Логарифмические неравенства

Логарифмическими неравенствами называют неравенства вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$a > 0, a \neq 1$$

$$f(x) > 0$$
$$g(x) > 0$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

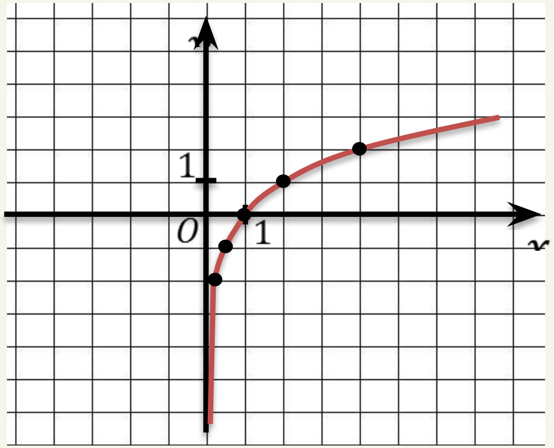
$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) - \log_a g(x) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_a \frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

$$\mathbf{\log_a t > 0}$$

$$a > 0, a \neq 1, t = \frac{f(x)}{g(x)}$$

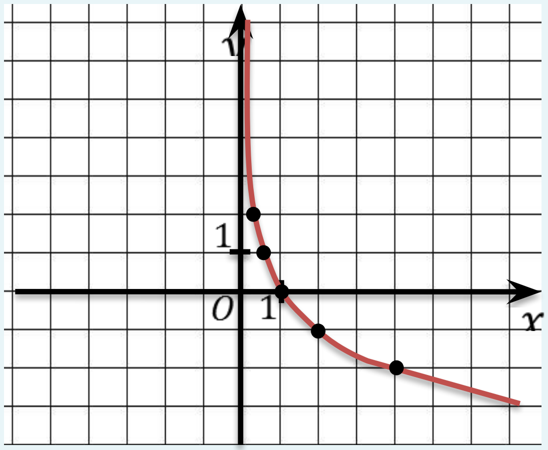
$$\log_a t > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ t = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$a > 1$



$$t > 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) > g(x)}$$

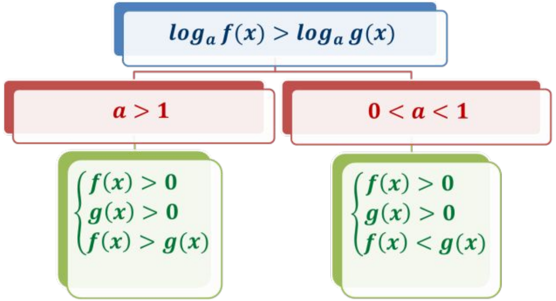
$0 < a < 1$



$$0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{f(x)}{g(x)} < 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) < g(x)}$$

Теорема. Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то:
при $a > 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$;
при $0 < a < 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

Пример:



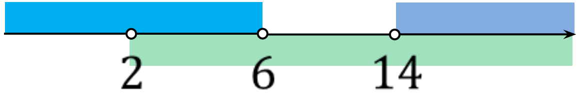
- Решить неравенства **а)** $\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$;

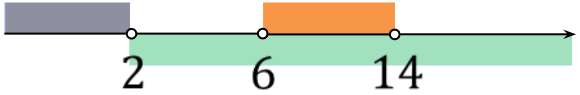
б) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4) > \log_{\frac{1}{3}}(14-x)$.

Решение:

$$\begin{cases} 2x-4>0 \\ 14-x>0 \\ 2x-4>14-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<14 \\ x>6 \end{cases}$$

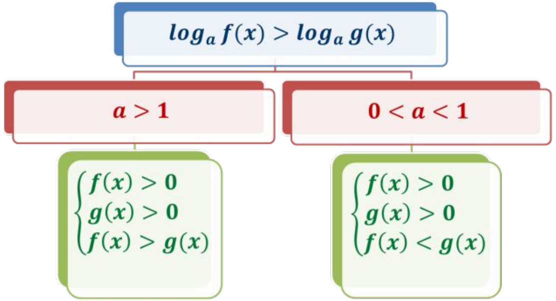
$$\begin{cases} 2x-4>0 \\ 14-x>0 \\ 2x-4<14-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<14 \\ x<6 \end{cases}$$





Ответ: а) $x \in (6; 14)$; б) $x \in (2; 6)$.

Пример:



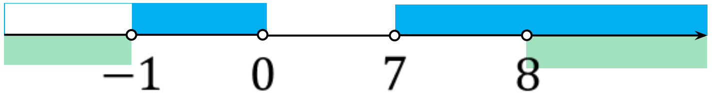
- Решить неравенство $\log_8(x^2 - 7x) > 1.$

Решение:

$$1 = \log_8 8$$

$$\log_8(x^2 - 7x) > 1 \Leftrightarrow \log_8(x^2 - 7x) > \log_8 8$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x > 0 \\ x^2 - 7x > 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-7) > 0 \\ x^2 - 7x - 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (7; +\infty) \\ x \in (-\infty; -1) \cup (8; +\infty) \end{cases}$$



Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (8; +\infty)$.

Пример:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$a > 1$: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$

$0 < a < 1$: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

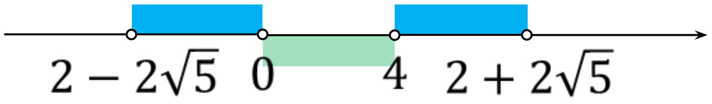
- Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq -4$.

Решение:

$$-4 = -4\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \log_{\frac{1}{2}} 16$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq -4 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq \log_{\frac{1}{2}} 16$$

$$\begin{cases} 16 + 4x - x^2 > 0 \\ 16 + 4x - x^2 \geq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (2 - 2\sqrt{5}; 2 + 2\sqrt{5}) \\ x \in [0; 4] \end{cases}$$



Ответ: $x \in [0; 4]$.

Пример:

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$

$a > 1$: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$

$0 < a < 1$: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

- Решить неравенство $\lg x + \lg(45 - x) < 2 + \lg 2$.

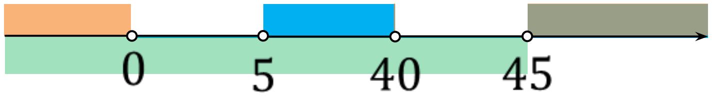
Решение:

$\lg x + \lg(45 - x) = \lg x(45 - x) = \lg(45x - x^2)$

$2 + \lg 2 = 2\lg 10 + \lg 2 = \lg 10^2 + \lg 2 = \lg 100 + \lg 2 = \lg 200$

$\lg x + \lg(45 - x) < 2 + \lg 2 \Leftrightarrow \lg(45x - x^2) < \lg 200$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 45 - x > 0 \\ 45x - x^2 < 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 45 \\ x \in (-\infty; 5) \cup (40; +\infty) \end{cases}$$



Ответ: $x \in (0; 5) \cup (40; 45)$.

Пример:

- Решить неравенство $\log^2_{\frac{1}{2}} x + 3\log_{\frac{1}{2}} x < -2.$

Решение:

$$\log_{\frac{1}{2}} x = a \Rightarrow \log^2_{\frac{1}{2}} x + 3\log_{\frac{1}{2}} x < -2 \Leftrightarrow a^2 + 3a < -2 \Leftrightarrow -2 < a < -1$$

$$\boldsymbol{log_a f(x) > log_a g(x)}$$

$\boldsymbol{a > 1}$:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$\boldsymbol{0 < a < 1}$:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$-2 < \log_{\frac{1}{2}} x < -1$$

$$-2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}} x < -1\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 4 < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 2$$

$$4 > x > 2$$

Ответ: $x \in (2; 4).$

Алгоритм решения логарифмических неравенств:

1. Уравнять основания логарифмов.
2. $$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$a > 1$:
$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$0 < a < 1$:
$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

3. Решить полученную систему.