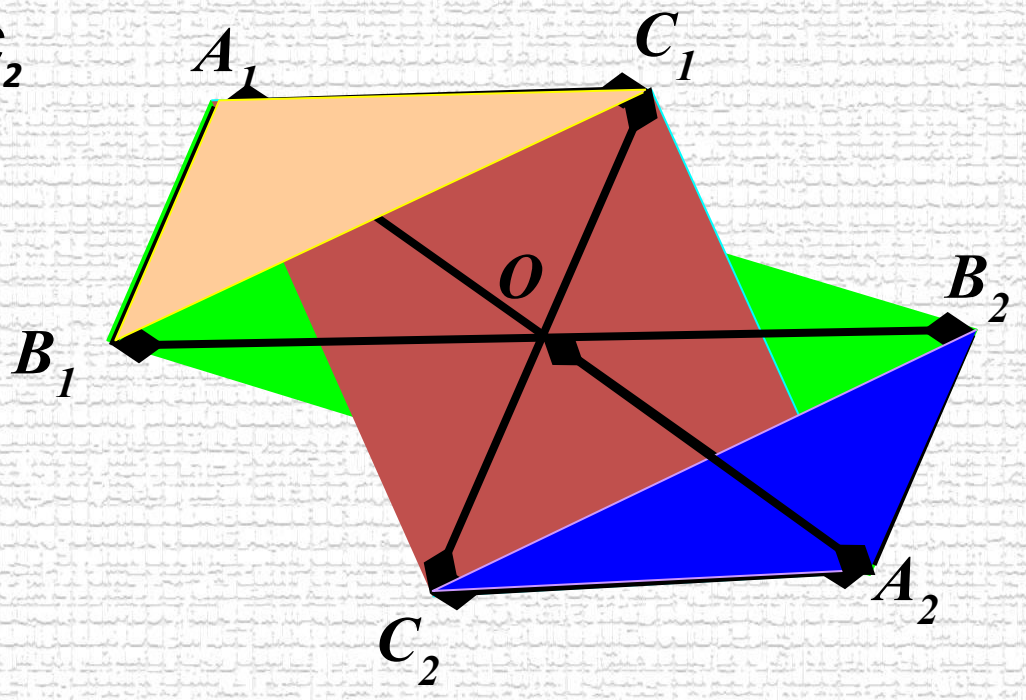
Задача № 2.

Дано: отрезки A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2

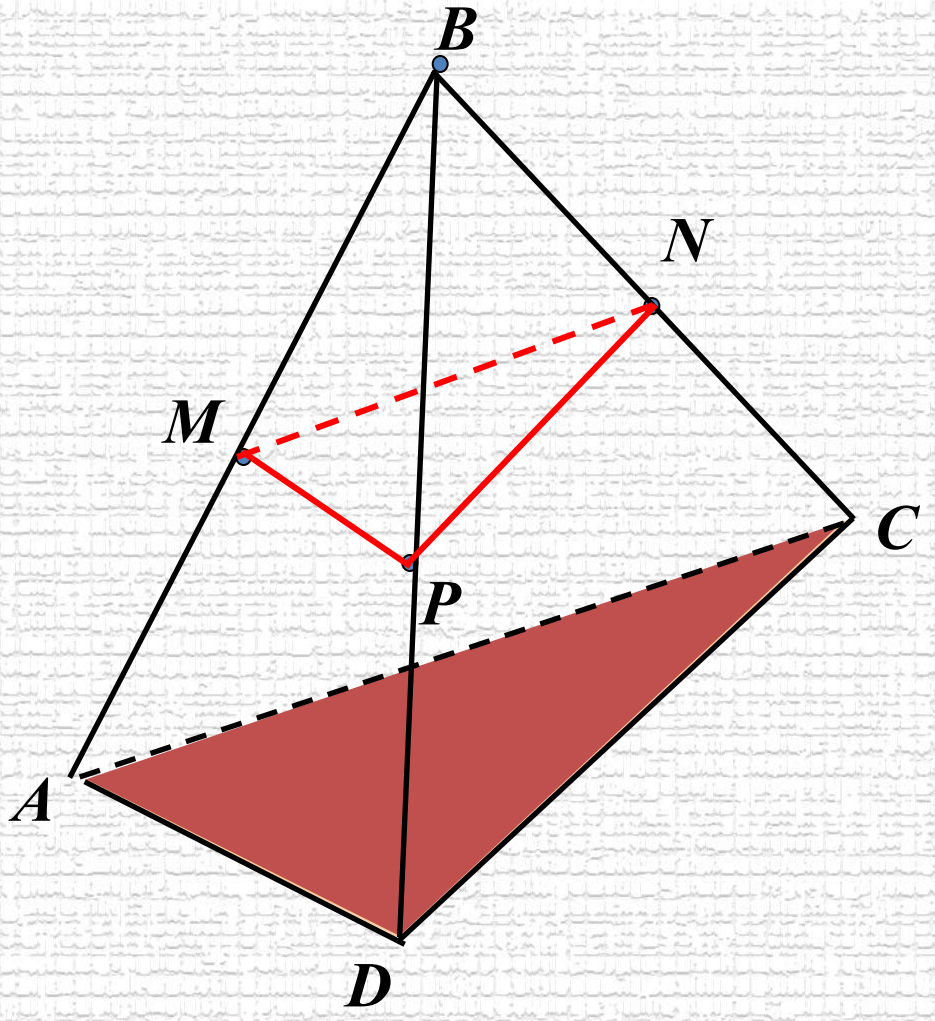
$O \in A_1A_2$; $O \in B_1B_2$; $O \in C_1C_2$

$A_1O = OA_2$; $B_1O = OB_2$; $C_1O = OC_2$

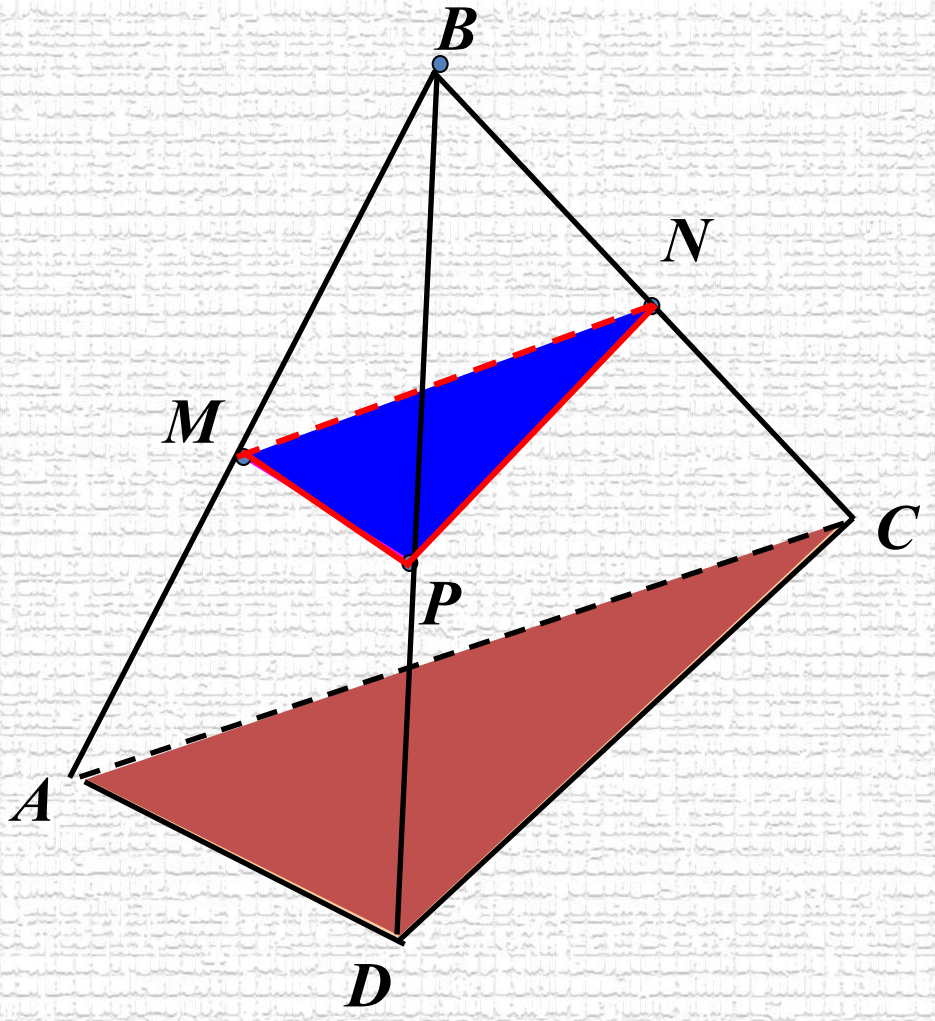
Доказать: $A_1B_1C_1 \parallel A_2B_2C_2$



Задача № 3.



Задача № 3.



Проверка знаний

- Могут ли прямая и плоскость не иметь общих точек?

Да

- Верно ли, что если две прямые не пересекаются, то они параллельны?

Нет

- Плоскости α и β параллельны, прямая n лежит в плоскости α. Верно ли, что прямая n параллельна плоскости β?

Да

- Верно ли, что если прямая a параллельна одной из двух параллельных плоскостей, с другой плоскостью прямая a имеет одну общую точку?

Нет

- Верно ли, что плоскости параллельны, если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна другой плоскости?

Нет

Решение задач

№ 1 На рисунке 1 плоскости α и β пересекаются по прямой EF. Прямая AB лежит в плоскости α. В плоскости β через точку C проведите прямую так, чтобы она:
1) пересекала прямую AB;
2) была скрещивающейся с прямой AB;
3) была параллельна прямой AB.

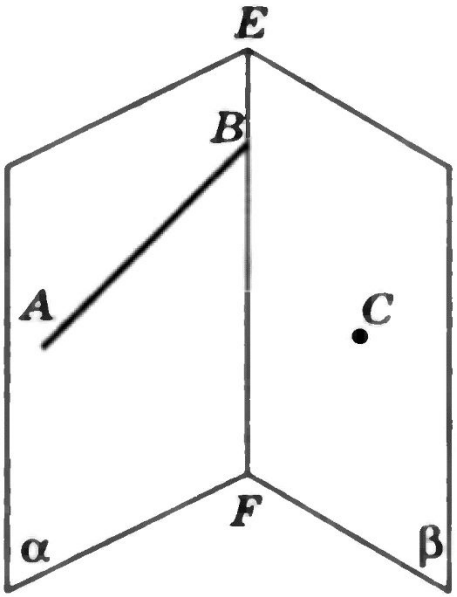


Рис. 1

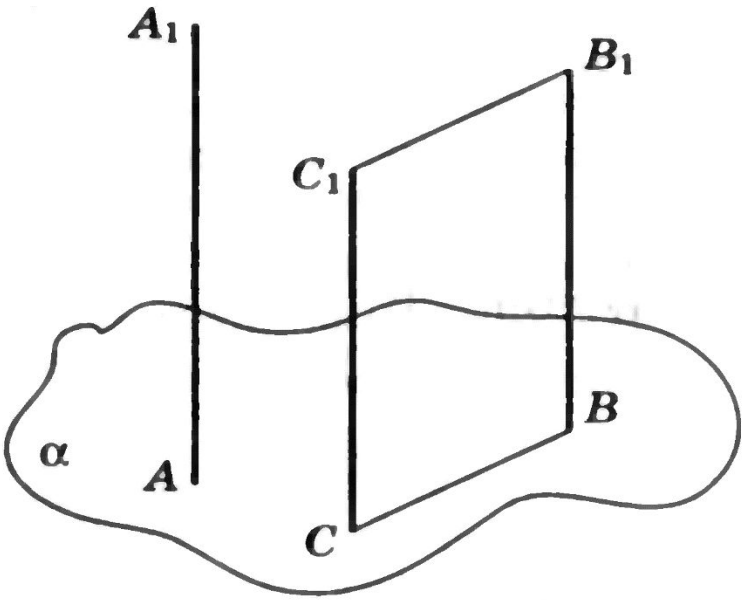


Рис. 2

№ 2 На рисунке 2 $AA_1 \parallel CC_1$, $AA_1 \parallel BB_1$, $BB_1 = CC_1$. Докажите, что $B_1C_1 = BC$.

Решение задач

№ 3 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F принадлежат сторонам AB и CD, причем $BE : EA = CF : FD$. Через эти точки проведена плоскость α. Докажите, что $BC \parallel \alpha$.

№ 4 Прямая a параллельна плоскости α. Через прямую a проведена плоскость β, пересекающая плоскость α по прямой b. В плоскости α существует прямая c, которая параллельна a. Докажите, что $b \parallel c$.

Решение задач

№ 5 Дано $\angle EMC = \angle MCA$ и $\angle PEB = \angle EBC$ (рис. 3). Докажите, что плоскости MEP и ABC параллельны.

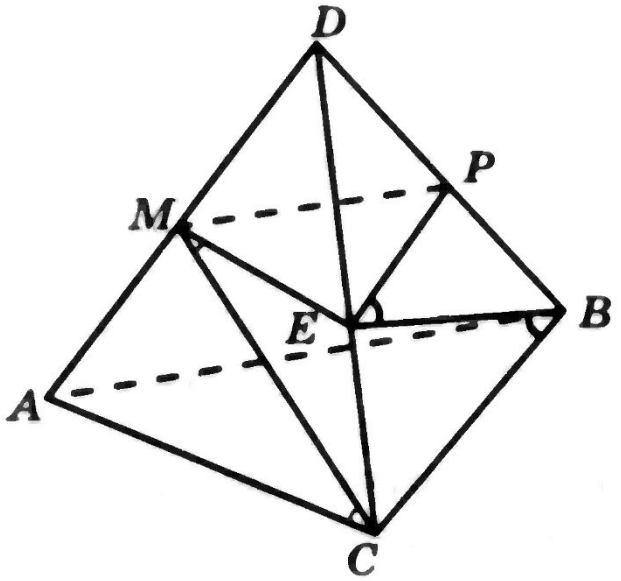


Рис. 3

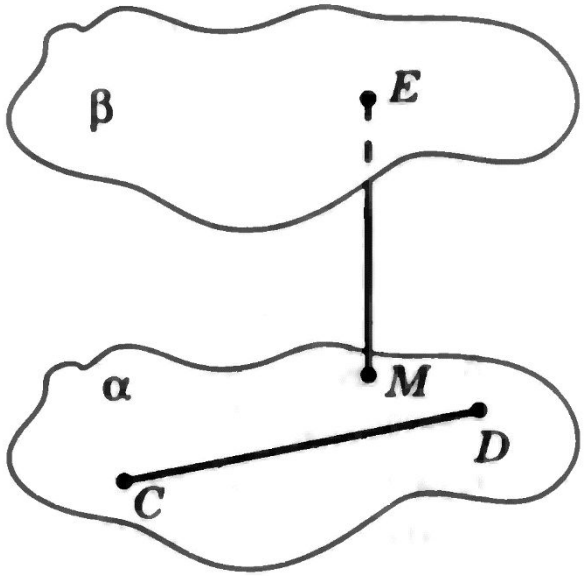


Рис. 4

№ 6 Отрезок CD лежит в плоскости α. Концы отрезка EM лежат в параллельных плоскостях α и β (рис. 4). Постройте линии пересечения плоскостей ECD, EMC и EMD с плоскостью β.

Решение задач

№ 7

Докажите, что прямые AA_1 и C_1D_1, AA_1 и B_1D, AC и B_1D_1 являются скрещивающимися (рис. 11).

№ 8

Прямая b лежит в плоскости α. Прямая a не лежит в плоскости α и параллельна прямой b. Через точку M, лежащую в плоскости α ($M \notin b$), проведена прямая c, параллельная a. Докажите, что c лежит в плоскости α.

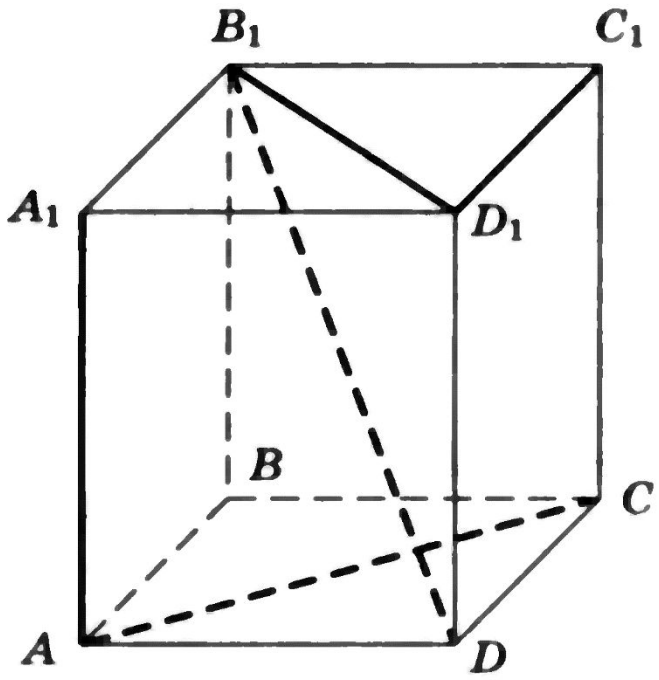


Рис. 11

Домашнее задание

№ 1 На рисунке 5 плоскости α и β пересекаются по прямой EF. Прямая AB лежит в плоскости α и параллельна EF. В плоскости β через точку C проведите прямую так, чтобы она:

1) пересекала прямую AB;
2) была скрещивающейся с прямой AB;
3) была параллельна прямой AB.

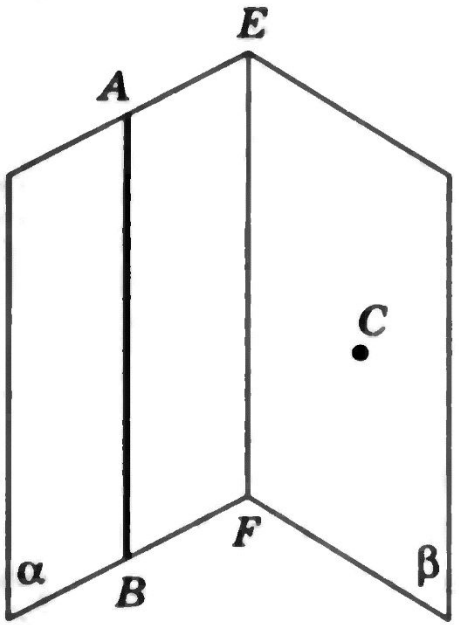


Рис. 5

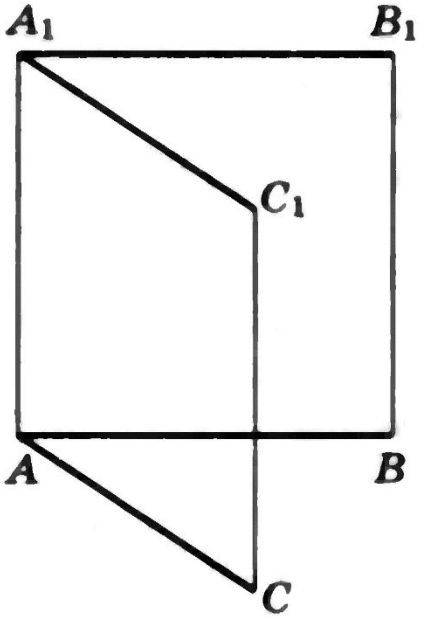


Рис. 6

№ 2 На рисунке 6 $A_1C_1 = AC$, $A_1C_1 \parallel AC$, $A_1B_1 = AB$, $A_1B_1 \parallel AB$. Докажите, что $CC_1 \parallel BB_1$.

Домашнее задание

№ 3

Дано $\frac{DE}{DA} = \frac{DK}{DC} = \frac{DM}{DB}$ (рис. 7). Докажите, что плоскости EKM и ABC параллельны.

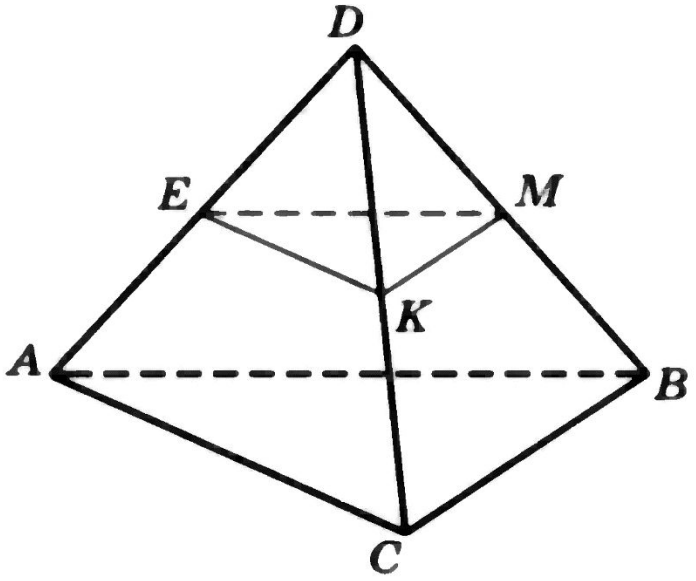


Рис. 7

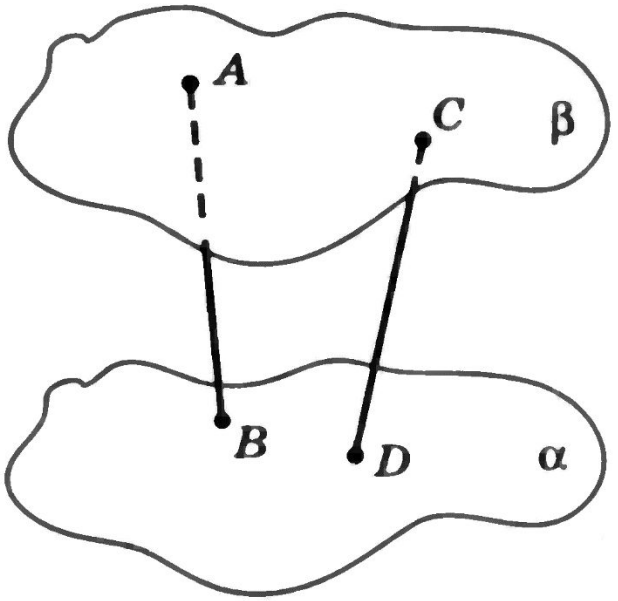


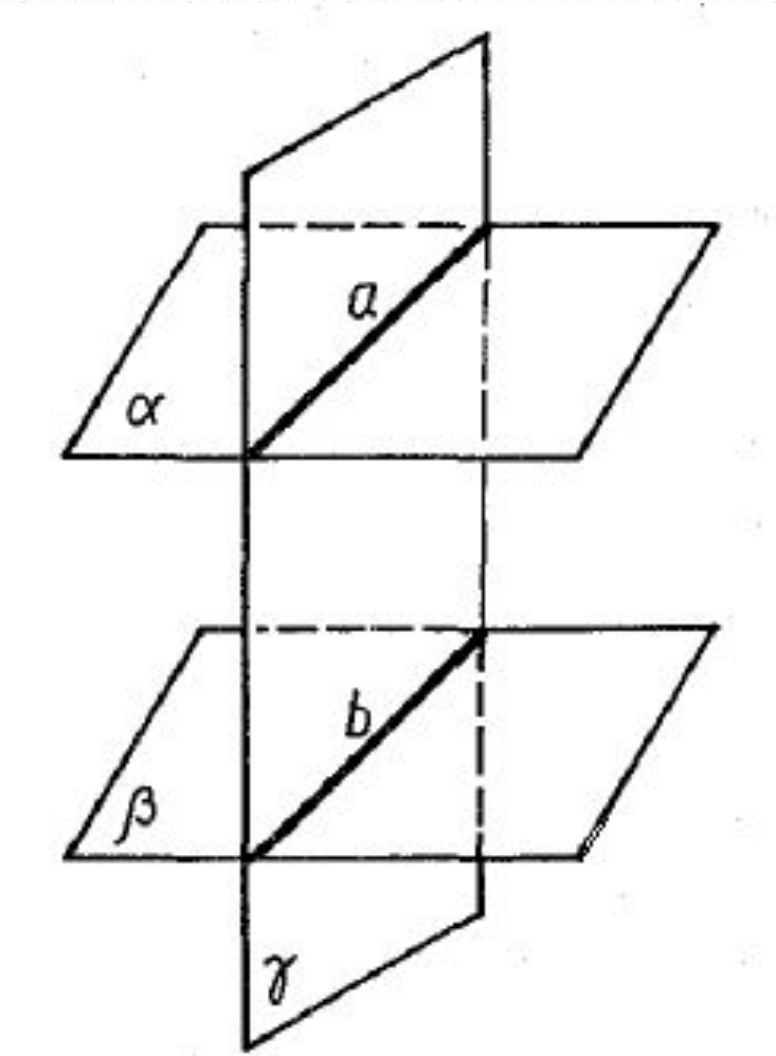
Рис. 8

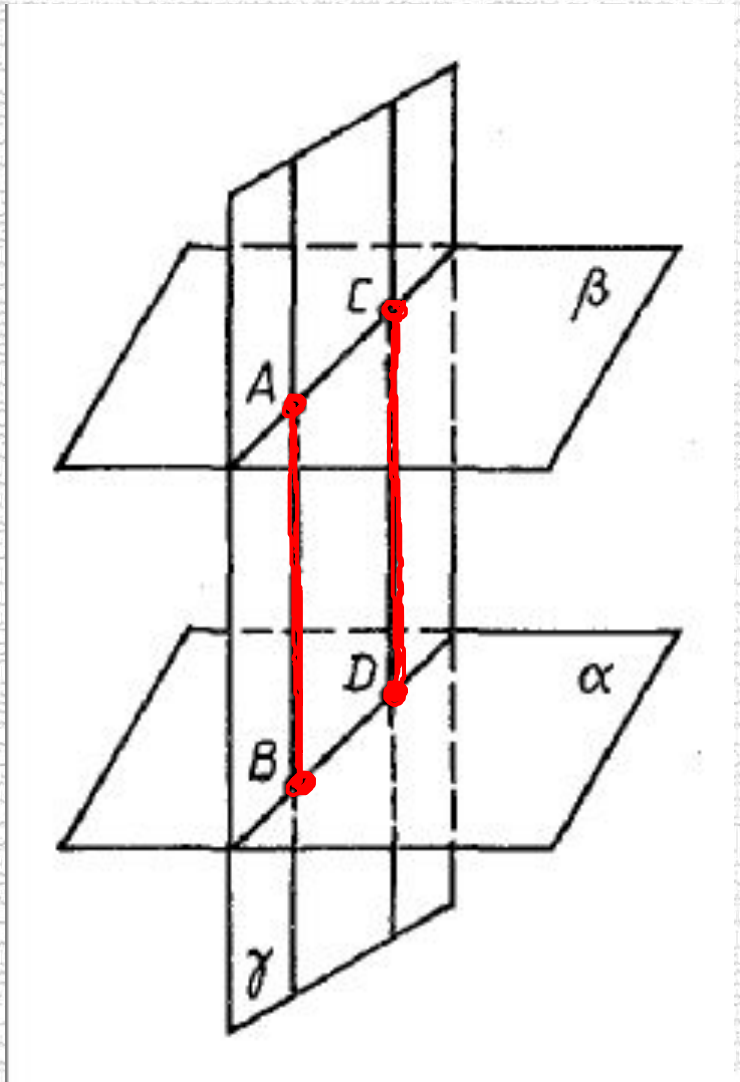
№ 4

Концы отрезков AB и CD лежат на параллельных плоскостях α и β (рис. 8). Постройте линии пересечения плоскости ABC с плоскостью α и плоскости BDC с плоскостью β.

Свойства параллельных плоскостей

1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения параллельны.



Свойства параллельных плоскостей

2. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.