Слайд-лекции представлены по следующим разделам

- Предмет и история развития методов оптимизации. Общая постановка задач оптимизации и основные положения. Теорема Вейерштрасса о достижении нижней грани функции на множестве.
- Методы минимизации функций одной переменной: деление отрезка пополам, метод золотого сечения, метод Фибоначчи, метод Ньютона.
- Методы минимизации функций многих переменных: метод наискорейшего спуска, метод сопряженных градиентов, метод конфигураций, метод Ньютона.
- Задача линейного программирования. Симплекс-метод. Элементы двойственности в линейном программировании. Целочисленное программирование. Постановка и алгоритмы решения транспортных задач.

- Элементы выпуклого анализа. Теорема Куна-Таккера. Понятие о двойственной задаче (основные теоремы).
- Методы условной оптимизации. Правило множителей Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств. Метод штрафных функций. Метод проекции градиента.

Цель курса:

- Изучение ряда базовых алгоритмов, которые используются для решения конечномерных задач оптимизации.
- Получение теоретических и концептуальных представлений, достаточных для понимания, оценки этих алгоритмов и, если необходимо, создания новых.

Предмет и история развития методов оптимизации. Общая постановка задач оптимизации и основные положения.

Оптимизация (по латыни optimus — наилучший) - целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях.

В 18 веке были заложены математические основы оптимизации (вариационное исчисление, численные методы и др.) Однако до второй половины 20 века методы оптимизации во многих областях науки и техники применялись редко, поскольку практическое использование математических методов оптимизации требовало огромной вычислительной работы, которую без ЭВМ реализовать было крайне трудно, а в ряде случаев - невозможно.

Постановка задачи оптимизации предполагает наличие:

- объекта задачи оптимизации;
- набора независимых параметров (переменных), описывающих данную задачу;
- условий (часто называемых ограничениями), которые характеризуют приемлемые значения независимых переменных;
- скалярной меры "качества", носящей название критерия оптимизации или целевой функции, и зависящей от переменных оптимизации.

Решение оптимизационной задачи - это поиск определенного набора значений переменных, которому отвечает оптимальное значение критерия оптимизации.

- 1. Определяем искомые переменные:
 - Что нужно найти?
 - Что можно изменять, чем можно управлять при решении задачи?
- 2. Определяем допустимое множество:
 - Какие есть ограничения на выбранные переменные?
- 3. Определяем целевую функцию:
 - Что является показателем качества решения?
 - Как этот показатель зависит от выбранных переменных?

<u>Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления)</u> — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

<u>Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления)</u> — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$,
- либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные управляемые) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению. Переменных какор перементументальные переменных перементументальный переменных объемов перементументальный переменных ($x_i \in R$). — либо действительные значения ($x_i \in R$). — либо натуральные значения ($x_i \in R$). — либо булевские ($x_i \in R$) = $\{0,1\}$). Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x \in R^n$ или $x \in R^n$ или $x \in R^n$ или $x \in R^n$. Возможны такуе смешанные случаи, когда часть переменных может или вущевские значения.

<u>Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления)</u> — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$,
- либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$

или булевские значения.

набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ или $x \in \mathbb{Z}^n$, или $x \in \mathbb{N}^n$, или $x \in \mathbb{R}^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

<u> Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, </u>

Общая постановка задачи оптимизации

Постановка задачи оптимизации содержит

- целевую функцию f(x), где $x = (x_1, ..., x_n)^T$, определенную на n-мерном евклидовом пространстве R^n . Ее значения характеризуют степень достижения цели, во имя которой поставлена или решается задача;
- множество допустимых решений $X \in \mathbb{R}^n$, среди элементов которого осуществляется поиск.

$$\begin{cases} f(x_1,...,x_n) \Rightarrow \max & \text{по } x_1,...,x_n : \\ g_1(x_1,...,x_n) \leq b_1, \\ \\ g_m(x_1,...,x_n) \leq b_m, \\ x_1,...,x_n \geq 0, \end{cases}$$

В векторной форме

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) \Rightarrow \max & \text{по } \mathbf{x} : \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Мохируальнямий продолжимие — Дируальнимие — проможение — проможение — проможение может может повершение — проможение может по проможение может по проможение по проможен

- прямые ограничения

ущения дей-темпения изгене, 1-чете - чене, вторьжения и объектов дей-темпения и объектов дей-темпени

- функциональные ограничения

Примеры постановок задач оптимизации

Площадь поверхности сферы равна 27π . Какова высота цилиндра наибольшего объема, вписанногов эту сферу?

Обозначим высоту цилиндра AD=h, OB=R.

По условию
$$S = 4\pi R^2 = 27\pi \implies R^2 = \frac{27}{4}, R = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$
Из $\Delta AOB : AB^2 = OB^2 - OA^2 = \frac{27 - h^2}{4}$

Из
$$\triangle AOB : AB^2 = OB^2 - OA^2 = \frac{27 - h^2}{4}$$

Объем цилиндра

$$V(h) = \pi AB^{2}h = \frac{\pi}{4}(27h - h^{3})$$

По смыслу задачи

$$0 < h < 2R, \ 0 < h < 3\sqrt{3}$$



$$V(h) = \frac{\pi}{4}(27h - h^3) \to \max, \ 0 < h < 3\sqrt{3}$$

Аналитическое решение задачи оптимизации

$$V(h) = \frac{\pi}{4}(27h - h^3) \to \max, \ 0 < h < 3\sqrt{3}$$

Производная
$$V'(h) = \frac{3\pi}{4}(9 - h^2) = 0 \Rightarrow h = 3$$

Вблизи h=3 производная V'(h) меняет знак с "+" на "-", значит при этой высоте объем цилиндра будет наибольшим

$$h = 3, V(h) = \frac{27\pi}{2}$$

Модель старинной русской задачи

Пошла баба на базар, на людей посмотреть, да кое-что продать. Сколько надо взять бабе на базар для продажи живых гусей, уток и кур, чтобы выручить как можно больше денег, если она может взять товара не более Р килограмм и известно, что:

-масса одной курицы – b1 кг, стоимость – c1 руб.; масса одной утки - b2 кг, стоимость - c2 руб.;

-масса одного гуся - b3 кг, стоимость - c3 руб.

```
Модель
```

управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению. Обычно качестве инструментальных переменных

переменные (управляемые

- рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$), либо натуральные значения $(x_i \in N)$,

Мотило булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$ Жобинина стороны кванратов, вырезаемых похуглам листа жести аким образом,

Инструментальные

собой п-мерный вектор $x \in \mathbb{Z}^n$, или $x \in \mathbb{N}^n$, или $x \in \mathbb{B}^n$. лучаи, когда часть переменных может чения, а часть — целые, натуральные

Примеры задач оптимизации

1. Завод выпускает три типа деталей A, B и C. Детали каждого типа можно изготовить на любой из двух имеющихся на заводе производственных линий, но расходы на работу каждой линии зависят от типа производимой на ней детали. На завод поступил заказ на производство 50 деталей A, 40 деталей В и 15 деталей С со сроком выполнения 10 суток. Необходимо составить такой план загрузки линий, чтобы суммарные затраты завода были минимальными. Данные по производительности линий и затратам на производство в зависимости от типа деталей приведены в таблице.

Тип продукции	Производительн	ость, шт./ сутки	Затраты на работу линий, ден.ед./сутки	
	1 линия	2 линия	1 линия	2 линия
Деталь А	6	4	200	350
Деталь В	5	6	150	200
Деталь С	4	3	400	250

- 2. Студент Коля любит ходить по ночным клубам и в то же время получать зачеты. Предельные полезности ночи в клубе и зачета известны и постоянны. Однако Коля обладает известным ограниченным бюджетом и ему приходится распределять его на клубы и репетиторов, так как сам Коля подготовиться не может. Если Коля днем занимается, то ночью он спит; если он ночью в клубе, то днем он заниматься не может. Стоимость одной ночи в клубе и одного дня с репетитором известны. Коля также не может выносить более определенного количества клубов в неделю, так как он начинает себя плохо чувствовать, и не может нанимать сверх определенного числа репетиторов в неделю, так как ему становится скучно. Определите, сколько суток в неделю Коле необходимо уделить клубам и сколько – подготовке к зачетам, чтобы максимизировать свою полезность.
- **3.** Девушка решила похудеть и выбрала модную диету, в которой разрешено питаться только двумя продуктами P и Q (овсянка и творог). Суточное питание этими продуктами должно давать не более 14 единиц жира (чтобы похудеть), но не менее 300 калорий. На упаковке продукта P написано, что в одном килограмме этого продукта содержится 15 единиц жира и 150 калорий, а на упаковке с продуктом Q 4 единицы жира и 200 калорий соответственно. При этом цена 1 килограмма продукта P равна 15 руб., а 1 кг продукта Q 25 руб. В какой пропорции нужно брать эти продукты для того, чтобы выдержать условия дцеты и истратить как можно меньше денег?

Общая постановка задачи оптимизации

(управления) — это те параметры, значения которых может выбира лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$, либо целочисленные значения $(x_i \in Z)$,
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$,
- либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом набор переменных представляет собой п-мерный $(x_1, x_2, \dots, x_n), x \in \mathbb{R}^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных може/

<u>управления)</u> — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения $(x_i \in Z)$,
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$,
- либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $(x_1, x_2, ..., x_n), x \in \mathbb{R}^n$ или $x \in \mathbb{Z}^n$, или $x \in \mathbb{N}^n$, или $x \in \mathbb{B}^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

переменные (управляемые переменные, *управления)* — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие: либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,

- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$,
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, переменных представляет собой п-мерный вектор $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смещанные случан, когда часть переменных может принимать действительные принимать действительные

по действительные (пецественные) запеченна $X_i \in \mathcal{B}_i$ действительные ($X_i \in \mathcal{B}_i$) действительные ($X_i \in \mathcal{B}_i$) действительные ($X_i \in \mathcal{B}_i$) действительные $X_i \in \mathcal{B}_i$ действительные действител

Основные положения задачи оптимизации

<u>управления) </u>– это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению. качестве инструментальных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие: либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$, либо целочисленные значения $(x_i \in Z)$, либо натуральные значения ($x_i \in N$), либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$ Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $x\in R^n$ или $x\in Z^n$, или $x\in N^n$, или $x\in S^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть— целые, натуральные инструментальные переменные (управляемые переменные, *управления)* – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению. качестве инструментальных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие: либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$, либо целочисленные значения $(x_i \in Z)$, либо натуральные значения $(x_i \in N)$, либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$ Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор x = (x_1, x_2, \dots, x_n) , $x \in \mathbb{R}^n$ или $x \in \mathbb{Z}^n$, или $x \in \mathbb{N}^n$, или $x \in \mathbb{B}^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные принимать действительные инфеременные, управляемые переменные, <u>управления) </u>— это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению. качестве инструментальных рассматриваются числовые переменные x_{i} , принимающие: либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$, либо целочисленные значения $(x_i \in Z)$, либо натуральные значения $(x_i \in N)$, либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\})$. Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом,

Инструментальные переменные (управляемые переменные, <u>управления) —</u> это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

набор переменных представляет собой n-мерный вектор x= (x_1, x_2, \dots, x_n) , $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие: либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$, либо целочисленные значения ($x_i \in Z$), либо натуральные значения $(x_i \in N)$,

либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $x\in R^n$ или $x\in Z^n$, или $x\in N^n$, или $x\in S^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

2) Глобальный экстремум всегда является одновременно локальным, но не наоборот.

Основные положения задачи оптимизации

переменные (управляемые переменные <u>управления) </u>– это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения $(x_i \in Z)$,
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$, либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор (x_1, x_2, \dots, x_n) , $x \in \mathbb{R}^n$ или $x \in \mathbb{Z}^n$, или $x \in \mathbb{N}^n$, или $\hat{x} \in \mathbb{B}^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные принимания до то переменной устрования до теременной устрования может выбирать дицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

качестве инструментальных рассматриваются числовые переменные $oldsymbol{x_t}$, принимающие: либо действительные (вещественные) значения ($x_t \in$

либо пелочиеленные значения $(x_i \in Z)$, либо натуральные значения $(x_i \in X)$, либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\})$.

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ или $x \in \mathbb{Z}^n$, или $x \in \mathbb{N}^n$, или $x \in \mathbb{R}^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

Инструментальные переменные (управляемые переменные, <u>управления) </u>— это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие: либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,

- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$,
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор x= (x_1, x_2, \dots, x_n) , $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Разрешимость задачи оптимизации

Теорема Вейерштрасса

<u>инструментальные переменные (управляемые переменные, управляемые</u> – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения $(x_i \in Z)$,
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$,
- либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $x\in R^n$ или $x\in Z^n$, или $x\in N^n$, или $x\in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

Следовательно, задача оптимизации разрешима, если выполняются следующие три условия:

- 1. Множество допустимых решений замкнуто;
- 2. Множество допустимых решений ограничено;
- 3. Целевая функция непрерывна на допустимом множестве.

Вопросы для проверки знаний

- 1) Предмет и история развития методов оптимизации.
- 2) Общая постановка задач оптимизации и основные положения.
- 3) Теорема Вейерштрасса о достижении нижней грани функции на множестве.

Методы безусловной минимизации

функций одной переменной

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

инструментальные переменные (управляемые переменные, <u>управления)</u> — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно качестве инструментальных переменных

- рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие: либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения $(x_i \in Z)$,
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$,

либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$ Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ или $x \in \mathbb{Z}^n$, или $x \in \mathbb{N}^n$, или $x \in \mathbb{R}^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

1-ОЕ ЛОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

<u>управления)</u> — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

инструментальных

переменных

рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения $(x_i \in Z)$,

качестве

- либо натуральные значения $(x_i \in N)$,
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор x = $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ или $x \in \mathbb{Z}^n$, или $x \in \mathbb{N}^n$, или $x \in \mathbb{B}^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные 2-ОЕ ЛОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Инструментальные переменные (управляемые переменные, <u>управления) —</u> это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

рассматриваются числовые переменные $oldsymbol{x_i}$, принимающие: либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,

либо целочисленные значения ($x_i \in Z$), либо натуральные значения $(x_i \in N)$, либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$ Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

Методы безусловной минимизации функций одной переменной

Правило исследования функции на экстремум

- 0. Найти область определения функции y=f(x);
- 1. Найти критические точки функции y=f(x);
- 2. Выбрать те, которые являются внутренними точками области определения функции;
- 3. Исследовать знак производной f'(x) слева и справа от исследуемой внутренней критической точки или знак производной второго порядка в исследуемой внутренней критической точке;
- 4. Найти экстремумы функции y=f(x)

```
Инструментальные
                                        (управляемые
                        переменные
                                                         переменные,
<u>управления)</u> — это те параметры, значения которых может выбирать
лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно
                   качестве
                                 инструментальных
                                                         переменных
рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
  либо действительные (вещественные) значения (x_i \in R),
  либо целочисленные значения (x_i \in Z),
  либо натуральные значения (x_i \in N),
  либо булевские (x_i \in B, B = \{0,1\}).
Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом,
       переменных представляет собой n-мерный
                                                        вектор
(x_1, x_2, \dots, x_n), x \in \mathbb{R}^n или x \in \mathbb{Z}^n, или x \in \mathbb{N}^n, или x \in \mathbb{R}^n.
Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может
```

принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Методы безусловной минимизации функций одной переменной

Пример

$$f(x) = x^3 - 3 \cdot x + 1 \rightarrow \min, x \in [-3, 3].$$

Решение

1).
$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 3$$
; $3 \cdot x^2 - 3 = 0$.

Стационарные точки: $x_1 = -1$;

$$x_2 = 1$$
.

 Вычисляем значения функции в стационарных точках и на концах отрезка:

$$x = -3;$$
 $f(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3) + 1 = -17;$
 $x = -1;$ $f(-1) = 3;$
 $x = 1;$ $f(1) = -1;$
 $x = 3;$ $f(3) = 1.$

3). Минимальное значение функции $f_{\min} = \min\{-17, 3, -1, 1\} = -17;$ точка минимума $x^* = -3.$

Методы безусловной минимизации функций одной переменной

<u>Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления)</u> — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения $(x_i \in Z)$, - либо натуральные значения $(x_i \in N)$,
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$, - либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\})$.
- Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ или $x \in \mathbb{Z}^n$, или $x \in \mathbb{R}^n$, или $x \in \mathbb{R}^n$.

Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуралыные или булевские значения.

Поскольку задачи максимизации и минимизации легко преобразуются одна в другую, то в дальнейшем будем рассматривать только задачи минимизации.

Задача

Минимизировать функцию одной переменной f(x) при условии $a \le x \le b$, то есть найти $x^* \in [a,b]$ такую что $f(x^*) \le f(x)$ для $\forall x \in [a,b]$.

Интервал [a,b] называется интервалом неопределенности; функция f(x) называется минимизирующей или целевой функцией.

24

Определение

Отрезком, соединяющим две точки x_1 и x_2 , называется множество точек x, удовлетворяющих уравнению $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, где $0 \le \lambda \le 1$.

Определение

Множество точек X называется выпуклым, если вместе

с любыми двумя его точками ему принадлежит и отрезок, соединяющий эти две точки.

Пересечение выпуклых множеств является выпуклым

25

Определение

Функция f(x), заданная в выпуклой области Q, называется выпуклой или вогнутой в этой области, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in Q$ и для любого числа $0 \le \lambda \le 1$ выполняется неравенство $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ -для выпуклой функции; $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ -для вогнутой функции.

Определение

Если неравенства (1) выполняются как строгие, то функция f(x) называется строго выпуклой (вогнутой).

Определение

Функция f(x), определенная на непустом выпуклом множестве X, называется квазивыпуклой, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ и для любого числа $0 < \lambda < 1$ выполняется неравенство $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \le \max\{f(x_1), f(x_2)\}$ (2)

Функция f(x) называется квазивогнутой, если — f(x) — квазивыпуклая функция.

Определение

Если неравенство (2) выполняется как строгое, то функция f(x) называется строго квазивыпуклой.

Определение

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

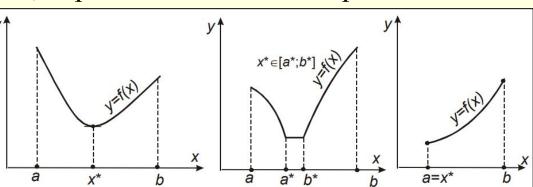
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$,
- либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $x\in R^n$ или $x\in Z^n$, или $x\in N^n$, или $x\in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

Другими словами функция f(x) является унимодальной в данной области, если в этой области имеет единственный экстремум, с увеличением х слева от x^* она монотонно убывает, справа — монотонно возрастает





f(x)-унимодальна или выпуклая или строго

квазивыпуклая

в интервале
$$[a,b]$$
 . Пусть $[a,b]$ такие, что $[a,b]$ Если $[a,b]$ то $[a,b]$ для любого $[a,a]$ $[a,b]$ то $[a,b]$ для любого $[a,a]$ $[a,b]$ для любого $[a,a]$ $[a,b]$ для любого $[a,b]$ для любого

Доказательство

Пусть $f(\alpha) > f(\beta)$ и $z \in [a, \alpha)$. Предположим, что утверждение теоремы не верно, то есть пусть $f(z) < f(\beta)$.

Так как α можно представить в виде выпуклой комбинации точек z, β , то существует $\lambda \in (0;1)$ такое, что $\alpha = \lambda z + (1-\lambda)\beta$

Учитывая, что f(x) строго квазивыпуклая функция, имеем $f(\alpha) < \max\{f(z), f(\beta)\} = f(\beta)$.

Но это противоречит утверждению, что $f(\alpha) > f(\beta)$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Ч.Т.Д.

Аналогично доказывается второе неравенство теоремы.



Методы исключения отрезков

Стратегия поиска минимума функции одной переменной *Инструментальные переменные (управляемые переменные, управляемые переменные, управления)* — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ или $x \in \mathbb{Z}^n$, или $x \in \mathbb{N}^n$, или $x \in \mathbb{B}^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

Выбор начального интервала неопределенности

<u>Инструментальные переменные (управляемые переменные, управляемые</u> — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных

- рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие: либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$,
- либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$

набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом,

Выбор начального интервала неопределенности

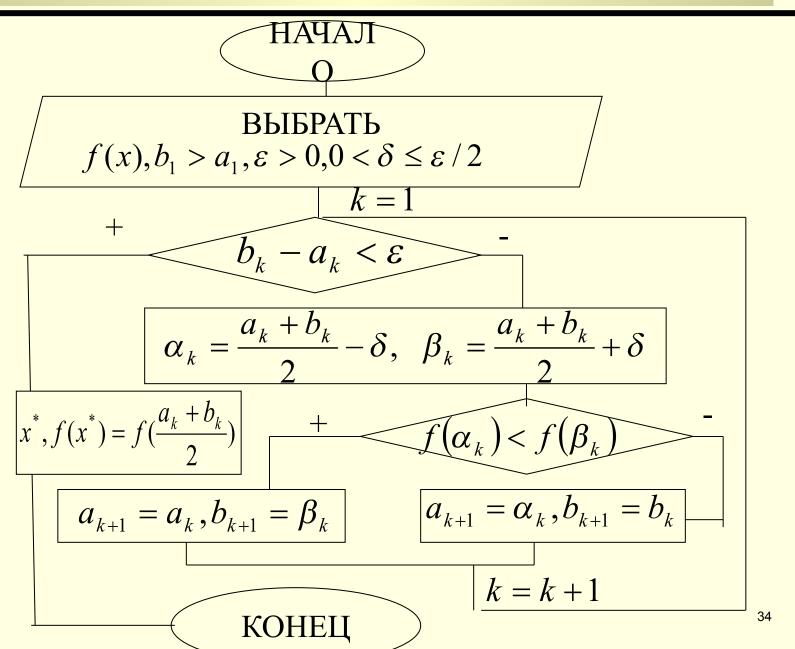
<u>Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления)</u> — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

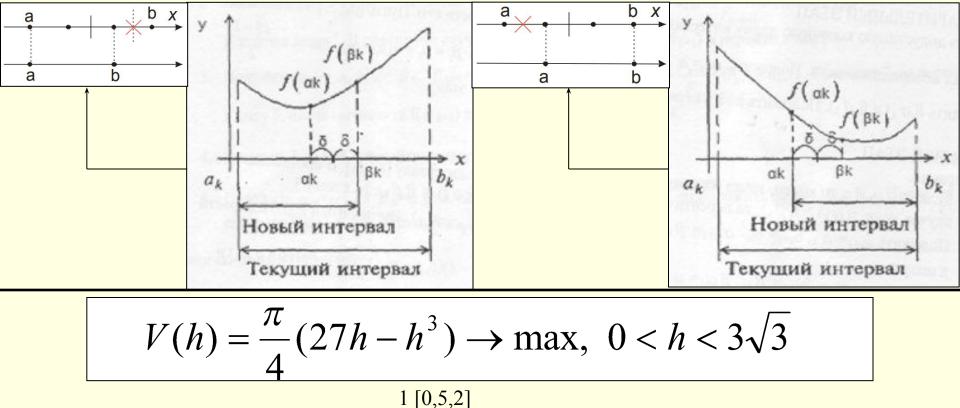
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$,
- либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ или $x \in \mathbb{Z}^n$, или $x \in \mathbb{N}^n$, или $x \in \mathbb{R}^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

Метод половинного деления





2 [2,5999,5,2]

3 [2,5999,3,90005]

4 [2,5999,3,250075] 5 [2,9248875,3,250075] 6 [2,9248875,3,08758125] 7 [2,9248875,3,006334375] 8 [2,9655109375,3,006334375]

9 [2,98582265625,3,006334375]

10 [2,995978515625,3,006334375] 11 [2,995978515625,3,0012564453125] 12 [2,99851748046875,3,0012564453125]

13 [2,99978696289063,3,0012564453125]

35

 $x^* \approx 3,000204$

Метод половинного деления

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управляемые переменные п

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения $(x_i \in Z)$,
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$,
- либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $x\in R^n$ или $x\in Z^n$, или $x\in N^n$, или $x\in R^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

ПРИМЕР

	правления)— это те параметры, значения которых может выбирать но, принимающее решение, по своему усмотрению.
=	necemarpheasores unencale repementale x; npannasoune: nno generalemente (seulermentale) sharens (x; ∈ R); nno horousomente staurens (x; ∈ Z); nno horousomente staurens (x; ∈ Z); nno horousomente se
	Single Property of the Control of th

k	a_k	b_k	α_{k}	β_{k}	$f(\alpha_k)$	$f(\beta_k)$	$b_k - a_k$
1	-1	1	-0,04	0,04	0,0999936	1,000064	2
2	-1	0,04	-0,52	-0,44	0,859392	0,914816	1,04
3	-1	-0,44	-0,76	-0,68	0,561024	0,685568	0,56
4	-1	-0,68	-0,88	-0,8	0,318528	0,488	0,32
5	-1	-0,8	-0,94	-0,86	0,169416	0,363944	0,2
6	-1	-0,86	-0,97	-0,89	0,087327	0,295031	0,14
7	-1	-0,89	-0,985	-0,905	0,044328	0,258782	0,11
8	-1	-0,905		_	<u>200</u> 9	_	0,095

1. Зададим начальный интервал неопределенности:
$$x \in [-1;1]$$
. Положим $\delta=0,04$, $\varepsilon=0,1$.

2. Положим $k=1$.

3¹. Проверим условие $b_1-a_1=2>\varepsilon=0,1$. Перейдем к шагу 4.

4¹. Вычислим

$$\alpha_1=\frac{a_1+b_1}{2}-\delta=-0,04, \ f(\alpha_1)=0,999939,$$

$$\beta_1=\frac{a_1+b_1}{2}+\delta=0,04, \ f(\beta_1)=1,000064.$$

5¹. Так как $f(\alpha_1)< f(\beta_1)$, то $a_2=a_1=-1, \ b_2=\beta_1=0,04$. Положим $k=2$ и перейдем к шагу 3.

3². Проверим условие $b_2-a_2=1,04>\varepsilon=0,1$. Перейдем к шагу 4.

4². Вычислим

$$\alpha_2=\frac{a_2+b_2}{2}-\delta=-0,52, \ f(\alpha_2)=0,859392,$$

$$\beta_2=\frac{a_2+b_2}{2}+\delta=-0,44, \ f(\beta_2)=0,914816.$$

5². Так как $f(\alpha_2)< f(\beta_2)$, то $a_3=a_2=-1, \ b_3=\beta_2=-0,44$. Положим $k=3$ и перейдем к шагу 3.

3³. Проверим условие $b_3-a_3=0,56>\varepsilon=0,1$. Перейдем к шагу 4.

4³. Вычислим

$$\alpha_3=\frac{a_3+b_3}{2}-\delta=-0,76, \ f(\alpha_3)=0,561024,$$

$$\beta_3=\frac{a_3+b_3}{2}+\delta=-0,68, \ f(\beta_3)=0,685568.$$

5³. Так как $f(\alpha_3)< f(\beta_3)$, то $a_4=a_3=-1, \ b_4=\beta_3=-0,68$. Положим $k=4$ и перейдем к шагу 3.

3⁴. Проверим условие $b_4-a_4=0,32>\varepsilon=0,1$. Перейдем к шагу 4.

4⁴. Вычислим

$$\alpha_4=\frac{a_4+b_4}{2}-\delta=-0,88, \ f(\alpha_4)=0,318528,$$

$$\beta_4=\frac{a_4+b_4}{2}+\delta=-0,88, \ f(\beta_4)=0,488.$$

5⁴. Так как
$$f$$
 (перейдем к шагу 3. 3⁵. Проверим 4⁵. Вычислим

$$5^4$$
. Так как $f\left(\alpha_4\right) < f\left(\beta_4\right)$, то $a_5 = a_4 = -1$, $b_5 = \beta_4 = -0.8$. Положим $k = 5$ и дем к шагу 3.
 35. Проверим условие $b_5 - a_5 = 0.2 > \varepsilon = 0.1$. Перейдем к шагу 4.
 45. Вычислим
$$\alpha_5 = \frac{a_5 + b_5}{2} - \delta = -0.94, \ f\left(\alpha_5\right) = 0.169416,$$

$$\beta_3 = \frac{a_5 + b_5}{2} + \delta = -0.86, \ f\left(\beta_5\right) = 0.363944.$$

 5^5 . Так как $f\left(\alpha_5\right) < f\left(\beta_5\right)$, то $a_6=a_5=-1,\ b_6=\beta_5=-0,86$. Положим k=6 и перейдем к шагу 3. 3^6 . Проверим условие $b_6-a_6=0,14>\varepsilon=0,1$. Перейдем к шагу 4. 4^6 . Вычислим $\alpha_6=\frac{a_6+b_6}{2}-\delta=-0,97,\ f\left(\alpha_6\right)=0,087327,$

$$\beta_6=\frac{a_6+b_6}{2}+\delta=-0,89,\;f\left(\beta_6\right)=0,29\,503\,1.$$
 56. Так как $f\left(\alpha_6\right)< f\left(\beta_6\right)$, то $a_7=a_6=-1,\;b_7=\beta_6=-0,89.$ Положим $k=7$

3°. Так как $f(\alpha_6) < f(\beta_6)$, то $\alpha_7 = \alpha_6 = -1$, $\beta_7 = \beta_6 = -0.69$. Положим к и перейдем к шагу 3.

3°. Проверим условие $b_7 - \alpha_7 = 0.11 > \varepsilon = 0.1$. Перейдем к шагу 4.

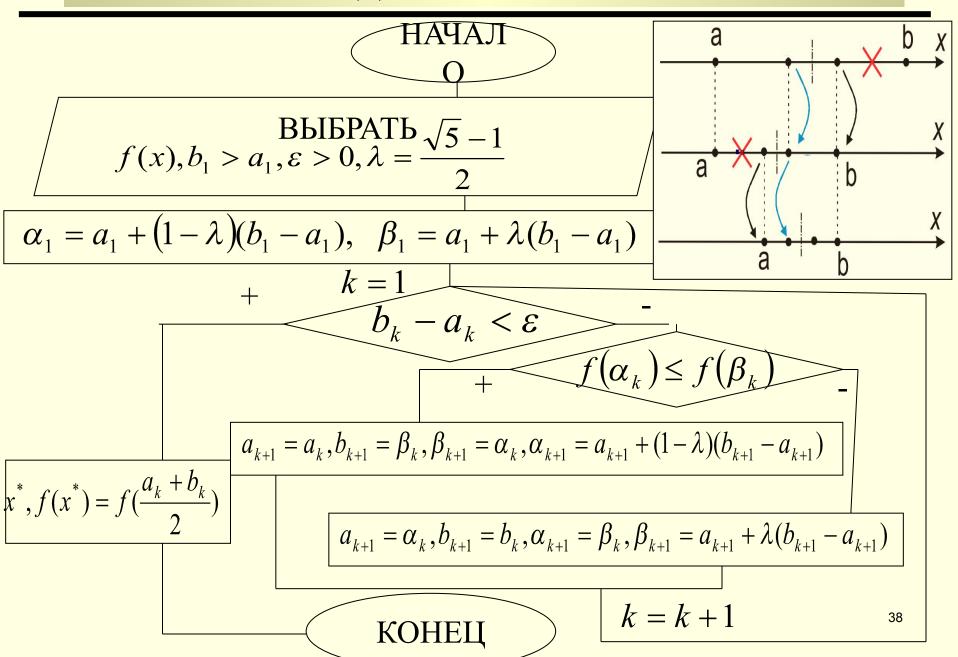
 $\alpha_{\gamma} = \frac{a_{\gamma} + b_{\gamma}}{2} - \delta = -0.985, \ f(\alpha_{\gamma}) = 0.04433,$

 $\beta_{7} = \frac{a_{7} + b_{7}}{2} + \delta = -0.905, \ f(\beta_{7}) = 0.25878.$ 57 Tax way $f(\alpha_{7}) < f(\beta_{7})$ Tax $\beta_{7} = 0.005$

 $x^* = \frac{a_8 + b_8}{2} = -0,9525, f(x^*) = 0,135838.$

 $\rho_7 = \frac{1}{2} + b = -0,903, \ f(\rho_7) = 0,23676.$ 57. Так как $f(\alpha_7) < f(\beta_7)$, то $a_8 = a_7 = -1, b_8 = \beta_7 = -0,905$. Положим k = 8 и перейдем к шагу 3.
38. Проверим условие $b_8 - a_8 = 0,095 < \varepsilon = 0,1$. Следовательно,

Метод золотого сечения



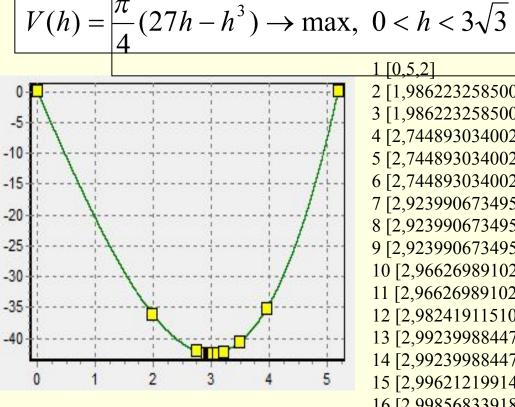
«Золотым сечением» отрезка называется деление отрезка на две части так, что отношение длин всего отрезка к длине больше части равно отношению длин

большей части к меньшей

$$\frac{b-a}{b-y} = \frac{b-y}{y-a}$$

Золотое сечение отрезка производит две симметрично расположенные точки

$$\alpha = a + (1 - \lambda)(b - a), \quad \beta = a + \lambda(b - a), \quad \lambda = \frac{\sqrt{5 - 1}}{2}$$



1 [0,5,2] 2 [1,98622325850055,5,2] 3 [1,98622325850055,3,97244651700109] 4 [2,74489303400219,3,97244651700109] 5 [2,74489303400219,3,50356280950383] $x^* \approx 2,999918$ 6 [2,74489303400219,3,21377674149945] 7 [2,92399067349508,3,21377674149945] 8 [2,92399067349508,3,10308831298797] 9 [2,92399067349508,3,03467910200656] 10 [2,96626989102515,3,03467910200656] 11 [2,96626989102515,3,00854910855523] 12 [2,98241911510389,3,00854910855523]

13 [2,99239988447649,3,00854910855523]

14 [2,99239988447649,3,00238065384909] 15 [2,99621219914295,3,00238065384909] 16 [2,99856833918263,3,00238065384909] 17 [2,99856833918263,3,00092447922231]

18 [2,99946830459553,3,00092447922231]

 $f(x^*) \approx 42,4115$

 χ

Метод золотого сечения

Инструментальные переменные (управляемые переменные, умеренные переменные, умеренные переменные, управляемые переменные, управляемые переменные, управляемые переменные, управляемые переменные, управляемые переменные, управляемые переменные, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения $(x_i \in Z)$,
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$,
 - либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $x\in R^n$ или $x\in Z^n$, или $x\in N^n$, или $x\in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

ПРИМЕР

THE CONTRACT OF THE PROPERTY O

_	_						
k	a_k	b_k	α_{k}	β_{k}	$f(\alpha_k)$	$f(eta_k)$	$b_k - a_k$
1	-1	1	-0,23606	0,23606	0,986846	1,013154	2
2	-1	0,23606	-0,53032	-0,23606	0,850853	0,986846	1,23606
3	-1	-0,23606	-0,7112	-0,53032	0,640271	0,850853	0,76
4	-1	-0,53032	-0,8215	-0,7112	0,44556	0,640271	0,46968
5	-1	-0,7112	-0,8903	-0,8215	0,29442	0,44556	0,2888
6	-1	-0,8215	-0,93218	-0,8903	0,18998	0,29442	0,1785
7	-1	-0,8903	-0,9583	-0,93218	0,11996	0,18998	0,109744
8	-1	-0,93218	-0,97423	-0,9583	_	_	0,06782

1. Зададим начальный интервал неопределенности:
$$x \in [-1;1]$$
. Положим $\varepsilon = 0,1, \ \lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61803, \ (1-\lambda) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,38197.$

 3^{1} . Проверим условие $b_{1}-a_{1}=2>\varepsilon=0,1$. Перейдем к шагу 4.

$$\alpha_1 = a_1 + (1 - \lambda) \cdot (b_1 - a_1) = -0.23606, \ f(\alpha_1) = 0.986846,$$

 $\beta_1 = a_1 + \lambda \cdot (b_1 - a_1) = 0.23606, \ f(\beta_1) = 1.013154.$

$$\beta_1 = a_1 + \lambda \cdot (b_1 - a_1) = 0,23606, \ f(\beta_1) = 1,013154.$$
 51. Так как $f(\alpha_1) \le f(\beta_1)$, то

$$b_2 = \beta_1 = 0,23606,$$

 $a_2 = a_1 = -1$,

$$\beta_2 = \alpha_1 = -0.23606,$$

$$\lambda)\cdot (b_2-a_2)=-0,$$

$$\alpha_2 = a_2 + \left(1 - \lambda\right) \cdot \left(b_2 - a_2\right) = -0,53032.$$
 Положим $k=2$ и перейдем к шагу 3.

$$3^2$$
. Проверим условие $b_2-a_2=1,23\,606>arepsilon=0,1$. Перейдем к шагу 4. 4^2 . Вычислим

$$f(\alpha_2) = 0.850853, f(\beta_2) = 0.986176.$$

5². Так как
$$f(\alpha_2) \le f(\beta_2)$$
, то
$$a_3 = a_2 = -1,$$

$$b_3 = \beta_2 = -0,23606,$$

$$\beta_3 = \alpha_2 = -0.53032,$$

$$\alpha_3 = a_3 + (1 - \lambda) \cdot (b_3 - a_3) = -0,7112.$$

ейдем к шагу 3.

Положим
$$k=3$$
 и перейдем к шагу 3.
 3^3 . Проверим условие $b_3-a_3=0,76>\varepsilon=0,1$. Перейдем к шагу 4.

м условие
$$b_3 - a_3 = 0, /6 > \varepsilon = 0, 1$$
. Переидем к шагу 4.

$$f(\alpha_2) = 0.640271, f(\beta_2) = 0.850853.$$

$$b_3 - a_3 = 0, 70 > \varepsilon = 0,1$$
. Переидем к шагу 4. 4³. Вычислим

 $a_7 = a_6 = -1$ $b_7 = \beta_6 = -0.890256$ $\beta_7 = \alpha_6 = -0.93218$,

$$lpha_7=a_7+ig(1-\lambdaig)\cdotig(b_7-a_7ig)=-0,9583\,.$$
 Положим $k=7$ и перейдем к шагу 3 .

56. Так как $f(\alpha_6) \le f(\beta_6)$, то

 3^7 . Проверим условие $b_7 - a_7 = 0,109744 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

ислим
$$f(\alpha_2) = 0.11996, f(\beta_2) = 0.18998$$

$$f(\alpha_{7}) = 0.11996, f(\beta_{7}) = 0.18998.$$

$$f(\alpha_{7}) = 0.11996, f(\beta_{7}) = 0.18998$$
 57. Так как $f(\alpha_{7}) \le f(\beta_{7})$, то $\alpha_{8} = \alpha_{7} = -1$,

$$b_8 = \beta_7 = -0.93218,$$

 $\beta_8 = \alpha_7 = -0.9583,$

$$\alpha_8 = a_8 + (1-\lambda) \cdot (b_8 - a_8) = -0,97423 \,.$$
 Положим $k=8$ и перейдем к шагу 3 .

$$3^8$$
. Проверим условие $b_8 - a_8 = 0,06782 < \varepsilon = 0,1$.

 $x^* = \frac{a_8 + b_8}{a_8} = -0.966089, f(x^*) = 0.0983218.$

$$5^3$$
. Так как $f(lpha_3)\!\leq\!f(eta_3)$, то

$$a_4 = a_3 = -1,$$

 $b_4 = \beta_3 = -0,53032,$

$$\beta_4 = \alpha_3 = -0.7112,$$

 $\alpha_4 = \alpha_4 + (1 - \lambda) \cdot (b_4 - a_4) = -0.8215.$

Положим
$$k=4$$
 и перейдем к шагу 3.
 3^4 . Проверим условие $b_4-a_4=0,46968>\varepsilon=0,1$. Перейдем к шагу 4

$$f(\alpha_4) = 0,44556, f(\beta_4) = 0,640271.$$

$$a_5 = a_4 = -1,$$

 $b_5 = \beta_4 = -0.7112,$

$$\beta_5 = \alpha_4 = -0.8215,$$

 $\alpha_5 = a_5 + (1 - \lambda) \cdot (b_5 - a_5) = -0.890256.$

Положим
$$k = 5$$
 и перейдем к шагу 3.

5⁴. Так как $f(\alpha_4) \le f(\beta_4)$, то

$$3^5$$
. Проверим условие $b_5 - a_5 = 0,2888 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

$$f(\alpha_s) = 0.29442, f(\beta_s) = 0.44556.$$

 $a_6 = a_5 = -1$ $b_6 = \beta_5 = -0.8215$,

$$f(\alpha_5) = 0,29442, f(\beta_5) = 0,44330.$$

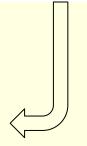
55. Tak kak $f(\alpha_5) \le f(\beta_5)$, to

$$\beta_6 = \alpha_5 = -0,890256,$$

 $\alpha_6 = a_6 + (1 - \lambda) \cdot (b_6 - a_6) = -0,93218.$

Положим
$$k=6$$
 и перейдем к шагу 3.

$$3^6$$
. Проверим условие $b_6 - a_6 = 0,1785 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

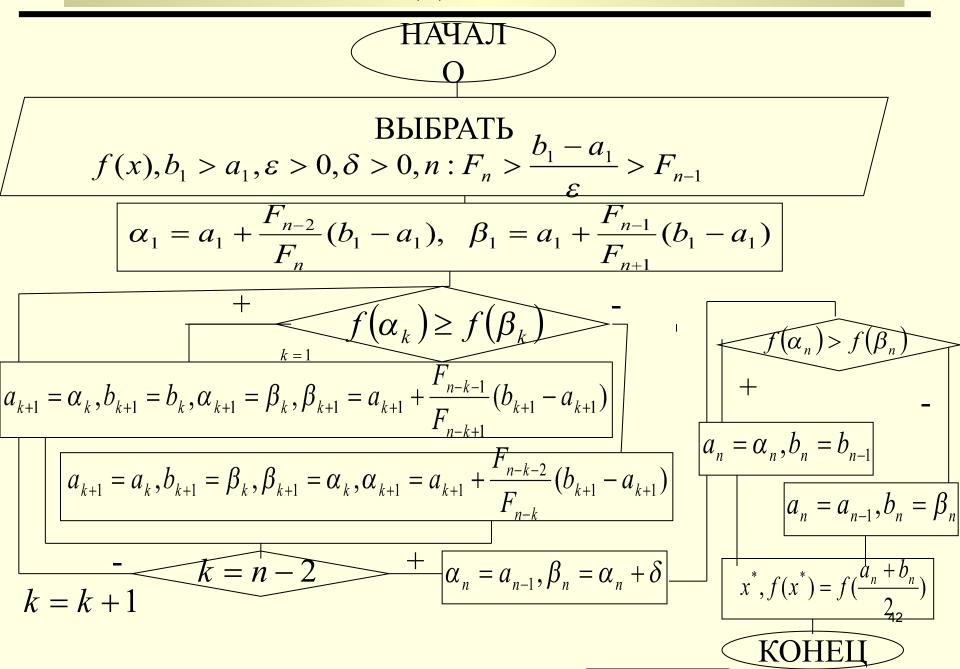


Следовательно,

$$b_6$$
. Проверим условие $b_6 - a_6 = 0,1785 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу

$$f(\alpha_6) = 0.18998, f(\beta_6) = 0.29442.$$

Метод Фибоначчи

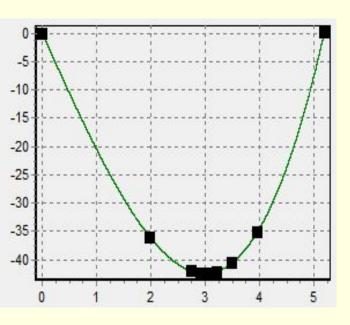


Метод Фибоначчи основан на последовательности Фибоначчи, которая определяется следующим образом: $F_{k+1} = F_{k-1} + F_k$, $k = 1, 2, ..., F_0 = F_1 = 1$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597...

$$\boldsymbol{F}_{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n} - \left(\frac{10 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n} \right], \quad \varepsilon \partial e \quad n = 1, 2, \dots$$

$$V(h) = \frac{\pi}{4}(27h - h^3) \to \max, \ 0 < h < 3\sqrt{3}$$



- 1 [0,5,2] 2 [1,98622320768662,5,2] 3 [1,98622320768662,3,97244652899663] 4 [2,74489298777015,3,97244652899663] 5 [2,74489298777015,3,50356281125395] 6 [2,74489298777015,3,21377673233568] 7 [2,92399063683997,3,21377673233568] 8 [2,92399063683997,3,1030882961552] 9 [2,92399063683997,3,03467907935246] 10 [2,96626985863631,3,03467907935246] 11 [2,96626985863631,3,00854908285127]
- 12 [2,9824190848553,3,00854908285127] 13 [2,99239985570846,3,00854908285127] 14 [2,99239985570846,3,00238062713257]

15 [2,99621217106099,3,00238062713257] 16 [2,99856831156195,3,00238062713257] $x^* \approx 2,999796$ $f(x^*) \approx 42,4115$

Метод Фибоначчи

- **НЕДОСТАТКИ** 1) Надо хранить избыточный набор чисел Фибоначчи либо многократно генерировать числа по мере необходимости; необходимость предварительной оценки требуемого числа итераций;
 - 2) Метод Фибоначчи нелегко приспособить к часто используемому критерию останова, требующему, чтобы значения функции на окончательном интервале неопределенности разнились на величину меньше заданной погрешности

ПРИМЕР

-	правления) — это те параметры, значения которых может выбиратыния, принимающее решение, по своему усмотрению.							
<	эбычно в качестве инструментальных переменных							
	ассматриваются числовые переменные х,, принимающие:							
_	либо действительные (вещественные) значения ($x_t \in R$),							
	- либо нелочисленные значения $(x, \in Z)$.							
_	- либо натуральные значения ($x_i \in N$).							
_	либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,13\}$).							
	рбычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом,							
	абор переменных представляет собой п-мерный вектор $x +$							
<	$x_1, x_2, \dots, x_n >$, $x \in R^n$ han $x \in Z^n$, han $x \in \mathbb{A}^n$, han $x \in B^n$.							

k	a_k	b_{k}	α_{k}	β_{k}	$f(\alpha_k)$	$f(\beta_{k})$	$b_k - a_k$
1	-1	1	-0,2381	0,2381	0,9865	1,0135	2
2	-1	0,2381	-0,52381	-0,2381	0,85628	0,9865	1,2381
3	-1	-0,2381	-0,71429	-0,52381	0,63556	0,85628	0,7619
4	-1	-0,52381	-0,8095	-0,71429	0,469495	0,63556	0,47619
5	-1	-0,71429	-0,904763	-0,8095	0,259365	0,469495	0,28571
6	-1	-0,8095	-0,904762	-0,904763	0,259367	0,259365	0,1905
7	-1	-0,86476	-0,904762	-0,864762	0,259367	0,353319	0,095238

Последовательность Фибоначчи:
$$F_0 = F_1 = 1, \; F_i = F_{i-2} + F_{i-1}, \; i \geq 2, \; i \in Z.$$
0. Зададим начальный интервал неопределенности: $x \in [-1;1]$. Положим

$$\delta = 0,04,\ \varepsilon = 0,1.$$

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_n} \cdot (b_1 - a_1) = -0,2381, \ f(\alpha_1) = 0,9865,$$

$$\beta_1 = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} \cdot (b_1 - a_1) = 0,2381, \ f(\beta_1) = 1,0135.$$

$$3^1$$
. Так как $f(\alpha_1) < f(\beta_1)$, то $a_2 = a_1 = -1$,

$$b_2 = \beta_1 = 0,2381,$$

 $\beta_2 = \alpha_1 = -0,2381,$

 $b_2 = \beta_2 = -0.2381$

 $f(\alpha_2) = 0.63556$, $f(\beta_2) = 0.85628$.

$$\alpha_2 = a_2 + \frac{F_{n-k-2}}{F} \cdot (b_2 - a_2) = -0.52381.$$

$$4^1$$
. Проверим $k \neq n-2 \implies k=2$. Перейти к шагу 2.

$$f(\alpha_2) = 0.85628, f(\beta_2) = 0.9865.$$

$$3^2$$
. Так как $f\left(\alpha_2\right) < f\left(\beta_2\right)$, то
$$a_3 = a_2 = -1,$$

$$\beta_3 = \alpha_2 = -0,52381,$$

$$\alpha_3 = a_3 + \frac{F_{n-k-2}}{F} \cdot (b_3 - a_3) = -0,71429.$$

$$4^2$$
. Проверим $k \neq n-2 \implies k=3$. Перейти к шагу 2

$$4^2$$
. Проверим $k \neq n-2 \implies k=3$. Перейти к шагу 2. 2^3 . Вычислим

$$4^2$$
. Проверим $k \neq n-2 \implies k=3$. Перейти к шагу 2. 2^3 Вычислим

1.
$$F_n > \frac{b_1 - a_1}{\varepsilon} = 20 > F_{n-1} \implies n = 7$$
 – количество итераций. Положим $k = 1$. 21. Вычислим

35.
$$\int_{3^3} Tak \, kak \, f(\alpha) < f(\beta) \text{ To}$$

3³. Так как
$$f(\alpha_3) < f(\beta_3)$$
, то $a_4 = a_2 = -1$,

$$b_4 = \beta_3 = -0.52381,$$

 $\beta_4 = \alpha_2 = -0.71429,$

$$\alpha_4 = a_4 + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}} \cdot (b_4 - a_4) = -0,809524.$$

.
$$4^3$$
. Проверим $k \neq n-2 \implies k=4$. Перейти к шагу 2. 2^4 . Вычислим

$$f\left(\alpha_4\right)=0,469495,\;f\left(\beta_4\right)=0,63556.$$
 $3^4.$ Так как $f\left(\alpha_4\right)< f\left(\beta_4\right),$ то

$$a_5 = a_4 = -1,$$

 $b_5 = \beta_4 = -0.71429,$

$$\beta_5 = \alpha_4 = -0,809524,$$

$$\alpha_5 = a_5 + \frac{F_{n-k-2}}{F} \cdot (b_5 - a_5) = -0,904763.$$

$$4^4$$
. Проверим $k \neq n-2 \implies k=5$. Перейти к шагу 2. · 2^5 . Вычислим

4*. Проверим
$$k \neq n-2 \implies k = 5$$
. Переити 25. Вычислим

 3^5 . Tak kak $f(\alpha_5) < f(\beta_5)$, to

$$4^4$$
. Проверим $k \neq n-2 \implies k=5$. Перейти к шагу 2 · 2^5 . Вычислим

гислим
$$f(\alpha_s) = 0.259365, \ f(\beta_s) = 0.469495.$$

 $a_6 = a_5 = -1$

 $b_6 = \beta_5 = -0.809524$ $\beta_6 = \alpha_5 = -0.904763$

 $\alpha_6 = a_6 + \frac{F_{n-k-2}}{F} \cdot (b_6 - a_6) = -0,90476.$

$$(R_s) = 0.469495$$
.

оверим
$$k \neq n-2 \implies k = 1$$

$$4^5$$
. Проверим $k \neq n-2 \implies k = 6$. Перейти к шагу 2.

26. Вычислим
$$f(\alpha_{\epsilon}) = 0.259367, f(\beta_{\epsilon}) = 0.259365.$$

$$f(\alpha_6) = 0,259367, f(\beta_6) = 0,$$

ерим $k = n - 2$. Перейти к шагу 5

$$4^6$$
. Проверим $k=n-2$. Перейти к шагу 5. 5. Положим

5. Положим
$$\alpha_7 = \alpha_6 = -0.904762, \ f(\alpha_7) = 0.259367,$$

$$\alpha_7 = \alpha_6 = -0.904762, \ f(\alpha_7) = 0.259367,$$

 $\beta_7 = \alpha_7 + \delta = -0.864762, \ f(\beta_7) = 0.353319.$

6. Так как
$$f(\alpha_7) \le f(\beta_7)$$
, то $a_7 = a_6 = -1$,

 $b_7 = \beta_7 = -0.864762$.

Следовательно, $x^* = \frac{a_7 + b_7}{2} = -0,932381, f(x^*) = 0,189449.$

СХОДИМОСТЬ

Метод половинного деления

Характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле $R(N) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}}$ N — количество вычислений функции

Метод золотого сечения

Характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле $R(N) = (0.618)^{N-1}$

Метод Фибоначчи

Характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле $R(N) = \frac{1}{F_N}$

Сходимость

<u>Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления)</u> — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

Метод Ньютона

инструментальные переменные (укравляемые переменные, управляемые переменные, управляемые переменные, управления)— это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инс**труме**нтальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения $(x_i \in Z)$,
- либо натуральные значения (x_i ∈ N),
 либо булевские (x_i ∈ B, B = {0,1}).

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $x\in \mathcal{H}^n$ или $x\in Z^n$, или $x\in N^n$, или $x\in B^n$. Возможны также смещенные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

Выберем начальную точку X_0

<u>Мнструментальные переменные (управляемые переменные,</u> <u>Мистенные</u> — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение; по своему усмотрению.

Обычно в качестве J инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения $(x_i \in Z)$,
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$,
- либо булфвежие ($x_i \in B, B = \{0,1\}$). $f''(x_0) > 0$

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ или $x \in \mathbb{Z}^n$, или $x \in \mathbb{N}^n$, или $x \in \mathbb{R}^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

Достаточное условие надежной работы метода Ньютона

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению. (1, 1) Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),

- либо целочисленные значения $(x_i \in Z)$, - либо натуральные значения $(x_i \in N)$, - либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\})$.

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный векторизования $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ или $x \in \mathbb{Z}^n$, или $x \in \mathbb{N}^n$, или $x \in \mathbb{R}^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

Метод Ньютона

<u>Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления)</u> — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения $(x_i \in Z)$,
- либо натуральные значения $(x_i \in N)$,
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

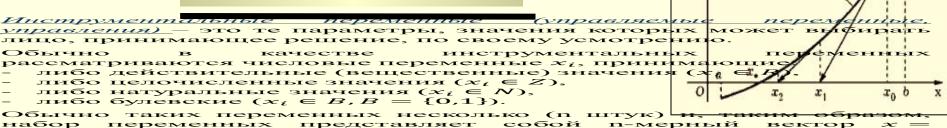
Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $x\in R^n$ или $x\in Z^n$, или $x\in N^n$, или $x\in B^n$.

Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, "натуральные

 $f'(x_0)$

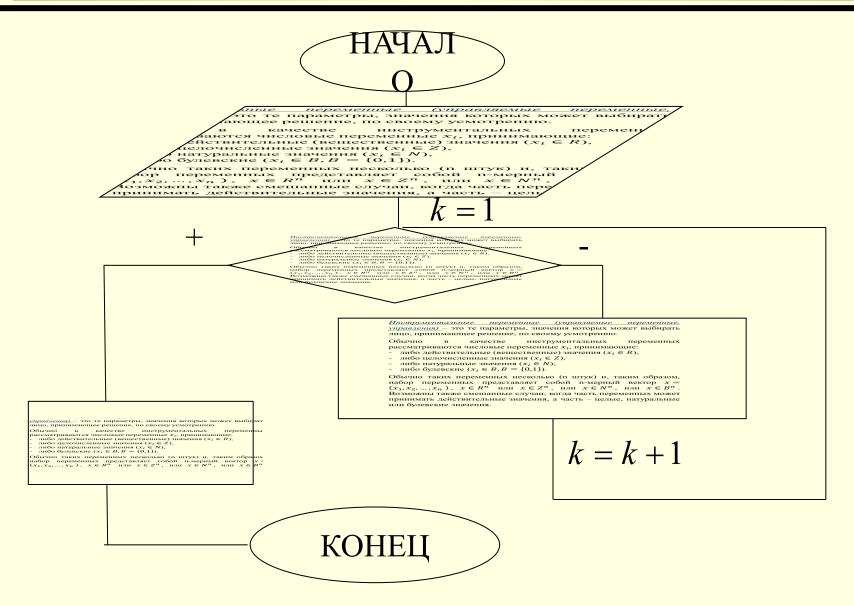
или булевски

Сходимость



 (x_1,x_2,\dots,x_n) , $x\in R^n$ или $x\in Z^n$, или $x\in N^n$, или $x\in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные

Метод Ньютона



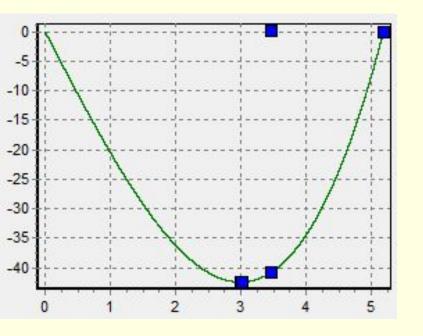
ПРИМЕР

k	x_k	$\left x_{k}-x_{k-1}\right $
0	-1	(
1	-0,5	0,5
2	-0,25	0,25
3	-0,125	0,125
4	-0,0625	0,0625

Основная расчетная формула: $x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$.

- 0. Зададим начальный интервал неопределенности: $x \in [-1;1]$. Положим $\varepsilon = 0,1$. Вычислим $f'(x) = 3x^2$, f''(x) = 6x, f'''(x) = 6.
- 1. Так как f'(a) = f'(-1) = 3, f'''(a) = f'''(-1) = 6, то $f'(a) \cdot f'''(a) > 0 \implies x_0 = a = -1$.
- 2¹. Вычислим $x_1 = x_0 \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = -0, 5.$
- 3^1 . Проверим условие выхода $|x_1 x_0| = 0, 5 > \varepsilon = 0, 1$. Перейдем к шагу 2.
- 2². Вычислим $x_2 = x_1 \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = -0,25$.
- 3^2 . Проверим условие выхода $|x_2 x_1| = 0, 25 > \varepsilon = 0, 1$. Перейдем к шагу 2.
- 2³. Вычислим $x_3 = x_2 \frac{f'(x_2)}{f''(x_2)} = -0,125$.
- 3^3 . Проверим условие выхода $|x_3 x_2| = 0.125 > \varepsilon = 0.1$. Перейдем к шагу 2.
- 24. Вычислим $x_4 = x_3 \frac{f'(x_3)}{f''(x_3)} = -0,0625.$
- 3^4 . Проверим условие выхода $|x_4 x_3| = 0,0625 \le \varepsilon = 0,1$.
- 4. Следовательно, $x^* = \frac{x_3 + x_4}{2} = -0,09375, f(x^*) = 0,999176.$

$$V(h) = \frac{\pi}{4}(27h - h^3) \to \max, \ 0 < h < 3\sqrt{3}$$

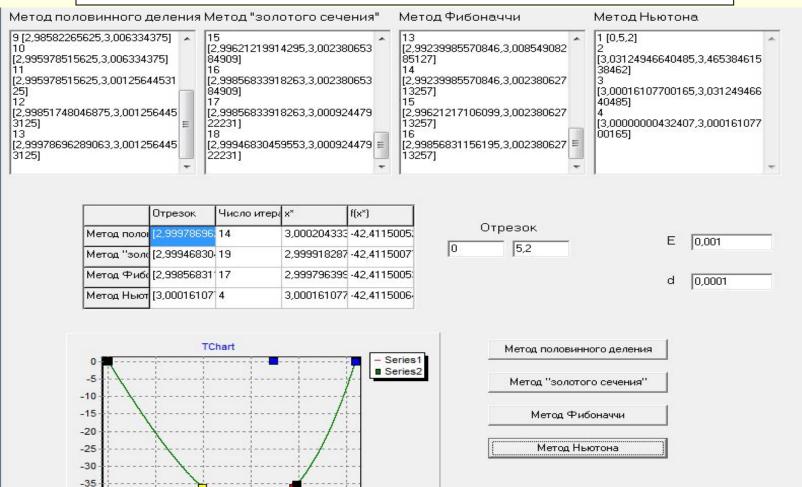


1 [0,5,2] 2 [3,03124946640485,3,46538461538462] 3 [3,00016107700165,3,03124946640485] 4 [3,00000000432407,3,00016107700165]

$$x^* \approx 3,000161$$
 $f(x^*) \approx 42,4115$

Программная реализация

$$V(h) = -\frac{\pi}{4}(27h - h^3) \rightarrow \min, \ 0 < h < 3\sqrt{3}$$



-40

Вывод

$$V(h) = -\frac{\pi}{4}(27h - h^3) \rightarrow \min, \ 0 < h < 3\sqrt{3}$$

	отрезок	число итераций	h	V(h)
Метод половинного деления	[2,999786962 89063,3,0012 564453125]	13	3,000204	42,4115
Метод золотого сечения	[2,999468304 59553,3,0009 2447922231]	18	2,999918	42,4115
Метод Фибоначчи	[2,998568311 56195,3,0023 8062713257]	16	2,999796	42,4115
Метод Ньютона	[3,000000004 32407,3,0001 6107700165]	4	3,000161	42,4115

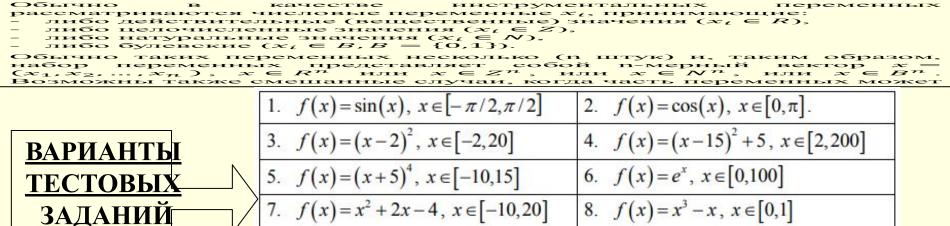
Точное решение

$$h=3, V(h)=\frac{27\pi}{2}$$

Работа: «Методы одномерного поиска»

ЦЕЛЬ Ознакомиться с методами одномерного поиска. Сравнить разд**РАБОЕТЫ** горитмы по эффективности на тестовых примерах.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ



СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

10. $f(x) = -x/e^x$, $x \in [0,3]$

12. $f(x) = x^4 / \ln x$, $x \in [1.1, 1.5]$

14. $f(x) = xe^{-2x}, x \in [-2, 6]$

9. $f(x) = x^5 - x^2, x \in [0,1]$

11. $f(x) = x^4 - x, x \in [0,1]$

13. $f(x) = xe^{-x}, x \in [-2, 6]$

- титульный лист; цель работы; задание;
- таблицы с результатами исследований по каждому методу, где должны быть отражены границы и длины интервалов на каждой итерации; соотношение длины интервала на k+1 итерации к длине интервала на k итерации; 55
- график зависимости количества вычислений целевой функции от логарифма задаваемой точности;
 выводы по всем пунктам задания.

Вопросы для проверки знаний

- Определения отрезка, выпуклого множества, выпуклой (строго выпуклой) функции, квазивыпуклой (строго квазивыпуклой) функции, унимодальной функции.
- Прямые методы минимизации функций одной переменной. Теорема о сокращении интервала неопределённости.
- Метод половинного деления для решения задач минимизации функции одной переменной: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.
- Метод золотого сечения для решения задач минимизации функции одной переменной: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.
- Метод Фибоначчи для решения задач минимизации функции одной переменной: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.
- Метод Ньютона для решения задач минимизации функции одной переменной: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример. 56

Примеры тестовых заданий для проверки знаний

<u>Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления)</u> — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i , принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения $(x_i \in R)$,
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские $(x_i \in B, B = \{0,1\}).$

Обычно таких переменных несколько (п штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой п-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

Примеры тестовых заданий для проверки знаний

- 4) В ряде чисел Фибоначчи каждое последующее число равно двух предыдущих
- А. частному; В. разности; С. сумме; D. произведению.
- 5) Итерационный процесс в методе Ньютона описывается формулой:

A.
$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{2f'(x^k)}$$
; B. $x^{k+1} = x^k + 2\frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$; C. $x^{k+1} = x^k - \frac{f'(x^k)}{f''(x^k)}$; D. $x^{k+1} = x^k + \frac{f'(x^k)}{f''(x^k)}$.

6) Укажите соответствие между прямыми методами решения задач поиска экстремума и их определением:

Метод золотого сечения

метод поиска экстремума путем последовательного деления отрезка пополам

Метод Фибоначчи

метод, основанный на делении отрезка на две неравные части так, что отношение всего отрезка к большей части равно отношению большей части к меньшей

Метод половинного деления метод, заключающийся в том, что каждая последующая точка выбирается симметрично по отношению к точке, которая осталась от предыдущего эксперимента и попала в оставшийся интервал

- 7) К прямым методам нахождения минимума функции одной переменной не относят:
- А. метод половинного деления; В. метод золотого сечения; С. метод Фибоначчи;
- D. метод Ньютона