Слайд-лекции представлены по следующим разделам

- Предмет и история развития методов оптимизации. Общая постановка задач оптимизации и основные положения. Теорема Вейерштрасса о достижении нижней грани функции на множестве.

- Методы минимизации функций одной переменной: деление отрезка пополам, метод золотого сечения, метод Фибоначчи, метод Ньютона.

- Методы минимизации функций многих переменных: метод наискорейшего спуска, метод сопряженных градиентов, метод конфигураций, метод Ньютона.

- Задача линейного программирования. Симплекс-метод. Элементы двойственности в линейном программировании. Целочисленное программирование. Постановка и алгоритмы решения транспортных задач.

- Элементы выпуклого анализа. Теорема Куна-Таккера. Понятие о двойственной задаче (основные теоремы).

- Методы условной оптимизации. Правило множителей Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств. Метод штрафных функций. Метод проекции градиента.

Цель курса:

– Изучение ряда базовых алгоритмов, которые используются для решения конечномерных задач оптимизации.
– Получение теоретических и концептуальных представлений, достаточных для понимания, оценки этих алгоритмов и, если необходимо, создания новых.

Предмет и история развития методов оптимизации. Общая постановка задач оптимизации и основные положения.

Оптимизация (по латыни optimus – наилучший) - целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях.

В 18 веке были заложены математические основы оптимизации (вариационное исчисление, численные методы и др.) Однако до второй половины 20 века методы оптимизации во многих областях науки и техники применялись редко, поскольку практическое использование математических методов оптимизации требовало огромной вычислительной работы, которую без ЭВМ реализовать было крайне трудно, а в ряде случаев - невозможно.

Постановка задачи оптимизации предполагает наличие:

- объекта задачи оптимизации;
- набора независимых параметров (переменных), описывающих данную задачу;
- условий (часто называемых ограничениями), которые характеризуют приемлемые значения независимых переменных;
- скалярной меры "качества", носящей название критерия оптимизации или целевой функции, и зависящей от переменных оптимизации.

Решение оптимизационной задачи - это поиск определенного набора значений переменных, которому отвечает оптимальное значение критерия оптимизации.

Формализация задачи оптимизации

1. Определяем искомые переменные:
   - Что нужно найти?
   - Что можно изменять, чем можно управлять при решении задачи?

2. Определяем допустимое множество:
   - Какие есть ограничения на выбранные переменные?

3. Определяем целевую функцию:
   - Что является показателем качества решения?
   - Как этот показатель зависит от выбранных переменных?

Формализация задачи оптимизации

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Формализация задачи оптимизации

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Формализация задачи оптимизации

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Общая постановка задачи оптимизации

Постановка задачи оптимизации содержит

- целевую функцию f(x), где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, определенную на n-мерном евклидовом пространстве R^n. Ее значения характеризуют степень достижения цели, во имя которой поставлена или решается задача;
- множество допустимых решений $X \in R^n$, среди элементов которого осуществляется поиск.

$$
\begin{cases}
f(x_1,\dots,x_n) \Rightarrow \max \quad \text{по} \quad x_1,\dots,x_n: \\
g_1(x_1,\dots,x_n) \le b_1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
g_m(x_1,\dots,x_n) \le b_m, \\
x_1,\dots,x_n \ge 0,
\end{cases}
$$

В векторной форме

$$
\begin{cases}
f(\mathbf{x}) \Rightarrow \max \quad \text{по} \quad \mathbf{x}: \\
\mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{b}, \\
\mathbf{x} \ge \mathbf{0}.
\end{cases}
$$

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

- прямые ограничения

- функциональные ограничения

Примеры постановок задач оптимизации

Площадь поверхности сферы равна 27π. Какова высота цилиндра наибольшего объема, вписанногов эту сферу?

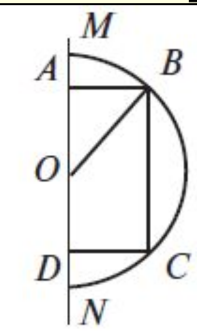
Обозначим высоту цилиндра AD=h, OB=R.

По условию $S = 4\pi R^2 = 27\pi \Rightarrow R^2 = \dfrac{27}{4}, \; R = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Из $\Delta AOB : \mathrm{AB}^2 = OB^2 - OA^2 = \dfrac{27 - h^2}{4}$

Объем цилиндра

$$V(h) = \pi AB^2 h = \frac{\pi}{4}(27h - h^3)$$



Цилиндр, вписанный в сферу

По смыслу задачи

$$0 < h < 2R, \; 0 < h < 3\sqrt{3}$$

$$\boxed{V(h) = \frac{\pi}{4}(27h - h^3) \to \max, \; 0 < h < 3\sqrt{3}}$$

Аналитическое решение задачи оптимизации

$$V(h) = \frac{\pi}{4}(27h - h^3) \to \max, \;\; 0 < h < 3\sqrt{3}$$

Производная $V'(h) = \dfrac{3\pi}{4}(9 - h^2) = 0 \Rightarrow h = 3$

Вблизи h=3 производная $V'(h)$ меняет знак с “+” на “-”, значит при этой высоте объем цилиндра будет наибольшим

$$h = 3, \;\; V(h) = \frac{27\pi}{2}$$

Модель старинной русской задачи

Пошла баба на базар, на людей посмотреть, да кое-что продать. Сколько надо взять бабе на базар для продажи живых гусей, уток и кур, чтобы выручить как можно больше денег, если она может взять товара не более P килограмм и известно, что:

- масса одной курицы – b1 кг, стоимость – c1 руб.;
- масса одной утки – b2 кг, стоимость – c2 руб.;
- масса одного гуся – b3 кг, стоимость – c3 руб.

Модель

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Модель

x – длина стороны квадратов, вырезаемых по углам листа жести

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, ... ляет собой n-мерный вектор $x =$ ... $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. ... случаи, когда часть переменных может ... ачения, а часть — целые, натуральные

Примеры задач оптимизации

1. Завод выпускает три типа деталей А, В и С. Детали каждого типа можно изготовить на любой из двух имеющихся на заводе производственных линий, но расходы на работу каждой линии зависят от типа производимой на ней детали. На завод поступил заказ на производство 50 деталей А, 40 деталей В и 15 деталей С со сроком выполнения 10 суток. Необходимо составить такой план загрузки линий, чтобы суммарные затраты завода были минимальными. Данные по производительности линий и затратам на производство в зависимости от типа деталей приведены в таблице.

Тип продукции	Производительность, шт./ сутки		Затраты на работу линий, ден.ед./сутки	
	1 линия	2 линия	1 линия	2 линия
Деталь А	6	4	200	350
Деталь В	5	6	150	200
Деталь С	4	3	400	250

2. Студент Коля любит ходить по ночным клубам и в то же время получать зачеты. Предельные полезности ночи в клубе и зачета известны и постоянны. Однако Коля обладает известным ограниченным бюджетом и ему приходится распределять его на клубы и репетиторов, так как сам Коля подготовиться не может. Если Коля днем занимается, то ночью он спит; если он ночью в клубе, то днем он заниматься не может. Стоимость одной ночи в клубе и одного дня с репетитором известны. Коля также не может выносить более определенного количества клубов в неделю, так как он начинает себя плохо чувствовать, и не может нанимать сверх определенного числа репетиторов в неделю, так как ему становится скучно. Определите, сколько суток в неделю Коле необходимо уделить клубам и сколько – подготовке к зачетам, чтобы максимизировать свою полезность.

3. Девушка решила похудеть и выбрала модную диету, в которой разрешено питаться только двумя продуктами P и Q (овсянка и творог). Суточное питание этими продуктами должно давать не более 14 единиц жира (чтобы похудеть), но не менее 300 калорий. На упаковке продукта P написано, что в одном килограмме этого продукта содержится 15 единиц жира и 150 калорий, а на упаковке с продуктом Q - 4 единицы жира и 200 калорий соответственно. При этом цена 1 килограмма продукта P равна 15 руб., а 1 кг продукта Q - 25 руб. В какой пропорции нужно брать эти продукты для того, чтобы выдержать условия диеты и истратить как можно меньше денег?

Общая постановка задачи оптимизации

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Постановка задачи поиска минимума функции содержит

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные
Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).
Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Основные положения задачи оптимизации

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Замечания

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

2) Глобальный экстремум всегда является одновременно локальным, но не наоборот.

Основные положения задачи оптимизации

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
– либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
– либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
– либо натуральные значения ($x_i \in N$),
– либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
– либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
– либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
– либо натуральные значения ($x_i \in N$),
– либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
– либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
– либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
– либо натуральные значения ($x_i \in N$),
– либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Разрешимость задачи оптимизации

Теорема Вейерштрасса

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Следовательно, задача оптимизации разрешима, если выполняются следующие три условия:

1. Множество допустимых решений замкнуто;
2. Множество допустимых решений ограничено;
3. Целевая функция непрерывна на допустимом множестве.

Вопросы для проверки знаний

1) Предмет и история развития методов оптимизации.
2) Общая постановка задач оптимизации и основные положения.
3) Теорема Вейерштрасса о достижении нижней грани функции на множестве.

Методы безусловной минимизации функций одной переменной

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

1-ОЕ ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

2-ОЕ ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения

Методы безусловной минимизации функций одной переменной

Правило исследования функции на экстремум

0. Найти область определения функции y=f(x);
1. Найти критические точки функции y=f(x);
2. Выбрать те, которые являются внутренними точками области определения функции;
3. Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от исследуемой внутренней критической точки или знак производной второго порядка в исследуемой внутренней критической точке;
4. Найти экстремумы функции y=f(x)

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

Методы безусловной минимизации функций одной переменной

Пример

$f(x) = x^3 - 3 \cdot x + 1 \quad \to \quad \min, \quad x \in [-3, 3]$.

Решение

1). $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 3$; $\qquad 3 \cdot x^2 - 3 = 0$.

Стационарные точки: $x_1 = -1$;

$x_2 = 1$.

2). Вычисляем значения функции в стационарных точках и на концах отрезка:

$x = -3; \quad f(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3) + 1 = -17;$

$x = -1; \quad f(-1) = 3;$

$x = 1; \quad f(1) = -1;$

$x = 3; \quad f(3) = 1.$

3). Минимальное значение функции

$f_{\min} = \min\{-17, 3, -1, 1\} = -17$;

точка минимума $x^* = -3$.

Методы безусловной минимизации функций одной переменной

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Прямые методы одномерного поиска

Поскольку задачи максимизации и минимизации легко преобразуются одна в другую, то в дальнейшем будем рассматривать только задачи минимизации.

Задача

Минимизировать функцию одной переменной f(x) при условии $a \le x \le b$, то есть найти $x^* \in [a,b]$ такую что $f(x^*) \le f(x)$ для $\forall x \in [a,b]$.

Интервал $[a,b]$ называется интервалом неопределенности; функция f (x) называется минимизирующей или целевой функцией.

Прямые методы одномерного поиска

Определение

Отрезком, соединяющим две точки x_1 и x_2, называется множество точек x, удовлетворяющих уравнению $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, где $0 \le \lambda \le 1$.

Определение

Множество точек X называется выпуклым, если вместе с любыми двумя его точками ему принадлежит и отрезок, соединяющий эти две точки.

Пересечение выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Прямые методы одномерного поиска

Определение

Функция f(x), заданная в выпуклой области Q, называется выпуклой или вогнутой в этой области, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in Q$ и для любого числа $0 \le \lambda \le 1$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$ -для выпуклой функции;

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$ -для вогнутой функции. (1)

Определение

Если неравенства (1) выполняются как строгие, то функция f(x) называется строго выпуклой (вогнутой).

Прямые методы одномерного поиска

Определение

Функция f(x), определенная на непустом выпуклом множестве X, называется квазивыпуклой, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ и для любого числа $0 < \lambda < 1$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \max\{f(x_1), f(x_2)\} \qquad (2)$$

Функция f(x) называется квазивогнутой, если – f(x) – квазивыпуклая функция.

Определение

Если неравенство (2) выполняется как строгое, то функция f(x) называется строго квазивыпуклой.

Прямые методы одномерного поиска

Определение

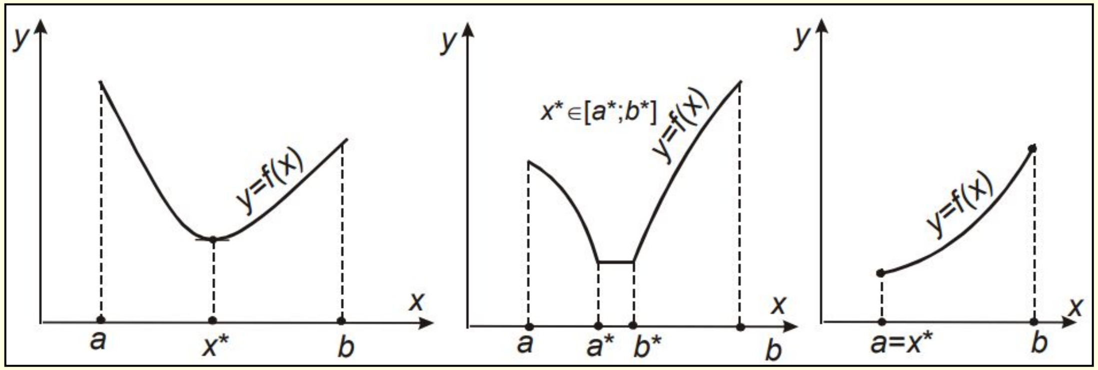
Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Другими словами функция f(x) является унимодальной в данной области, если в этой области имеет единственный экстремум, с увеличением x слева от x* она монотонно убывает, справа – монотонно возрастает

Графики унимодальных функций



Прямые методы одномерного поиска

Теорема

f(x)-унимодальна или выпуклая или строго квазивыпуклая в интервале $[a,b]$. Пусть $\alpha,\beta\in[a,b]$ такие, что $\alpha<\beta$.

Если $f(\alpha)>f(\beta)$, то $f(z)\ge f(\beta)$ для любого $z\in[a,\alpha)$.

Если $f(\alpha)\le f(\beta)$, то $f(z)\ge f(\alpha)$ для любого $z\in(\beta,b]$.

Доказательство

Пусть $f(\alpha)>f(\beta)$ и $z\in[a,\alpha)$.

Предположим, что утверждение теоремы не верно, то есть пусть $f(z)<f(\beta)$.

Так как α можно представить в виде выпуклой комбинации точек z, β, то существует $\lambda\in(0;1)$ такое, что

$$\alpha=\lambda z+(1-\lambda)\beta$$

Учитывая, что f(x) строго квазивыпуклая функция, имеем $f(\alpha) < \max\{f(z), f(\beta)\} = f(\beta)$.

Но это противоречит утверждению, что $f(\alpha) > f(\beta)$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Ч.Т.Д.

Аналогично доказывается второе неравенство теоремы.

МЕТОДЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ ОТРЕЗКОВ

Метод половинного деления

Метод «золотого» сечения

Метод Фибоначчи

Методы исключения отрезков

Стратегия поиска минимума функции одной переменной

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Выбор начального интервала неопределенности

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Выбор начального интервала неопределенности

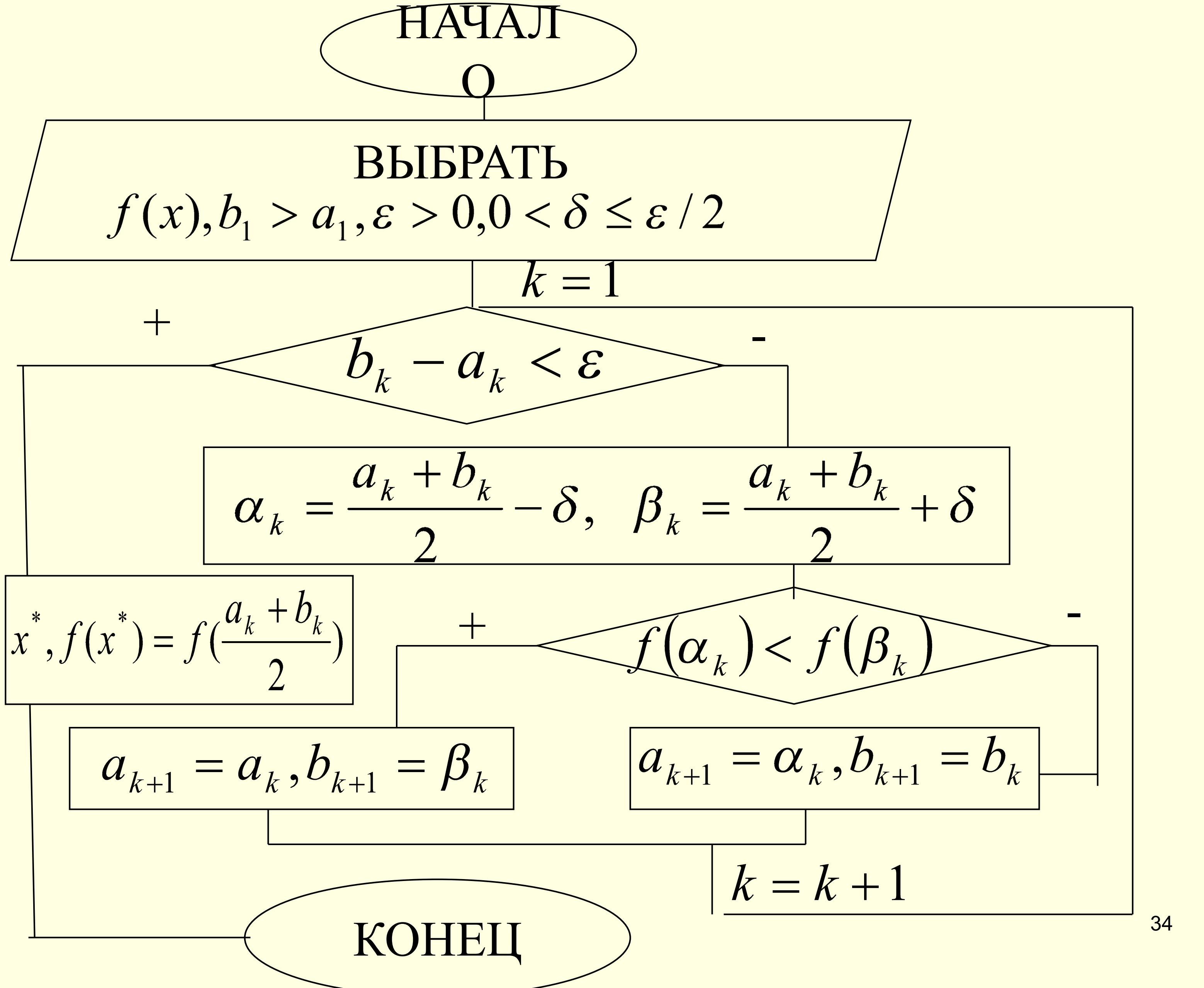
Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

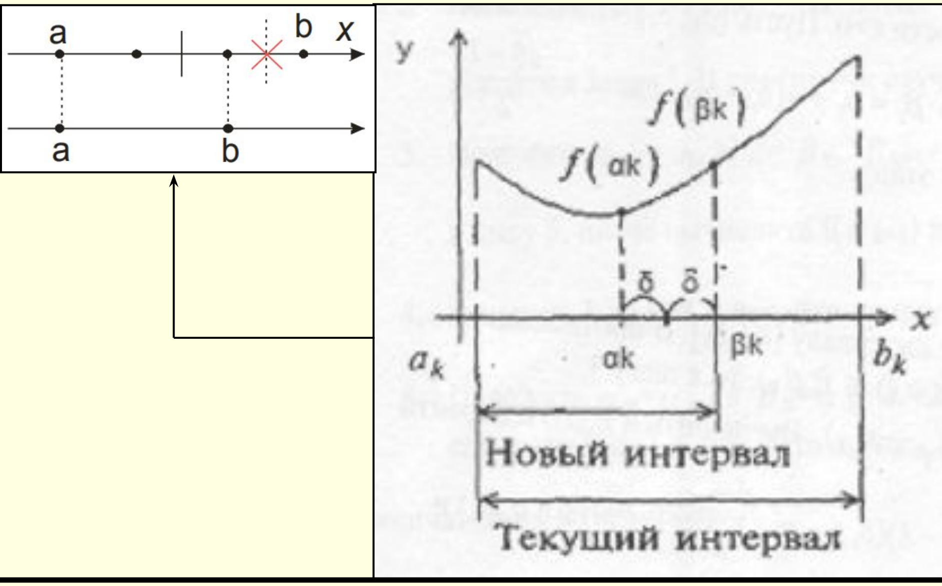
Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

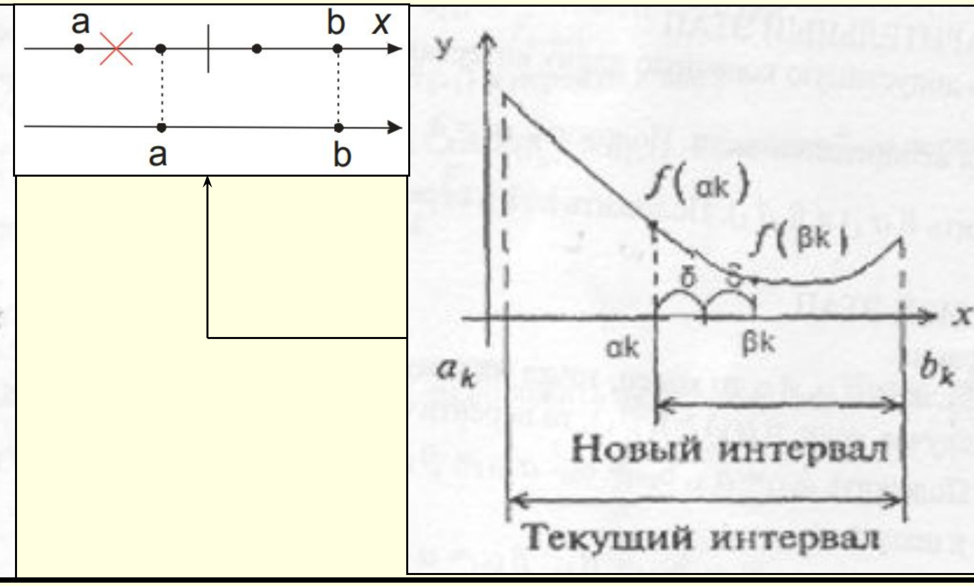
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

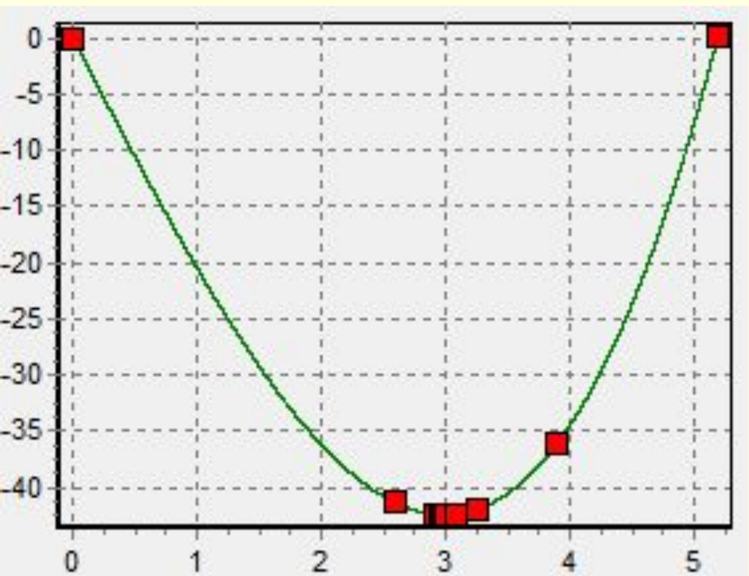
Метод половинного деления







$$V(h) = \frac{\pi}{4}(27h - h^3) \to \max, \;\; 0 < h < 3\sqrt{3}$$



1 [0,5,2]
2 [2,5999,5,2]
3 [2,5999,3,90005]
4 [2,5999,3,250075]
5 [2,9248875,3,250075]
6 [2,9248875,3,08758125]
7 [2,9248875,3,006334375]
8 [2,9655109375,3,006334375]
9 [2,98582265625,3,006334375]
10 [2,995978515625,3,006334375]
11 [2,995978515625,3,0012564453125]
12 [2,99851748046875,3,0012564453125]
13 [2,99978696289063,3,0012564453125]

$x^* \approx 3{,}000204$

$f(x^*) \approx 42{,}4115$

Метод половинного деления

ЗАМЕЧАНИЕ

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

ПРИМЕР

k	a_k	b_k	α_k	β_k	$f(\alpha_k)$	$f(\beta_k)$	$b_k - a_k$
1	–1	1	–0,04	0,04	0,0999936	1,000064	2
2	–1	0,04	–0,52	–0,44	0,859392	0,914816	1,04
3	–1	–0,44	–0,76	–0,68	0,561024	0,685568	0,56
4	–1	–0,68	–0,88	–0,8	0,318528	0,488	0,32
5	–1	–0,8	–0,94	–0,86	0,169416	0,363944	0,2
6	–1	–0,86	–0,97	–0,89	0,087327	0,295031	0,14
7	–1	–0,89	–0,985	–0,905	0,044328	0,258782	0,11
8	–1	–0,905	–	–	–	–	0,095

1. Зададим начальный интервал неопределенности: $x \in [-1;1]$. Положим $\delta = 0,04$, $\varepsilon = 0,1$.

2. Положим $k = 1$.

3¹. Проверим условие $b_1 - a_1 = 2 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4¹. Вычислим

$$\alpha_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} - \delta = -0,04,\ f(\alpha_1) = 0,999939,$$

$$\beta_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} + \delta = 0,04,\ f(\beta_1) = 1,000064.$$

5¹. Так как $f(\alpha_1) < f(\beta_1)$, то $a_2 = a_1 = -1$, $b_2 = \beta_1 = 0,04$. Положим $k = 2$ и перейдем к шагу 3.

3². Проверим условие $b_2 - a_2 = 1,04 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4². Вычислим

$$\alpha_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} - \delta = -0,52,\ f(\alpha_2) = 0,859392,$$

$$\beta_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} + \delta = -0,44,\ f(\beta_2) = 0,914816.$$

5². Так как $f(\alpha_2) < f(\beta_2)$, то $a_3 = a_2 = -1$, $b_3 = \beta_2 = -0,44$. Положим $k = 3$ и перейдем к шагу 3.

3³. Проверим условие $b_3 - a_3 = 0,56 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4³. Вычислим

$$\alpha_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} - \delta = -0,76,\ f(\alpha_3) = 0,561024,$$

$$\beta_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} + \delta = -0,68,\ f(\beta_3) = 0,685568.$$

5³. Так как $f(\alpha_3) < f(\beta_3)$, то $a_4 = a_3 = -1$, $b_4 = \beta_3 = -0,68$. Положим $k = 4$ и перейдем к шагу 3.

3⁴. Проверим условие $b_4 - a_4 = 0,32 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4⁴. Вычислим

$$\alpha_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} - \delta = -0,88,\ f(\alpha_4) = 0,318528,$$

$$\beta_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} + \delta = -0,8,\ f(\beta_4) = 0,488.$$

5⁴. Так как $f(\alpha_4) < f(\beta_4)$, то $a_5 = a_4 = -1$, $b_5 = \beta_4 = -0,8$. Положим $k = 5$ и перейдем к шагу 3.

3⁵. Проверим условие $b_5 - a_5 = 0,2 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4⁵. Вычислим

$$\alpha_5 = \frac{a_5 + b_5}{2} - \delta = -0,94,\ f(\alpha_5) = 0,169416,$$

$$\beta_5 = \frac{a_5 + b_5}{2} + \delta = -0,86,\ f(\beta_5) = 0,363944.$$

5⁵. Так как $f(\alpha_5) < f(\beta_5)$, то $a_6 = a_5 = -1$, $b_6 = \beta_5 = -0,86$. Положим $k = 6$ и перейдем к шагу 3.

3⁶. Проверим условие $b_6 - a_6 = 0,14 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4⁶. Вычислим

$$\alpha_6 = \frac{a_6 + b_6}{2} - \delta = -0,97,\ f(\alpha_6) = 0,087327,$$

$$\beta_6 = \frac{a_6 + b_6}{2} + \delta = -0,89,\ f(\beta_6) = 0,295031.$$

5⁶. Так как $f(\alpha_6) < f(\beta_6)$, то $a_7 = a_6 = -1$, $b_7 = \beta_6 = -0,89$. Положим $k = 7$ и перейдем к шагу 3.

3⁷. Проверим условие $b_7 - a_7 = 0,11 > \varepsilon = 0,1$. Перейдем к шагу 4.

4⁷. Вычислим

$$\alpha_7 = \frac{a_7 + b_7}{2} - \delta = -0,985,\ f(\alpha_7) = 0,04433,$$

$$\beta_7 = \frac{a_7 + b_7}{2} + \delta = -0,905,\ f(\beta_7) = 0,25878.$$

5⁷. Так как $f(\alpha_7) < f(\beta_7)$, то $a_8 = a_7 = -1$, $b_8 = \beta_7 = -0,905$. Положим $k = 8$ и перейдем к шагу 3.

3⁸. Проверим условие $b_8 - a_8 = 0,095 < \varepsilon = 0,1$. Следовательно, $x^* = \dfrac{a_8 + b_8}{2} = -0,9525$, $f(x^*) = 0,135838$.

Метод золотого сечения

НАЧАЛО

ВЫБРАТЬ $f(x), b_1 > a_1, \varepsilon > 0, \lambda = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\alpha_1 = a_1 + (1-\lambda)(b_1 - a_1), \quad \beta_1 = a_1 + \lambda(b_1 - a_1)$$

$k = 1$

$b_k - a_k < \varepsilon$

\+ / -

$f(\alpha_k) \le f(\beta_k)$

\+ / -

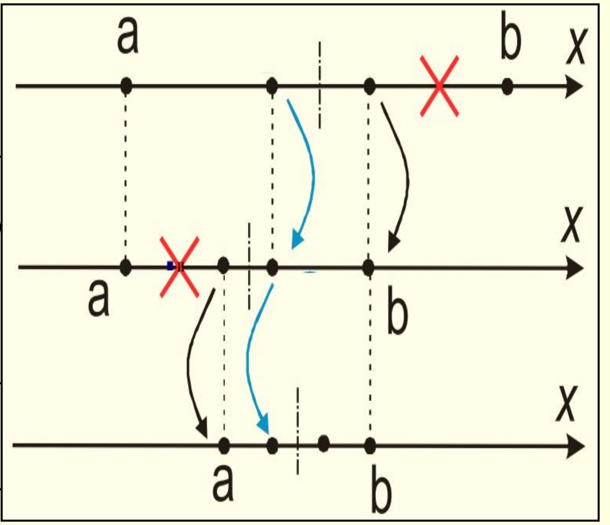
$$a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = \beta_k, \beta_{k+1} = \alpha_k, \alpha_{k+1} = a_{k+1} + (1-\lambda)(b_{k+1} - a_{k+1})$$

$$a_{k+1} = \alpha_k, b_{k+1} = b_k, \alpha_{k+1} = \beta_k, \beta_{k+1} = a_{k+1} + \lambda(b_{k+1} - a_{k+1})$$

$k = k + 1$

$$x^*, f(x^*) = f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right)$$

КОНЕЦ



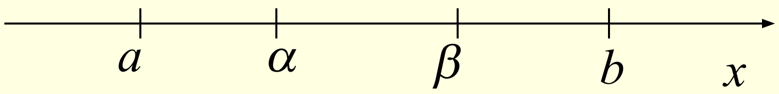
«Золотым сечением» отрезка называется деление отрезка на две части так, что отношение длин всего отрезка к длине больше части равно отношению длин большей части к меньшей

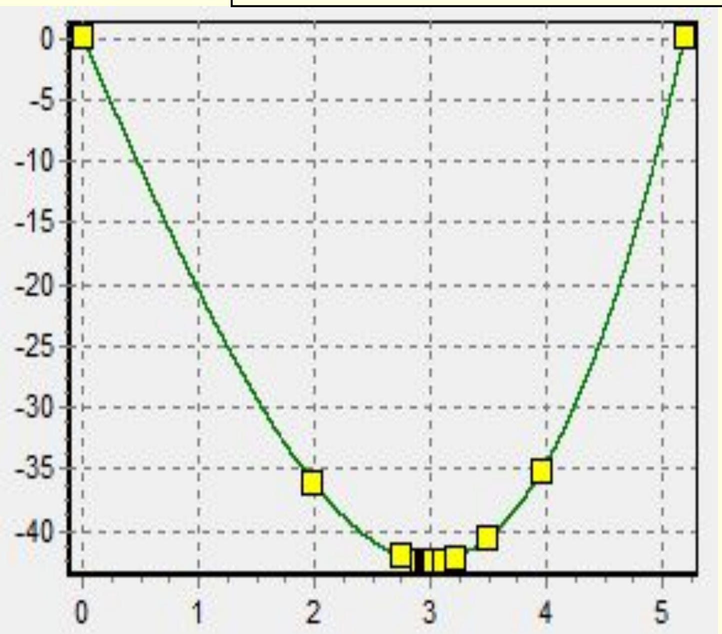
$$\frac{b-a}{b-y}=\frac{b-y}{y-a}$$

Золотое сечение отрезка производит две симметрично расположенные точки

$$\alpha=a+(1-\lambda)(b-a),\ \ \beta=a+\lambda(b-a),\ \ \lambda=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\boxed{V(h)=\frac{\pi}{4}(27h-h^3)\to\max,\ \ 0<h<3\sqrt{3}}$$





1 [0,5,2]
2 [1,98622325850055,5,2]
3 [1,98622325850055,3,97244651700109]
4 [2,74489303400219,3,97244651700109]
5 [2,74489303400219,3,50356280950383]
6 [2,74489303400219,3,21377674149945]
7 [2,92399067349508,3,21377674149945]
8 [2,92399067349508,3,10308831298797]
9 [2,92399067349508,3,03467910200656]
10 [2,96626989102515,3,03467910200656]
11 [2,96626989102515,3,00854910855523]
12 [2,98241911510389,3,00854910855523]
13 [2,99239988447649,3,00854910855523]
14 [2,99239988447649,3,00238065384909]
15 [2,99621219914295,3,00238065384909]
16 [2,99856833918263,3,00238065384909]
17 [2,99856833918263,3,00092447922231]
18 [2,99946830459553,3,00092447922231]

$$x^*\approx 2{,}999918$$

$$f(x^*)\approx 42{,}4115$$

Метод золотого сечения

ЗАМЕЧАНИЕ

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть — целые, натуральные или булевские значения.

ПРИМЕР

k	a_k	b_k	α_k	β_k	$f(\alpha_k)$	$f(\beta_k)$	$b_k - a_k$
1	–1	1	–0,23606	0,23606	0,986846	1,013154	2
2	–1	0,23606	–0,53032	–0,23606	0,850853	0,986846	1,23606
3	–1	–0,23606	–0,7112	–0,53032	0,640271	0,850853	0,76
4	–1	–0,53032	–0,8215	–0,7112	0,44556	0,640271	0,46968
5	–1	–0,7112	–0,8903	–0,8215	0,29442	0,44556	0,2888
6	–1	–0,8215	–0,93218	–0,8903	0,18998	0,29442	0,1785
7	–1	–0,8903	–0,9583	–0,93218	0,11996	0,18998	0,109744
8	–1	–0,93218	–0,97423	–0,9583	–	–	0,06782

1. Зададим начальный интервал неопределенности: $x \in [-1;1]$. Положим $\varepsilon = 0{,}1$, $\lambda = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}61803$, $(1-\lambda) = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = 0{,}38197$.

2. Положим $k = 1$.

3^1. Проверим условие $b_1 - a_1 = 2 > \varepsilon = 0{,}1$. Перейдем к шагу 4.

4^1. Вычислим

$$\alpha_1 = a_1 + (1-\lambda)\cdot(b_1 - a_1) = -0{,}23606,\ f(\alpha_1) = 0{,}986846,$$
$$\beta_1 = a_1 + \lambda\cdot(b_1 - a_1) = 0{,}23606,\ f(\beta_1) = 1{,}013154.$$

5^1. Так как $f(\alpha_1) \le f(\beta_1)$, то

$$a_2 = a_1 = -1,$$
$$b_2 = \beta_1 = 0{,}23606,$$
$$\beta_2 = \alpha_1 = -0{,}23606,$$
$$\alpha_2 = a_2 + (1-\lambda)\cdot(b_2 - a_2) = -0{,}53032.$$

Положим $k = 2$ и перейдем к шагу 3.

3^2. Проверим условие $b_2 - a_2 = 1{,}23606 > \varepsilon = 0{,}1$. Перейдем к шагу 4.

4^2. Вычислим

$$f(\alpha_2) = 0{,}850853, f(\beta_2) = 0{,}986176.$$

5^2. Так как $f(\alpha_2) \le f(\beta_2)$, то

$$a_3 = a_2 = -1,$$
$$b_3 = \beta_2 = -0{,}23606,$$
$$\beta_3 = \alpha_2 = -0{,}53032,$$
$$\alpha_3 = a_3 + (1-\lambda)\cdot(b_3 - a_3) = -0{,}7112.$$

Положим $k = 3$ и перейдем к шагу 3.

3^3. Проверим условие $b_3 - a_3 = 0{,}76 > \varepsilon = 0{,}1$. Перейдем к шагу 4.

4^3. Вычислим

$$f(\alpha_3) = 0{,}640271, f(\beta_3) = 0{,}850853.$$

5^3. Так как $f(\alpha_3) \le f(\beta_3)$, то

$$a_4 = a_3 = -1,$$
$$b_4 = \beta_3 = -0{,}53032,$$
$$\beta_4 = \alpha_3 = -0{,}7112,$$
$$\alpha_4 = a_4 + (1-\lambda)\cdot(b_4 - a_4) = -0{,}8215.$$

Положим $k = 4$ и перейдем к шагу 3.

3^4. Проверим условие $b_4 - a_4 = 0{,}46968 > \varepsilon = 0{,}1$. Перейдем к шагу 4

4^4. Вычислим

$$f(\alpha_4) = 0{,}44556, f(\beta_4) = 0{,}640271.$$

5^4. Так как $f(\alpha_4) \le f(\beta_4)$, то

$$a_5 = a_4 = -1,$$
$$b_5 = \beta_4 = -0{,}7112,$$
$$\beta_5 = \alpha_4 = -0{,}8215,$$
$$\alpha_5 = a_5 + (1-\lambda)\cdot(b_5 - a_5) = -0{,}890256.$$

Положим $k = 5$ и перейдем к шагу 3.

3^5. Проверим условие $b_5 - a_5 = 0{,}2888 > \varepsilon = 0{,}1$. Перейдем к шагу 4.

4^5. Вычислим

$$f(\alpha_5) = 0{,}29442, f(\beta_5) = 0{,}44556.$$

5^5. Так как $f(\alpha_5) \le f(\beta_5)$, то

$$a_6 = a_5 = -1,$$
$$b_6 = \beta_5 = -0{,}8215,$$
$$\beta_6 = \alpha_5 = -0{,}890256,$$
$$\alpha_6 = a_6 + (1-\lambda)\cdot(b_6 - a_6) = -0{,}93218.$$

Положим $k = 6$ и перейдем к шагу 3.

3^6. Проверим условие $b_6 - a_6 = 0{,}1785 > \varepsilon = 0{,}1$. Перейдем к шагу 4.

4^6. Вычислим

$$f(\alpha_6) = 0{,}18998, f(\beta_6) = 0{,}29442.$$

5^6. Так как $f(\alpha_6) \le f(\beta_6)$, то

$$a_7 = a_6 = -1,$$
$$b_7 = \beta_6 = -0{,}890256,$$
$$\beta_7 = \alpha_6 = -0{,}93218,$$
$$\alpha_7 = a_7 + (1-\lambda)\cdot(b_7 - a_7) = -0{,}9583.$$

Положим $k = 7$ и перейдем к шагу 3.

3^7. Проверим условие $b_7 - a_7 = 0{,}109744 > \varepsilon = 0{,}1$. Перейдем к шагу 4.

4^7. Вычислим

$$f(\alpha_7) = 0{,}11996, f(\beta_7) = 0{,}18998.$$

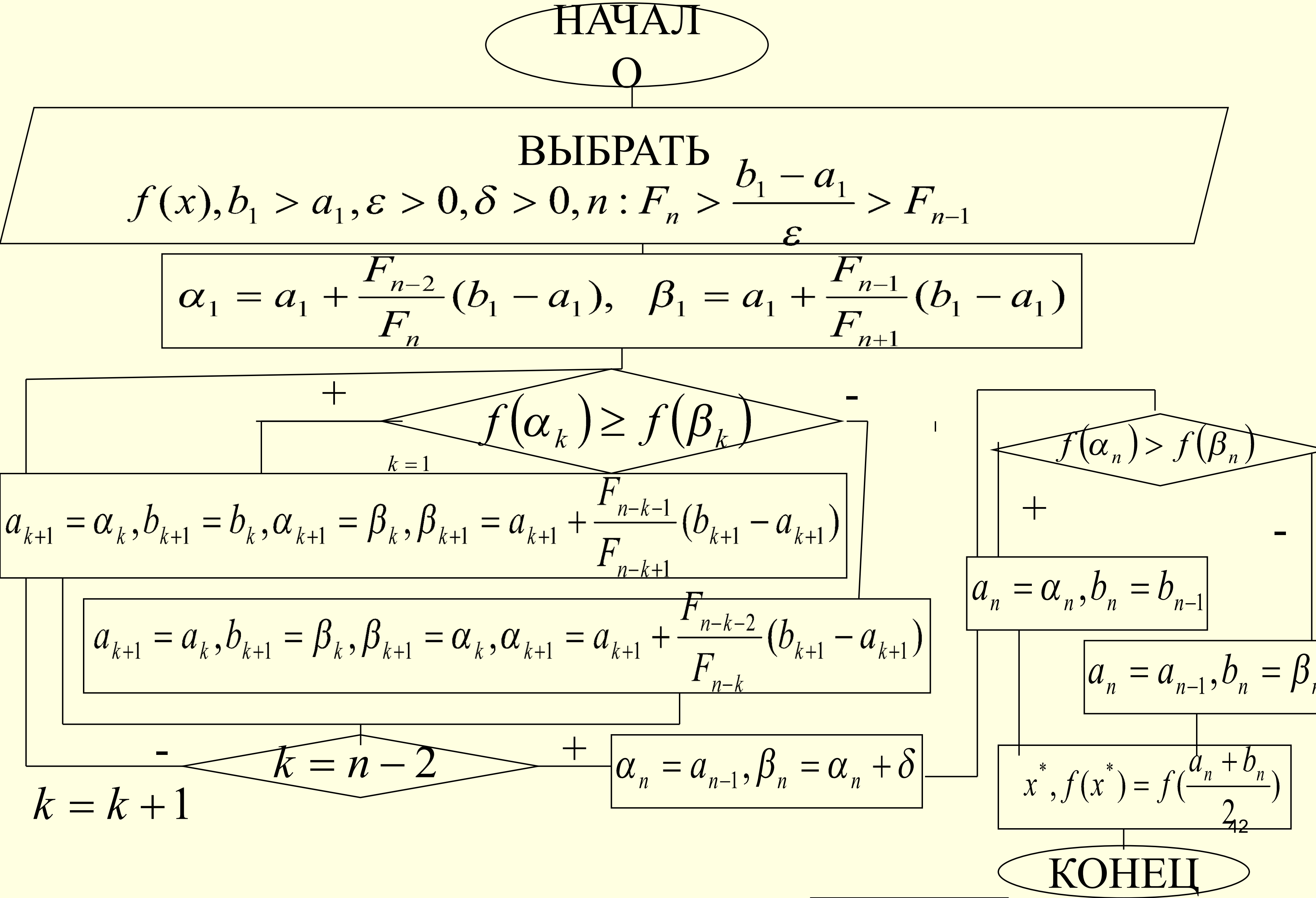
5^7. Так как $f(\alpha_7) \le f(\beta_7)$, то

$$a_8 = a_7 = -1,$$
$$b_8 = \beta_7 = -0{,}93218,$$
$$\beta_8 = \alpha_7 = -0{,}9583,$$
$$\alpha_8 = a_8 + (1-\lambda)\cdot(b_8 - a_8) = -0{,}97423.$$

Положим $k = 8$ и перейдем к шагу 3.

3^8. Проверим условие $b_8 - a_8 = 0{,}06782 < \varepsilon = 0{,}1$. Следовательно, $x^* = \dfrac{a_8 + b_8}{2} = -0{,}966089$, $f(x^*) = 0{,}0983218$.

Метод Фибоначчи

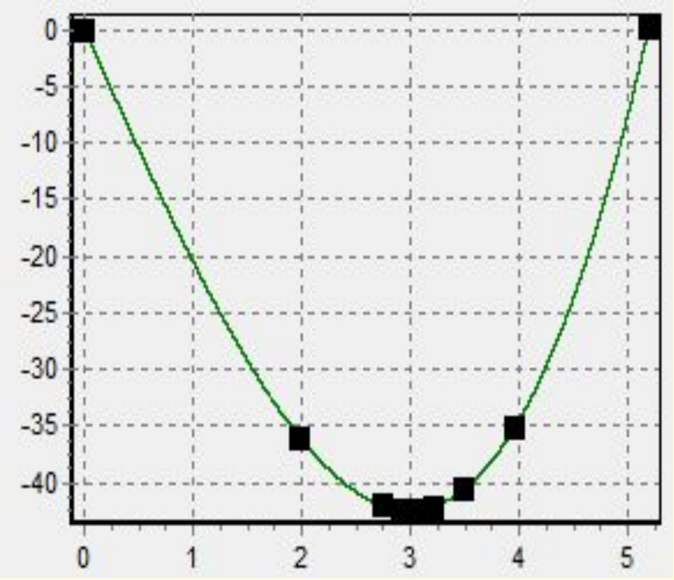


Метод Фибоначчи основан на последовательности Фибоначчи, которая определяется следующим образом: $F_{k+1} = F_{k-1} + F_k,\ \ k = 1,2,\ldots,\ \ F_0 = F_1 = 1$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597...

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{10-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\ \ где\ \ n = 1,2,\ldots$$

$$V(h) = \frac{\pi}{4}(27h - h^3) \to \max,\ \ 0 < h < 3\sqrt{3}$$



1 [0,5,2]
2 [1,98622320768662,5,2]
3 [1,98622320768662,3,97244652899663]
4 [2,74489298777015,3,97244652899663]
5 [2,74489298777015,3,50356281125395]
6 [2,74489298777015,3,21377673233568]
7 [2,92399063683997,3,21377673233568]
8 [2,92399063683997,3,1030882961552]
9 [2,92399063683997,3,03467907935246]
10 [2,96626985863631,3,03467907935246]
11 [2,96626985863631,3,00854908285127]
12 [2,9824190848553,3,00854908285127]
13 [2,99239985570846,3,00854908285127]
14 [2,99239985570846,3,00238062713257]
15 [2,99621217106099,3,00238062713257]
16 [2,99856831156195,3,00238062713257]

$$x^* \approx 2{,}999796$$

$$f(x^*) \approx 42{,}4115$$

Метод Фибоначчи

НЕДОСТАТКИ 1) Надо хранить избыточный набор чисел Фибоначчи либо многократно генерировать числа по мере необходимости; необходимость предварительной оценки требуемого числа итераций;

2) Метод Фибоначчи нелегко приспособить к часто используемому критерию останова, требующему, чтобы значения функции на окончательном интервале неопределенности разнились на величину меньше заданной погрешности

ПРИМЕР

k	a_k	b_k	α_k	β_k	$f(\alpha_k)$	$f(\beta_k)$	$b_k - a_k$
1	–1	1	–0,2381	0,2381	0,9865	1,0135	2
2	–1	0,2381	–0,52381	–0,2381	0,85628	0,9865	1,2381
3	–1	–0,2381	–0,71429	–0,52381	0,63556	0,85628	0,7619
4	–1	–0,52381	–0,8095	–0,71429	0,469495	0,63556	0,47619
5	–1	–0,71429	–0,904763	–0,8095	0,259365	0,469495	0,28571
6	–1	–0,8095	–0,904762	–0,904763	0,259367	0,259365	0,1905
7	–1	–0,86476	–0,904762	–0,864762	0,259367	0,353319	0,095238

Последовательность Фибоначчи: $F_0 = F_1 = 1,\ F_i = F_{i-2} + F_{i-1},\ i \ge 2,\ i \in Z.$

0. Зададим начальный интервал неопределенности: $x \in [-1;1]$. Положим $\delta = 0,04,\ \varepsilon = 0,1.$

1. $F_n > \dfrac{b_1 - a_1}{\varepsilon} = 20 > F_{n-1} \Rightarrow n = 7$ – количество итераций. Положим $k = 1$.

2^1. Вычислим

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_n} \cdot (b_1 - a_1) = -0,2381,\ f(\alpha_1) = 0,9865,$$

$$\beta_1 = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} \cdot (b_1 - a_1) = 0,2381,\ f(\beta_1) = 1,0135.$$

3^1. Так как $f(\alpha_1) < f(\beta_1)$, то

$$a_2 = a_1 = -1,$$
$$b_2 = \beta_1 = 0,2381,$$
$$\beta_2 = \alpha_1 = -0,2381,$$
$$\alpha_2 = a_2 + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}} \cdot (b_2 - a_2) = -0,52381.$$

4^1. Проверим $k \ne n-2 \Rightarrow k = 2$. Перейти к шагу 2.

2^2. Вычислим

$$f(\alpha_2) = 0,85628,\ f(\beta_2) = 0,9865.$$

3^2. Так как $f(\alpha_2) < f(\beta_2)$, то

$$a_3 = a_2 = -1,$$
$$b_3 = \beta_2 = -0,2381,$$
$$\beta_3 = \alpha_2 = -0,52381,$$
$$\alpha_3 = a_3 + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}} \cdot (b_3 - a_3) = -0,71429.$$

4^2. Проверим $k \ne n-2 \Rightarrow k = 3$. Перейти к шагу 2.

2^3. Вычислим

$$f(\alpha_3) = 0,63556,\ f(\beta_3) = 0,85628.$$

3^3. Так как $f(\alpha_3) < f(\beta_3)$, то

$$a_4 = a_3 = -1,$$
$$b_4 = \beta_3 = -0,52381,$$
$$\beta_4 = \alpha_3 = -0,71429,$$
$$\alpha_4 = a_4 + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}} \cdot (b_4 - a_4) = -0,809524.$$

4^3. Проверим $k \ne n-2 \Rightarrow k = 4$. Перейти к шагу 2.

2^4. Вычислим

$$f(\alpha_4) = 0,469495,\ f(\beta_4) = 0,63556.$$

3^4. Так как $f(\alpha_4) < f(\beta_4)$, то

$$a_5 = a_4 = -1,$$
$$b_5 = \beta_4 = -0,71429,$$
$$\beta_5 = \alpha_4 = -0,809524,$$
$$\alpha_5 = a_5 + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}} \cdot (b_5 - a_5) = -0,904763.$$

4^4. Проверим $k \ne n-2 \Rightarrow k = 5$. Перейти к шагу 2.

2^5. Вычислим

$$f(\alpha_5) = 0,259365,\ f(\beta_5) = 0,469495.$$

3^5. Так как $f(\alpha_5) < f(\beta_5)$, то

$$a_6 = a_5 = -1,$$
$$b_6 = \beta_5 = -0,809524,$$
$$\beta_6 = \alpha_5 = -0,904763,$$
$$\alpha_6 = a_6 + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}} \cdot (b_6 - a_6) = -0,90476$$

4^5. Проверим $k \ne n-2 \Rightarrow k = 6$. Перейти к шагу 2.

2^6. Вычислим

$$f(\alpha_6) = 0,259367,\ f(\beta_6) = 0,259365.$$

4^6. Проверим $k = n-2$. Перейти к шагу 5.

5. Положим

$$\alpha_7 = \alpha_6 = -0,904762,\ f(\alpha_7) = 0,259367,$$
$$\beta_7 = \alpha_7 + \delta = -0,864762,\ f(\beta_7) = 0,353319.$$

6. Так как $f(\alpha_7) \le f(\beta_7)$, то

$$a_7 = a_6 = -1,$$
$$b_7 = \beta_7 = -0,864762.$$

Следовательно, $x^* = \dfrac{a_7 + b_7}{2} = -0,932381,\ f(x^*) = 0,189449.$

СХОДИМОСТЬ

Метод половинного деления

Характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле

$$R(N) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}}$$

N – количество вычислений функции

Метод золотого сечения

Характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле

$$R(N) = (0{,}618)^{N-1}$$

N – количество вычислений функции

Метод Фибоначчи

Характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле

$$R(N) = \frac{1}{F_N}$$

N – количество вычислений функции

Сходимость

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Метод Ньютона

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

$[a,b]$

$f(x) = 0$

Выберем начальную точку x_0

Замечание

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

$f''(x)$

x_0

$f''(x^*) > 0$ $\quad f''(x_0) > 0$

x^*

Достаточное условие надежной работы метода Ньютона

$[a,b]$

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

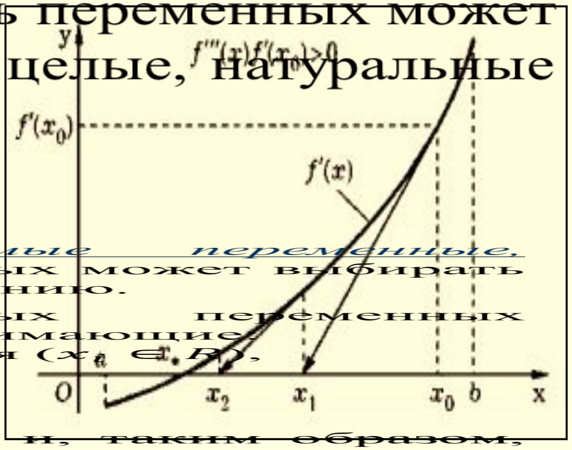
Метод Ньютона

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевски

Сходимость

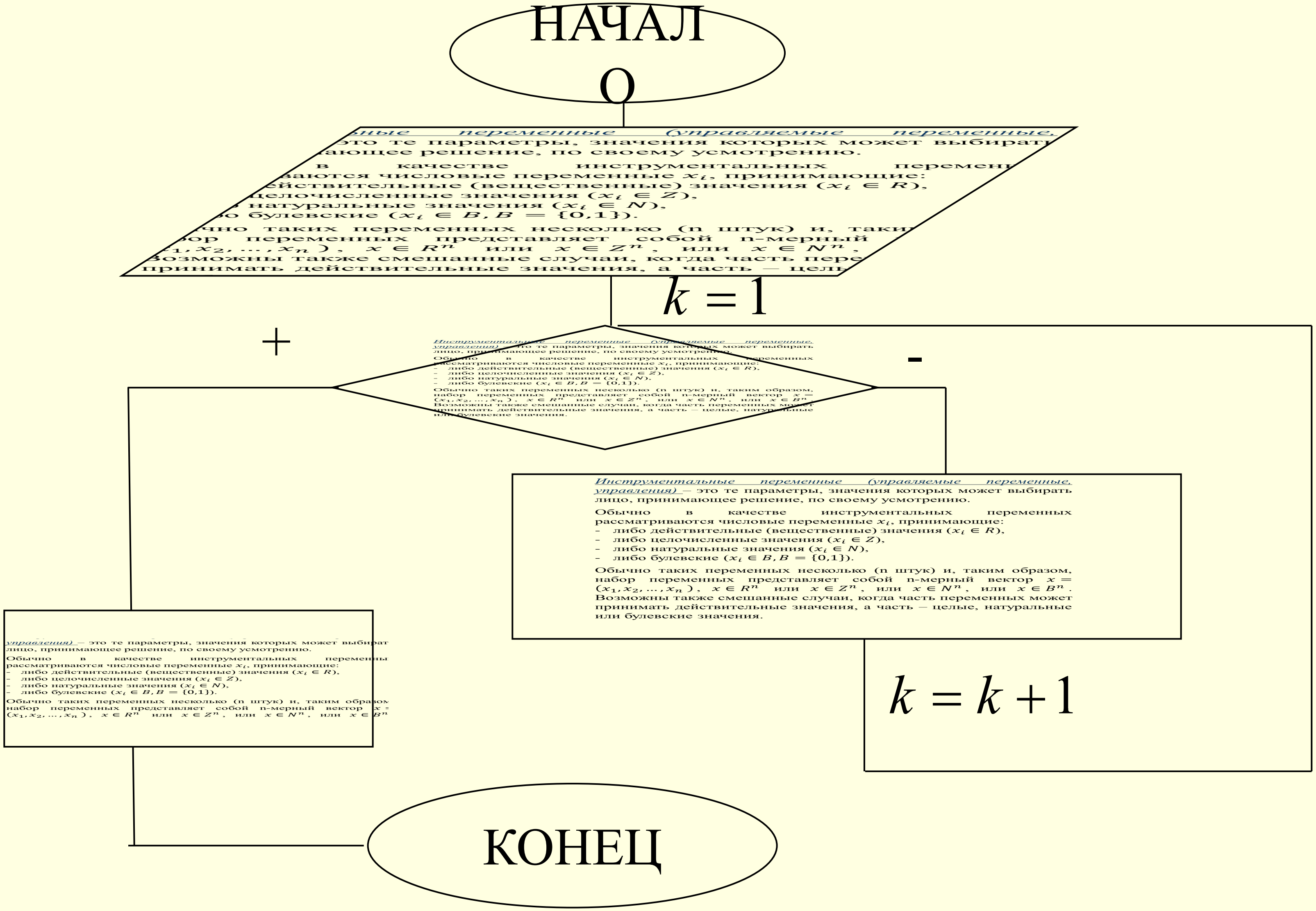


Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:
- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные

Метод Ньютона



ПРИМЕР

k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	–1	–
1	–0,5	0,5
2	–0,25	0,25
3	–0,125	0,125
4	–0,0625	0,0625

Основная расчетная формула: $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$.

0. Зададим начальный интервал неопределенности: $x \in [-1;1]$. Положим $\varepsilon = 0{,}1$. Вычислим $f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x, f'''(x) = 6$.

1. Так как $f'(a) = f'(-1) = 3, f'''(a) = f'''(-1) = 6$, то
$$f'(a)\cdot f'''(a) > 0 \;\Rightarrow\; x_0 = a = -1.$$

2^1. Вычислим $x_1 = x_0 - \dfrac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = -0{,}5$.

3^1. Проверим условие выхода $\lvert x_1 - x_0\rvert = 0{,}5 > \varepsilon = 0{,}1$. Перейдем к шагу 2.

2^2. Вычислим $x_2 = x_1 - \dfrac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = -0{,}25$.

3^2. Проверим условие выхода $\lvert x_2 - x_1\rvert = 0{,}25 > \varepsilon = 0{,}1$. Перейдем к шагу 2.

2^3. Вычислим $x_3 = x_2 - \dfrac{f'(x_2)}{f''(x_2)} = -0{,}125$.

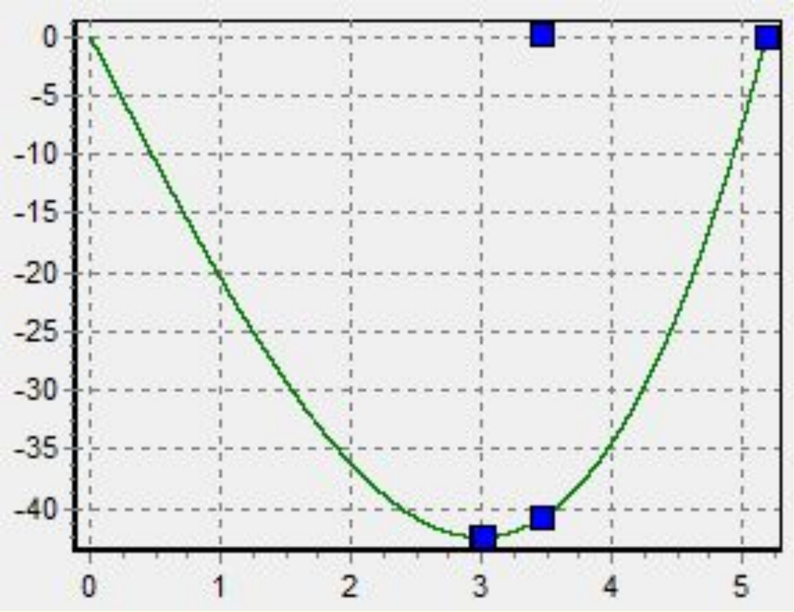
3^3. Проверим условие выхода $\lvert x_3 - x_2\rvert = 0{,}125 > \varepsilon = 0{,}1$. Перейдем к шагу 2.

2^4. Вычислим $x_4 = x_3 - \dfrac{f'(x_3)}{f''(x_3)} = -0{,}0625$.

3^4. Проверим условие выхода $\lvert x_4 - x_3\rvert = 0{,}0625 \le \varepsilon = 0{,}1$.

4. Следовательно, $x^* = \dfrac{x_3 + x_4}{2} = -0{,}09375$, $f(x^*) = 0{,}999176$.

$$V(h)=\frac{\pi}{4}(27h-h^3)\to\max,\ \ 0<h<3\sqrt{3}$$



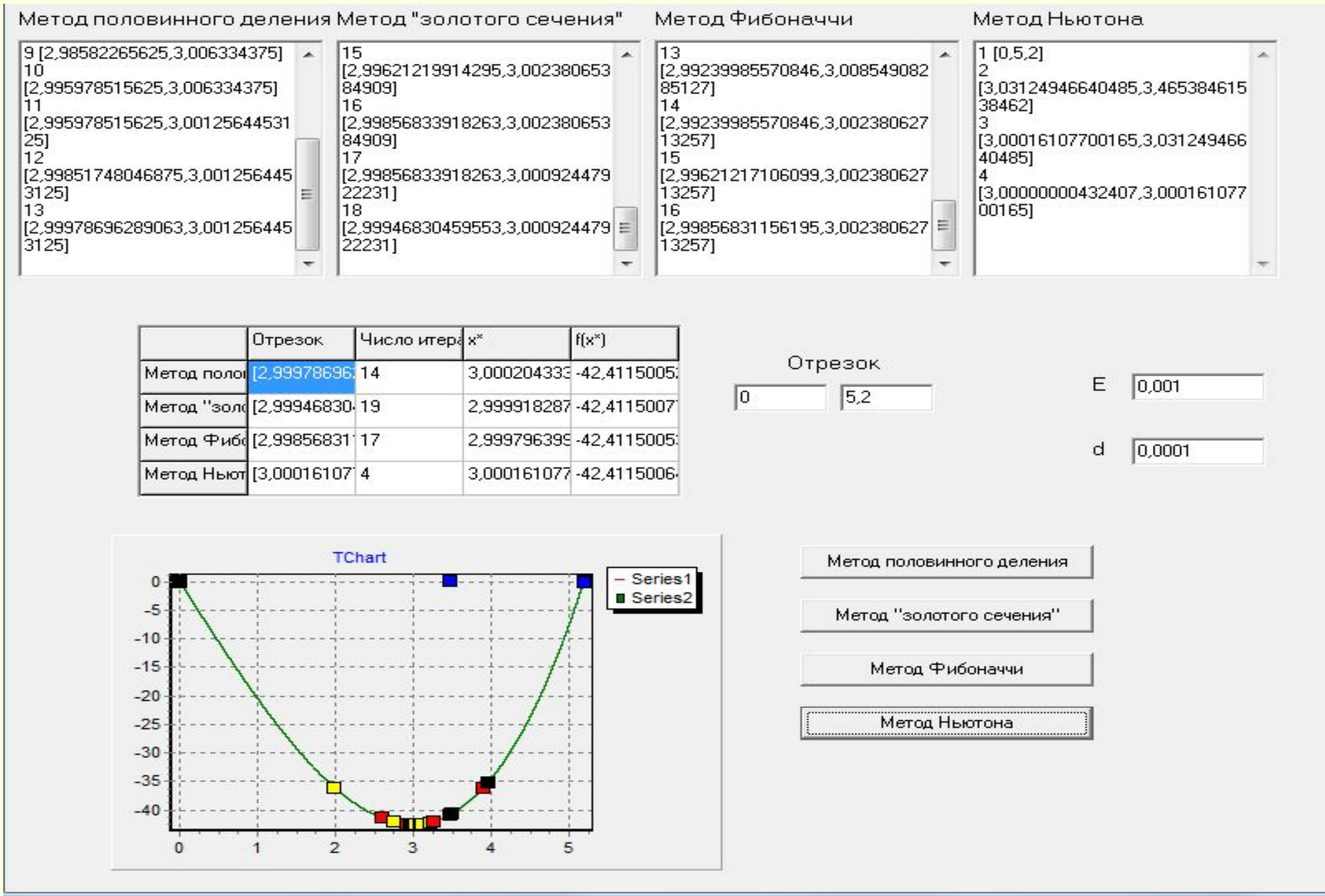
1 [0,5,2]
2 [3,03124946640485,3,46538461538462]
3 [3,00016107700165,3,03124946640485]
4 [3,00000000432407,3,00016107700165]

$$x^* \approx 3{,}000161$$

$$f(x^*) \approx 42{,}4115$$

Программная реализация

$$V(h) = -\frac{\pi}{4}(27h - h^3) \to \min,\ \ 0 < h < 3\sqrt{3}$$



Вывод

$$V(h) = -\frac{\pi}{4}(27h - h^3) \to \min, \;\; 0 < h < 3\sqrt{3}$$

	отрезок	число итераций	h	V(h)
Метод половинного деления	[2,99978696289063,3,0012564453125]	13	3,000204	42,4115
Метод золотого сечения	[2,99946830459553,3,00092447922231]	18	2,999918	42,4115
Метод Фибоначчи	[2,99856831156195,3,00238062713257]	16	2,999796	42,4115
Метод Ньютона	[3,00000000432407,3,00016107700165]	4	3,000161	42,4115

Точное решение $h = 3, \;\; V(h) = \dfrac{27\pi}{2}$

Работа: «Методы одномерного поиска»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ Ознакомиться с методами одномерного поиска. Сравнить различные алгоритмы по эффективности на тестовых примерах.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

управления) — это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может

ВАРИАНТЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

1. $f(x)=\sin(x)$, $x\in[-\pi/2,\pi/2]$	2. $f(x)=\cos(x)$, $x\in[0,\pi]$.
3. $f(x)=(x-2)^2$, $x\in[-2,20]$	4. $f(x)=(x-15)^2+5$, $x\in[2,200]$
5. $f(x)=(x+5)^4$, $x\in[-10,15]$	6. $f(x)=e^x$, $x\in[0,100]$
7. $f(x)=x^2+2x-4$, $x\in[-10,20]$	8. $f(x)=x^3-x$, $x\in[0,1]$
9. $f(x)=x^5-x^2$, $x\in[0,1]$	10. $f(x)=-x/e^x$, $x\in[0,3]$
11. $f(x)=x^4-x$, $x\in[0,1]$	12. $f(x)=x^4/\ln x$, $x\in[1.1,1.5]$
13. $f(x)=xe^{-x}$, $x\in[-2,6]$	14. $f(x)=xe^{-2x}$, $x\in[-2,6]$

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

- титульный лист; цель работы; задание;
- таблицы с результатами исследований по каждому методу, где должны быть отражены границы и длины интервалов на каждой итерации; соотношение длины интервала на k +1 итерации к длине интервала на k итерации;
- график зависимости количества вычислений целевой функции от логарифма задаваемой точности; - выводы по всем пунктам задания.

Вопросы для проверки знаний

- Определения отрезка, выпуклого множества, выпуклой (строго выпуклой) функции, квазивыпуклой (строго квазивыпуклой) функции, унимодальной функции.
- Прямые методы минимизации функций одной переменной. Теорема о сокращении интервала неопределённости.
- Метод половинного деления для решения задач минимизации функции одной переменной: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.
- Метод золотого сечения для решения задач минимизации функции одной переменной: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.
- Метод Фибоначчи для решения задач минимизации функции одной переменной: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.
- Метод Ньютона для решения задач минимизации функции одной переменной: идея метода, геометрическая интерпретация, алгоритм, пример.

Примеры тестовых заданий для проверки знаний

Инструментальные переменные (управляемые переменные, управления) – это те параметры, значения которых может выбирать лицо, принимающее решение, по своему усмотрению.

Обычно в качестве инструментальных переменных рассматриваются числовые переменные x_i, принимающие:

- либо действительные (вещественные) значения ($x_i \in R$),
- либо целочисленные значения ($x_i \in Z$),
- либо натуральные значения ($x_i \in N$),
- либо булевские ($x_i \in B, B = \{0,1\}$).

Обычно таких переменных несколько (n штук) и, таким образом, набор переменных представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in R^n$ или $x \in Z^n$, или $x \in N^n$, или $x \in B^n$. Возможны также смешанные случаи, когда часть переменных может принимать действительные значения, а часть – целые, натуральные или булевские значения.

Примеры тестовых заданий для проверки знаний

4) В ряде чисел Фибоначчи каждое последующее число равно _____ двух предыдущих

A. частному; B. разности; C. сумме; D. произведению.

5) Итерационный процесс в методе Ньютона описывается формулой:

A. $x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{2f'(x^k)}$; B. $x^{k+1} = x^k + 2\frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$; C. $x^{k+1} = x^k - \frac{f'(x^k)}{f''(x^k)}$; D. $x^{k+1} = x^k + \frac{f'(x^k)}{f''(x^k)}$.

6) Укажите соответствие между прямыми методами решения задач поиска экстремума и их определением:

Метод золотого сечения	метод поиска экстремума путем последовательного деления отрезка пополам
Метод Фибоначчи	метод, основанный на делении отрезка на две неравные части так, что отношение всего отрезка к большей части равно отношению большей части к меньшей
Метод половинного деления	метод, заключающийся в том, что каждая последующая точка выбирается симметрично по отношению к точке, которая осталась от предыдущего эксперимента и попала в оставшийся интервал

7) К прямым методам нахождения минимума функции одной переменной не относят:

A. метод половинного деления; B. метод золотого сечения; C. метод Фибоначчи;

D. метод Ньютона