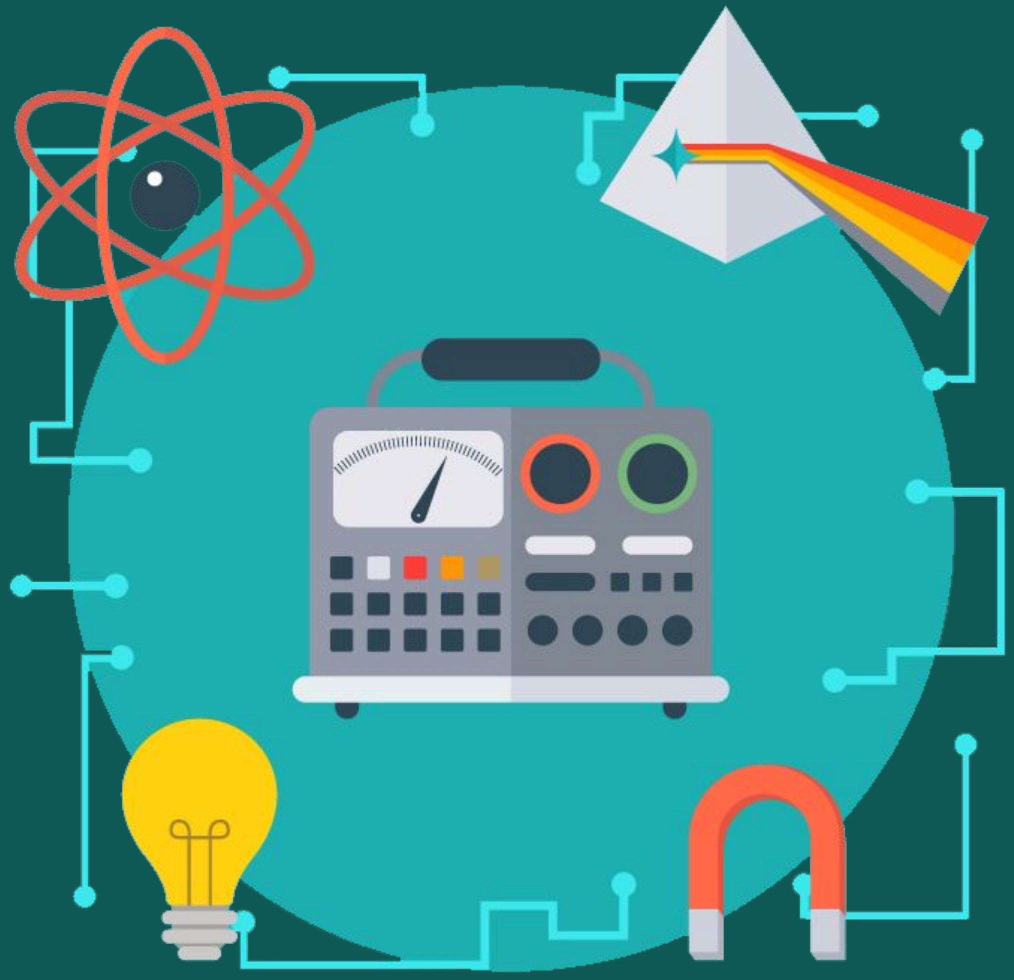
ПРАКТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА



Доцент кафедры экспериментальной физики
Ерина Марина Васильевна

Лекция № 9

Статистический анализ случайных погрешностей

Статистический анализ случайных погрешностей

Причины разброса времени скатывания:

- неровности доски, обусловленное этими неровностями различие траекторий
- при определении времени ручным секундомером из-за конечной скорости реакции будет допускаться ошибка порядка ±0,1 с. При автоматизации измерении времени погрешность возникает вследствие конечного времени размагничивания якоря электромагнита, удерживающего шарик.

Выявление случайной погрешности, ее учет и минимизация являются обязательными действиями при правильном планировании и осуществлении любого измерительного эксперимента.

Рассмотрим многократные измерения одной и той же физической величины x. В силу случайности ошибок, результаты отдельных опытов могут отличаться.

№	x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
1	71		
2	72		
3	72		
4	73		
5	71		
	$\overline{x} = 71{,}8$		

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Рассмотрим многократные измерения одной и той же физической величины *x*. В силу случайности ошибок, результаты отдельных опытов могут отличаться.

№	x_i	$x_i - \overline{x}$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$
1	71	-0,8	
2	72	0,2	
3	72	0,2	
4	73	1,2	
5	71	-0,8	
	$\overline{x} = 71{,}8$	$\Sigma = 0$	

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Рассмотрим многократные измерения одной и той же физической величины *x*. В силу случайности ошибок, результаты отдельных опытов могут отличаться.

№	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	71	-0,8	0,64
2	72	0,2	0,04
3	72	0,2	0,04
4	73	1,2	1,44
5	71	-0,8	0,64
	$\bar{x} = 71{,}8$	$\Sigma = 0$	$\Sigma = 2{,}8$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Стандартным отклонением результатов измерений называется величина, определяемая выражением:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N}} \quad (1)$$

Квадрат стандартного отклонения называют **дисперсией:**

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N} \quad (2)$$

В случае, когда измерений не очень много для расчета **стандартного отклонения** используют другую формулу:

$$\boxed{\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}} \quad (3)$$

Дисперсия:

$$\boxed{\sigma_x^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (4)$$

Это связано с тем, что формулу (1) нельзя применять в случае, когда измерение только одно (никакого отклонения нет). Формула (3) логично исключает эту возможность.

Стандартное отклонение используют для оценки величины ошибки в серии измерений.

В случае, если измерений много, то $\sqrt{N} \approx \sqrt{N-1}$

Пример:

N	$\sqrt{N}$	$\sqrt{N-1}$
5	2,2	2
10	3,2	3
20	4,5	4,4

Стандартное отклонение показывает погрешность **единичного измерения**.

Для того, чтобы охарактеризовать ошибку в **среднем значении**, используют **стандартное отклонение среднего**:

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}}$$

Рассчитаем дисперсию, стандартное отклонение и стандартное отклонение среднего для серии наших измерений:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N-1} = 0{,}7 \qquad \sigma_x \approx 0{,}8 \qquad \sigma_{\bar{x}} \approx 0{,}6$$

$$\boxed{\bar{x} = 71{,}8 \pm 0{,}6}$$

Пример:

Вычислите среднее значение $\bar{x}$, стандартное отклонение σ_x и стандартное отклонение среднего $\sigma_{\bar{x}}$ для следующих 20 измерений. Ответ запишите в виде $x = \bar{x} \pm \Delta x$, где $\Delta x = t_{\alpha,n}\sigma_{\bar{x}}$ с доверительной вероятностью $\alpha = 0{,}95$.

25,4; 26,7; 26,3; 25,5; 25,1; 26,9; 25,4; 25,3; 26,7; 25,2; 26,4; 25,7; 26,9; 25,4; 25,8; 26,2;26,7; 25,3; 26,2; 25,1.

25,4		
26,7		
26,3		
25,5		
25,1		
26,9		
25,4		
25,3		
26,7		
25,2		
26,4		
25,7		
26,9		
25,4		
25,8		
26,2		
26,7		
25,3		
26,2		
25,1		

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = 0{,}65$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = 0{,}14$$

$$\Delta x = 2{,}1 \cdot 0{,}14 = 0{,}03$$

$$\bar{x} = 25{,}91 \pm 0{,}03$$

n	α=0,7	α=0,9	α=0,95
3	1,06	2,9	4,3
4	0,98	2,4	3,2
5	0,94	2,1	2,8
6	0,62	2,0	2,6
10	0,88	1,8	2,3
15	0,87	1,8	2,1
20	0,86	1,7	2,1

25,4	-0,51	0,26
26,7	0,79	0,62
26,3	0,39	0,15
25,5	-0,41	0,17
25,1	-0,81	0,66
26,9	0,99	0,98
25,4	-0,51	0,26
25,3	-0,61	0,37
26,7	0,79	0,62
25,2	-0,71	0,50
26,4	0,49	0,24
25,7	-0,21	0,04
26,9	0,99	0,98
25,4	-0,51	0,26
25,8	-0,11	0,01
26,2	0,29	0,08
26,7	0,79	0,62
25,3	-0,61	0,37
26,2	0,29	0,08
25,1	-0,81	0,66
		7,96

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = 0{,}65$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = 0{,}14$$

$$\Delta x = 2{,}1 \cdot 0{,}14 = 0{,}03$$

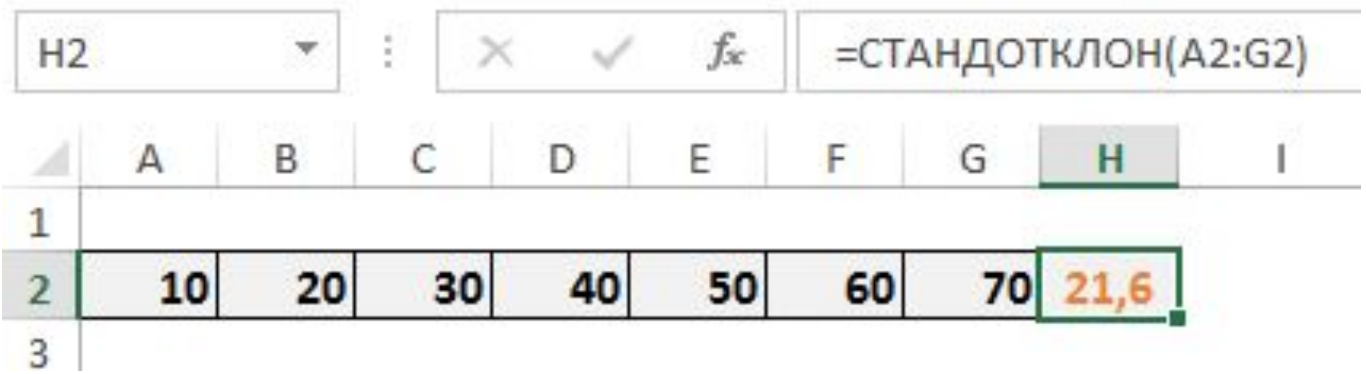
$$\bar{x} = 25{,}91 \pm 0{,}03$$

n	α=0,7	α=0,9	α=0,95
3	1,06	2,9	4,3
4	0,98	2,4	3,2
5	0,94	2,1	2,8
6	0,62	2,0	2,6
10	0,88	1,8	2,3
15	0,87	1,8	2,1
20	0,86	1,7	2,1

Что показывает стандартное отклонение

						Среднее значение	Стандартное отклонение
33	32	31	35	31	34	32.7	1.6
22	34	58	52	10	20	32.7	19.0

Расчеты с помощью Excel



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	10	20	30	40	50	60	70	21,6	
3									

СПАСИБО!