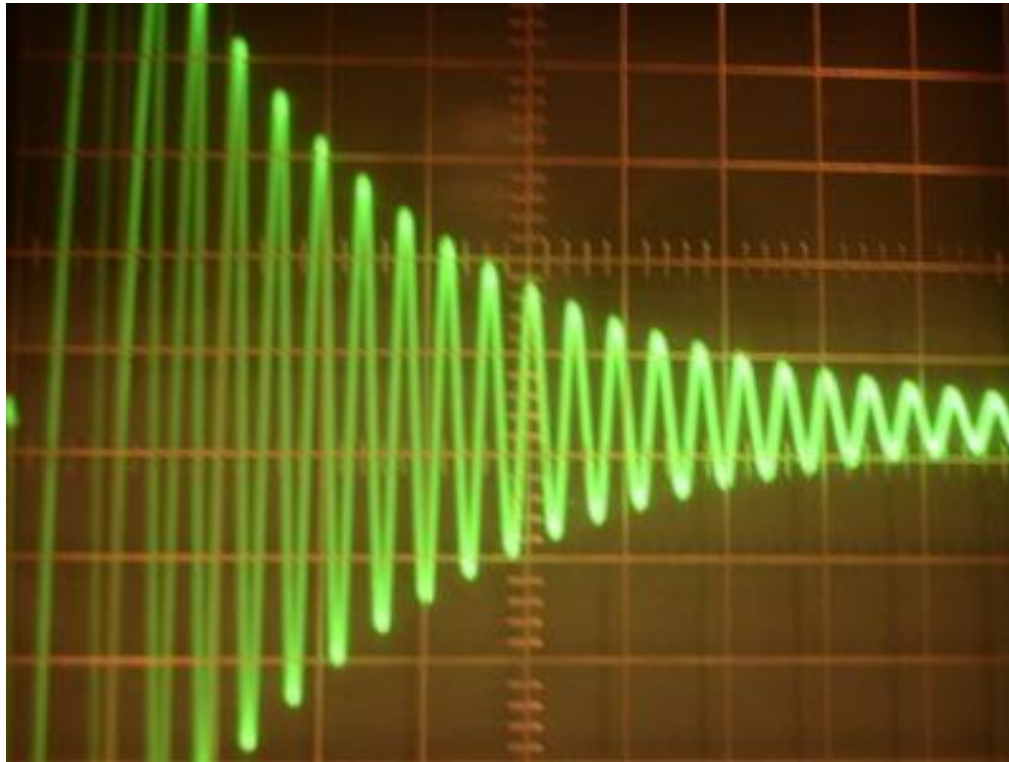


Затухающие колебания



Затухающие колебания

Свободные колебания с уменьшающейся амплитудой называют **затухающими**

Уменьшение амплитуды колебания ведет к потере энергии, т.к.

$$E(t) \sim A^2(t)$$

Обычно, в механической колебательной системе потери энергии связаны с трением

Рассмотрим на примере пружинного маятника (груз на пружине в стакане с водой)

Вязкое трение:

$$F_{\text{тр}} = -rv = r \frac{dx}{dt}$$

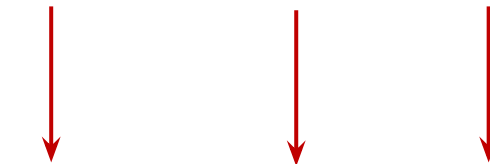
где r – коэффициент сопротивления
 v – скорость движения

⇒ **уравнение движения груза на пружине в стакане воды:**

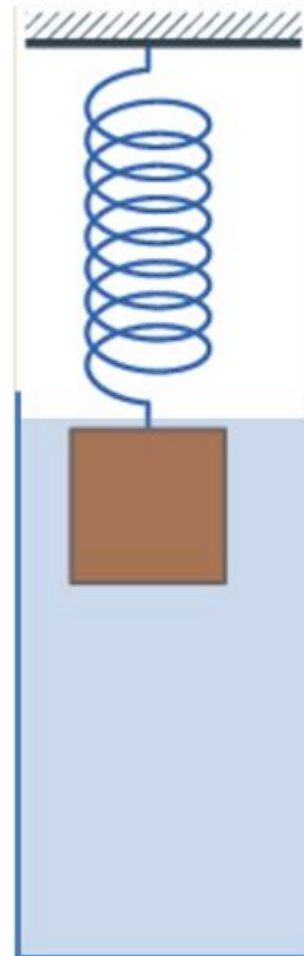
$$\Rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}$$

или другая форма записи

$$\vec{F}_{\text{рез}} = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{тр}}$$



$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$



Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \quad \begin{array}{l} \text{Разделим на } m \\ \text{и преобразуем} \end{array} \rightarrow \ddot{x} + \boxed{\frac{r}{m}}\dot{x} + \boxed{\frac{k}{m}}x = 0$$

↑
Дифференциальное уравнение затухающих колебаний пружинного маятника в вязкой среде

Учитывая, что

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

собственная частота колебаний

$$\frac{r}{m} = 2\beta$$

β – коэффициент затухания

получим

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

для любой колебательной системы с сопротивлением, пропорциональным скорости

Частным случаем этого уравнения является **уравнение незатухающих колебаний (при $\beta=0$)**

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

Затухающие колебания в ЭМ контуре

$$U_C + U_R = \text{ЭДС}_{\text{самоинд}}$$

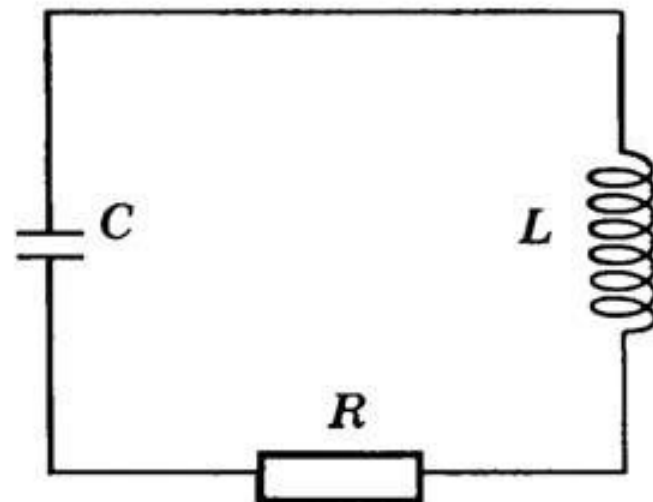
$$U_C = \frac{q}{C} \quad U_R = RI = R\dot{q}$$

$$\text{ЭДС}_{\text{самоинд}} = -L\dot{I} = -L\ddot{q}$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$



$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

$$\frac{R}{2L} = \beta$$

Собственная частота колебаний контура

Коэффициент затухания колебаний

Дифференциальное уравнение затухающих ЭМ колебаний

Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{Дифференциальное уравнение затухающих колебаний}$$

В зависимости от соотношения между собственной частотой системы и коэффициентом затухания возможны **три типа решения:**

$\beta < \omega_0$ – колебательный режим

$\beta = \omega_0$ – критический режим

$\beta > \omega_0$ – аperiodический режим

При $\beta < \omega_0$ решение дифференциального уравнения:

Затухающие колебания
подчиняются закону
механические колебания

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

амплитуда
затухающих
колебаний

частота
затухающих
колебаний

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Параметры затухающих колебаний

Частота

затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

механические ЭМ

Амплитуда

затухающих колебаний

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

Начальная амплитуда

$$A_0 = A(0)$$

Период

затухающих колебаний



$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Коэффициент затухания

β

$$\beta = \frac{r}{2m} \quad \beta = \frac{R}{2L}$$

механические ЭМ

Время релаксации



$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

Логарифмический декремент затухания



$$\lambda = \beta T$$

Добротность колебательной системы

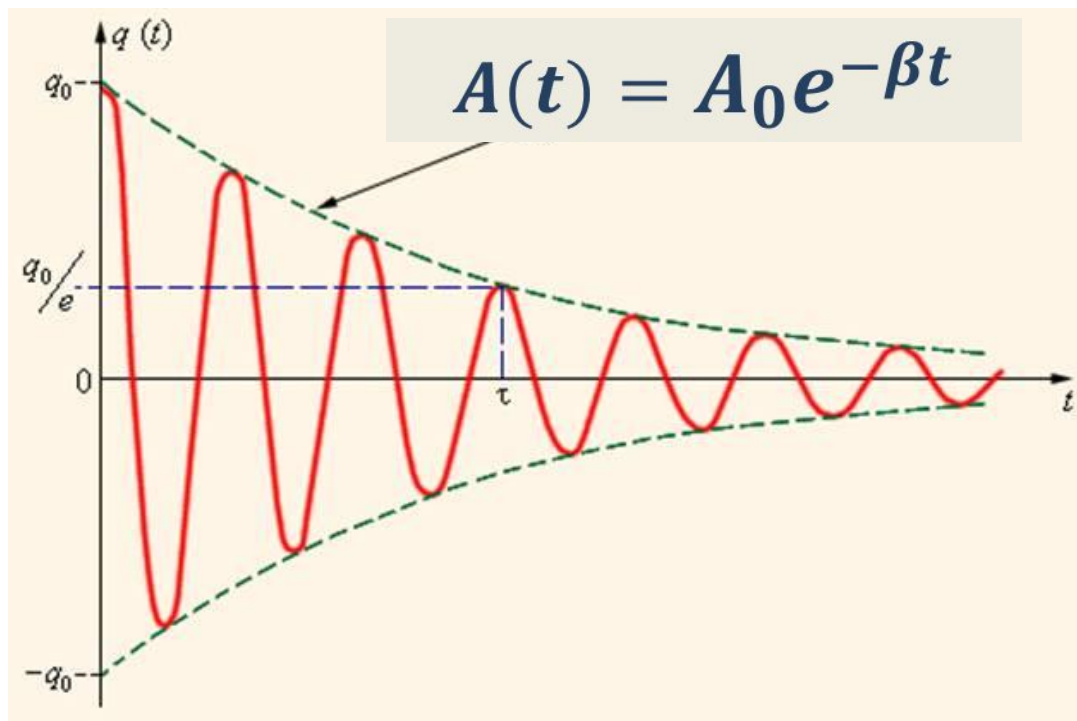
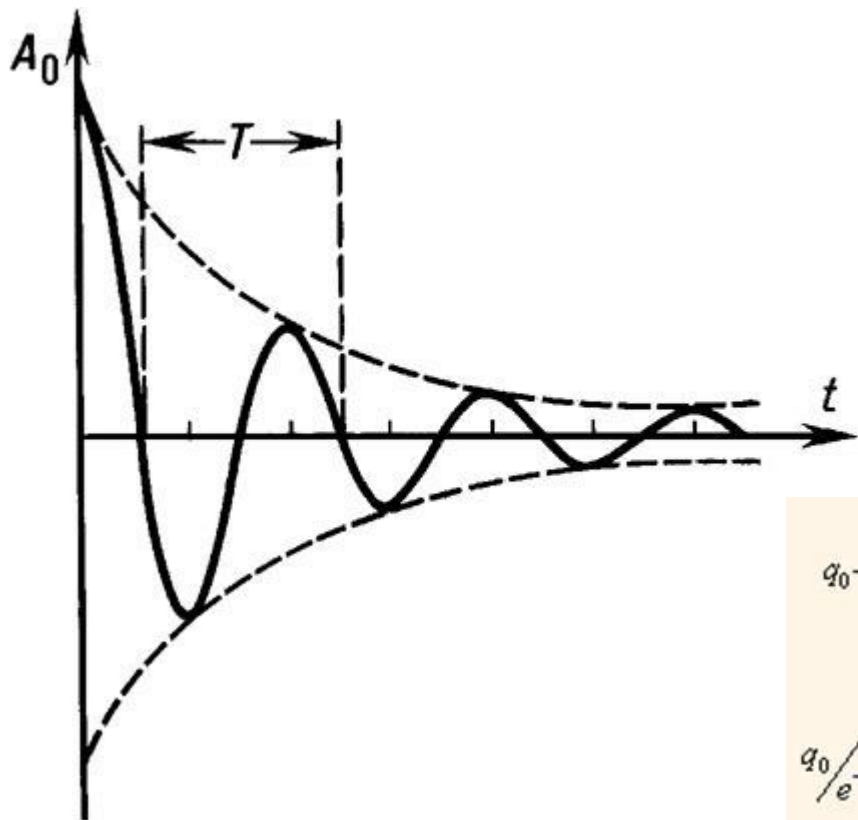


$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

$$Q = \frac{\sqrt{km}}{r} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

механические ЭМ

← Период затухающих колебаний



← Время релаксации

**Время
релаксации**

τ

промежуток времени, за который амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз

$$A(\tau) = A_0 e^{-\beta\tau} = \frac{A_0}{e} = A_0 e^{-1} \Rightarrow \beta\tau = 1$$

τ **Время релаксации**
обратно пропорционально
коэффициенту затухания



$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

β

Коэффициент затухания

- **обратно пропорционален времени релаксации**
- **показывает во сколько раз амплитуда уменьшается за единицу времени**


Логарифмический декремент затухания

Логарифмический декремент затухания

натуральный логарифм двух последовательных амплитуд

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

N_e – количество колебаний за время уменьшения амплитуды в e раз

 **Физический смысл λ** **Характеризует степень затухания – показывает за какое количество колебаний амплитуда уменьшается в e раз**

Пусть $\lambda = 1$ тогда $\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^1$ т.е. за одно колебание амплитуда уменьшится в e раз

Пусть $\lambda = 3$ тогда $\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{1/3}$ т.е. за одно колебание амплитуда уменьшится в $e^{1/3}$ раз

Величина, постоянная для данной колебательной системы

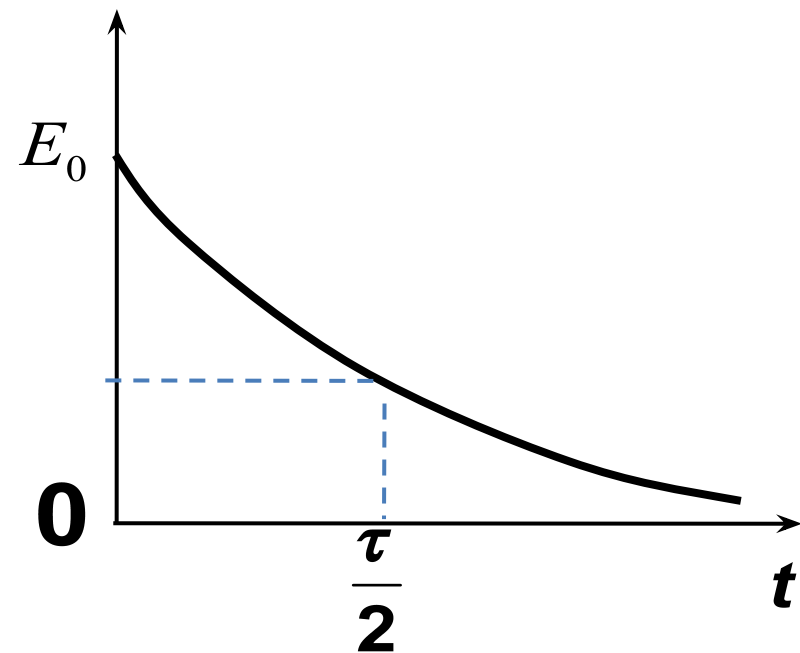
или: амплитуда уменьшится в e раз за 3 колебания

Добротность колебательной системы

Q – характеризует потери энергии колебательной системы за период

$$Q = 2\pi \frac{\text{запасенная энергия}}{\text{потери энергии за период}} = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$$

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \quad \Rightarrow \quad E(t) = E_0 e^{-2\beta t}$$



$$Q = 2\pi \frac{E(0)}{\Delta E(t)}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \beta T$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Добротность означает **качественность**: чем больше добротность системы, тем ближе она к идеальной, тем медленнее затухают колебания

При малых затуханиях можно считать, что энергия в колебательной системе изменяется по закону

$$E(t) = E_0 e^{-2\beta t} \quad \text{где} \quad E_0 = \frac{1}{2} k A^2$$

E_0 - значение энергии в начальный момент времени.

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E_0 e^{-2\beta t} = -2\beta E$$

Скорость убывания энергии со временем

$$\left(-\frac{dE}{dt} \right) = 2\beta E = -\Delta E$$

Если за период энергия мало изменяется, то при умножении этого выражения на T можно найти убыль энергии за период и выразить добротность через энергию.

$$\frac{E}{(-\Delta E)} = 2\beta T E = 2\lambda E = \frac{Q}{2\pi}$$

Режимы затухающих колебаний

Колебательный режим

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

В случае слабого затухания

$$\beta < \omega_0 \quad \beta^2 \ll \omega_0^2$$

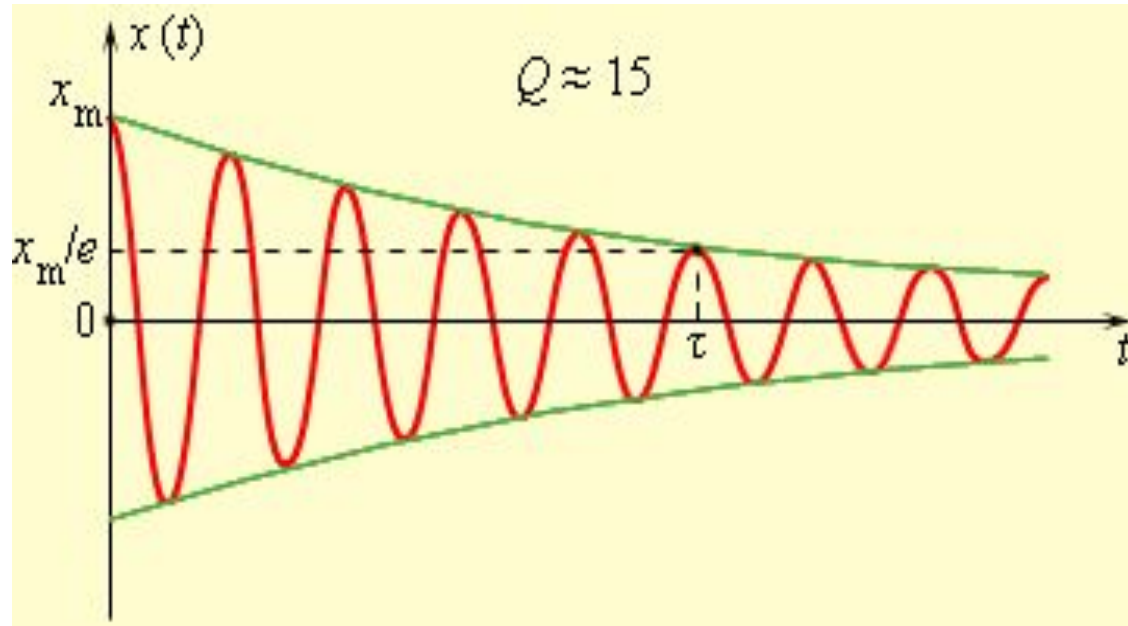
$$\omega \approx \omega_0 \quad T \approx T_0$$

Логарифмический
декремент затухания

$$\lambda = \beta T_0 = \beta \frac{2\pi}{\omega_0} \ll 1$$

Добротность

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} \gg 1$$

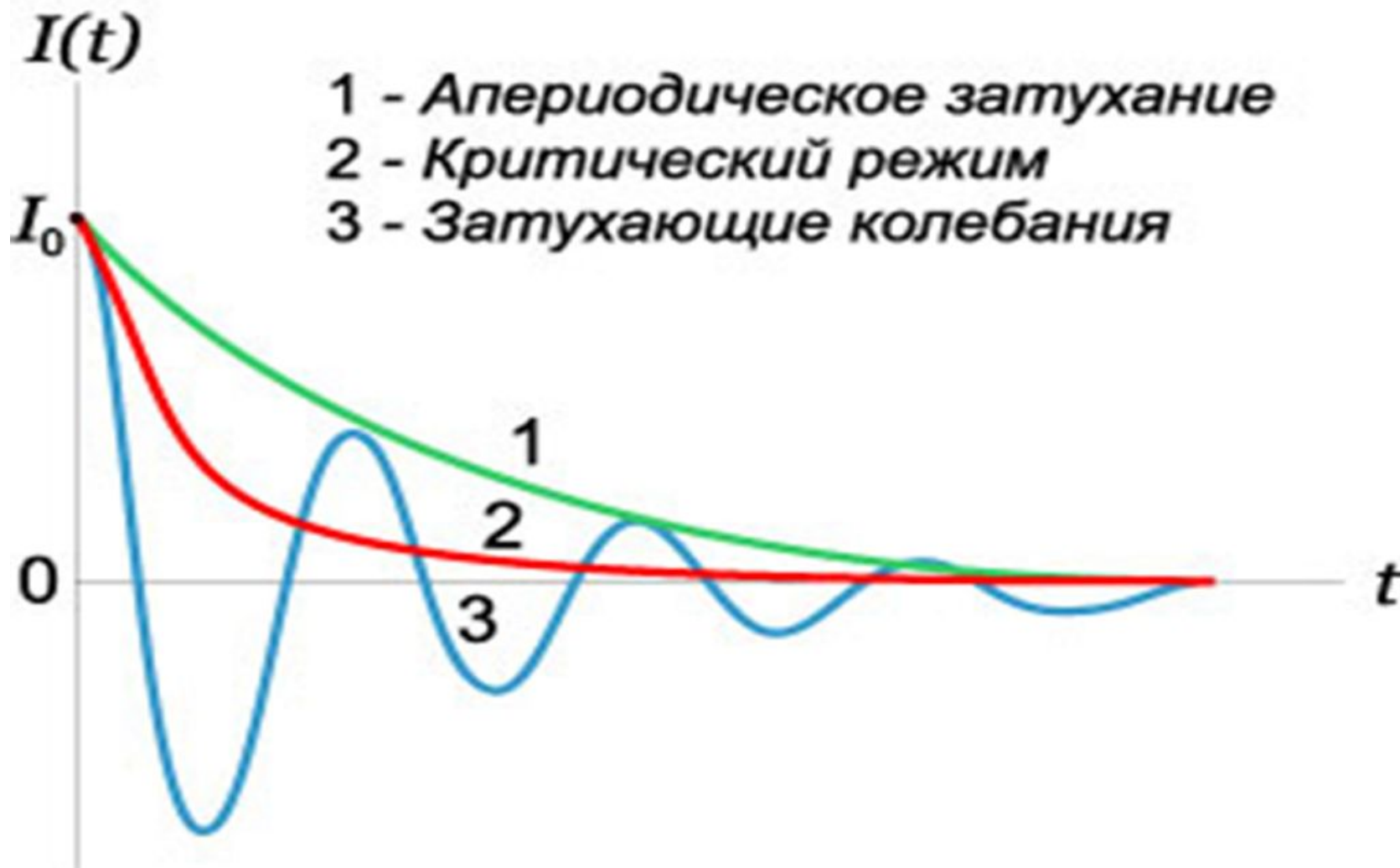


Количество колебаний за время,
равное времени релаксации

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda}$$

$$Q = \pi N_e$$

Режимы затухающих колебаний



При большом коэффициенте затухания происходит быстрое уменьшение амплитуды и увеличивается период колебаний. Когда сопротивление становится равным критическому, ($\beta = \omega_0$), колебания прекращаются. Такой процесс называется апериодическим. $T \rightarrow \infty$



В случае апериодического движения энергия тела при возвращении в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление сил сопротивления, трения.

Таблица электро-механических аналогий

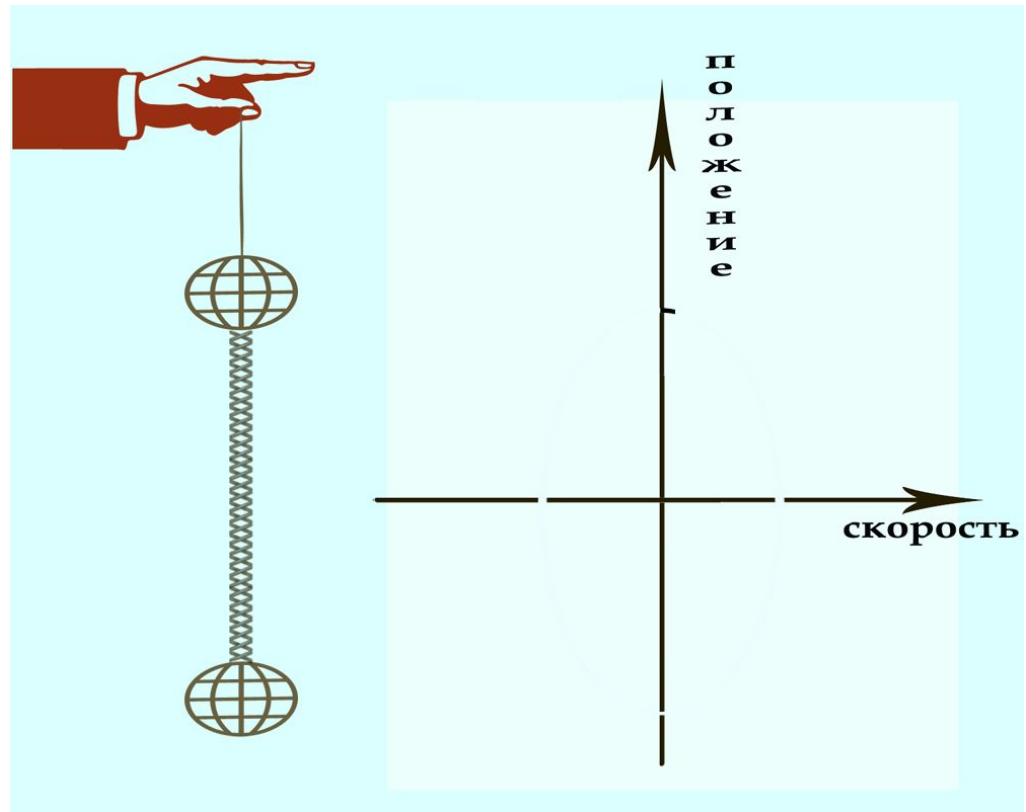


Механические колебания	Электромагнитные колебания
Смещение x	Заряд конденсатора q
Амплитуда смещения A	Амплитуда заряда q_0
Масса m	Индуктивность L
Коэффициент жесткости κ	Величина, обратная емкости $\frac{1}{C}$
Максимальная скорость v_0	Максимальная сила тока I
Ускорение a	Скорость изменения силы тока
Потенциальная энергия $\Pi = \frac{\kappa x^2}{2}$	Энергия электрического поля $W_E = \frac{q^2}{2C}$
Кинетическая энергия $K = \frac{mv^2}{2}$	Энергия магнитного поля $W_B = \frac{LI^2}{2}$
Импульс $p=mv$	Магнитный поток $\Phi_B=LI$
Коэффициент затухания $\beta = \frac{r}{2m}$	Коэффициент затухания $\beta = \frac{R}{2L}$
Амплитуда колебаний $x(t) = Ae^{-\beta t}$	Амплитуда заряда на конденсаторе $Q(t) = q_0 e^{-\beta t}$
Время релаксации $\tau = \frac{1}{\beta}$	Время релаксации $\tau = \frac{1}{\beta}$

Фазовое пространство

Координатами в этом пространстве служат положения и скорости исследуемых точек.

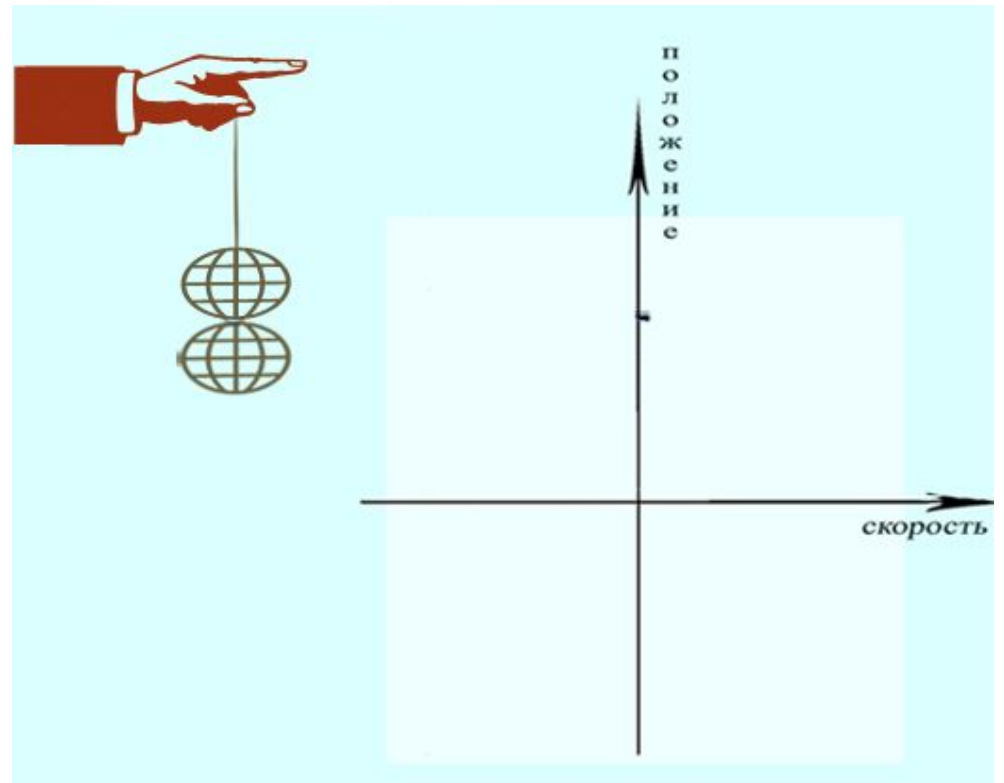
Например, шарик, колеблющийся без трения, описывает в фазовом пространстве замкнутую кривую — *фазовую траекторию*.



Фазовая траектория колебаний с трением.

Колебания с трением постепенно затухают. При этом фазовая траектория сходится по спирали к предельной точке, соответствующей остановке шарика.

Эта точка неподвижна: если шарик подтолкнуть, фазовая траектория к ней вернется. Она как бы притягивает все близлежащие фазовые траектории.



Вынужденные колебания

Вынужденные колебания

**Свободные колебания
реальной колебательной системы
всегда являются затухающими**

Чтобы возбудить в такой системе незатухающие колебания,
необходимо компенсировать потери энергии,
обусловленные трением колебаний

Будем воздействовать на колеблющуюся систему
внешней вынуждающей силой F ,
изменяющейся
по гармоническом закону

$$F_{\text{ВЫН}}(t) = F_0 \cos \omega t$$



Возникающие при этом в системе колебания
называются **вынужденными**

Итак,

**Вынужденные
колебаний**

**колебания, возникающие
под действием внешней
периодически изменяющейся силы**

Уравнение вынужденных колебаний

Силы,
действующие
на систему

$$\vec{F}_{\text{рез}} = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}} + \vec{F}_{\text{вын}}$$

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

Результирующая
сила

Квазиупругая
сила

Сила
сопротивления

Вынуждающая
сила

Разделим это уравнение на m , перенесем члены, содержащие x в левую часть:



$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

Неоднородное линейное **дифференциальное уравнение** второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Собственная частота

$$\beta = \frac{r}{2m}$$

Коэффициент затухания

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

Амплитуда
вынуждающей силы

Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний

Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения $x(t) = x_1 + x_2$

$$x_1 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_{зат} t + \varphi_0)$$

$$x_2 = A(\omega) \cos(\omega t - \varphi_1)$$

$$\omega_{зат} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

т.е.:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Играет существенную роль только в начальной стадии процесса (при установлении колебаний)

Амплитуда вынужденных колебаний

Отставание по фазе

Для ЭМ колебаний – аналогично

Вынужденные ЭМ колебания

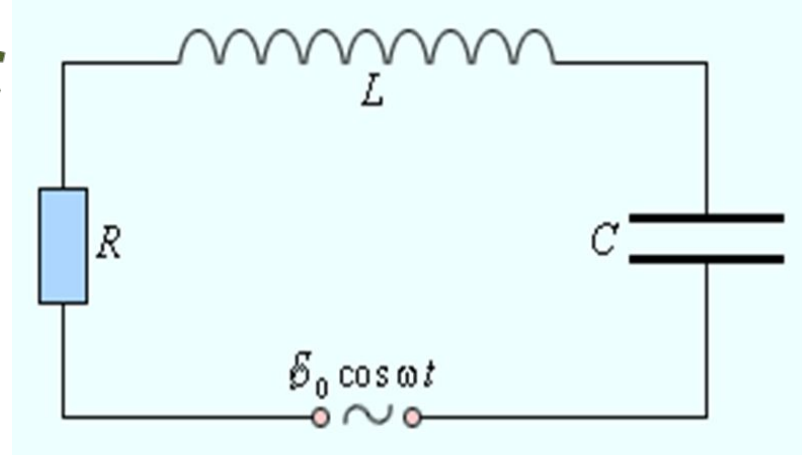
По II
правилу
Кирхгофа

$$U_C + U_L + U_R = \varepsilon$$

$$U_C = \frac{q}{C}$$

$$U_L = L\dot{I} = L\ddot{q}$$

$$U_R = RI = R\dot{q}$$



Вынуждающая сила:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \varepsilon_m \cos \omega t$$

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos \omega t$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = f_0 \cos \omega t$$

Неоднородное линейное **дифференциал. уравнение** второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\beta = \frac{R}{2L}$$

$$f_0 = \frac{\varepsilon_m}{L}$$

Уравнение вынужденных электромагнитных колебаний

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = f_0 \cos \omega t$$

Вынуждающая сила: $U = U_m \cos \omega t$

Решение уравнения :

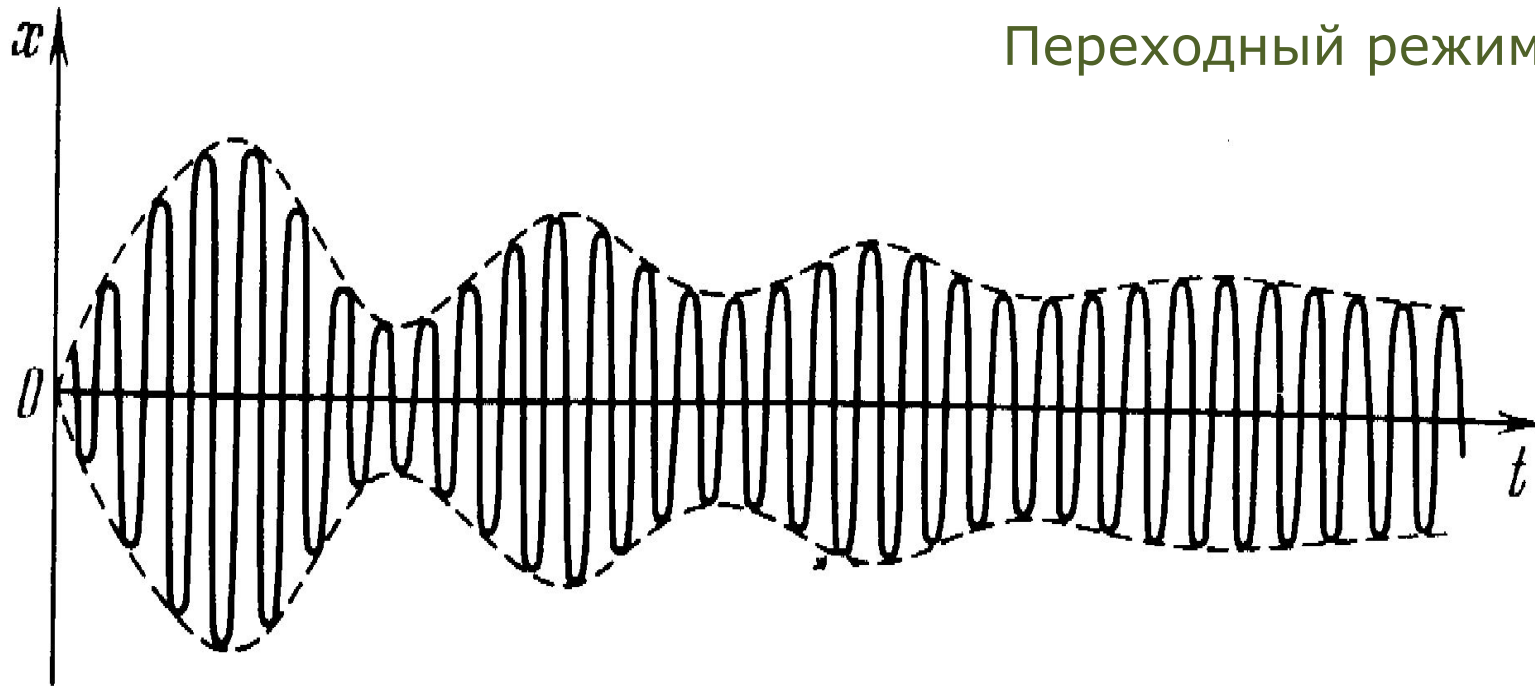
$$q(t) = q_1 + q_2$$

$$q_1 = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_{затт} t + \varphi_0)$$

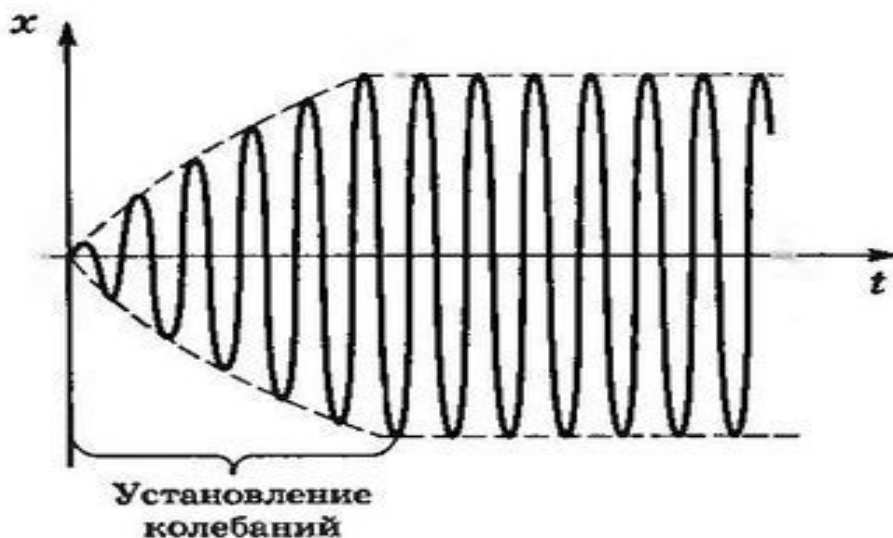
$$q_2 = q(\omega) \cos(\omega t - \varphi_1)$$

График вынужденных колебаний

Переходный режим



Стационарный режим



Математика и физический опыт показывают, что **через некоторое время в системе устанавливаются гармонические колебания с частотой вынуждающей силы, но отстающие от нее по фазе**

Параметры вынужденных колебаний

Установившиеся вынужденные колебания

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi_1)$$

Частота
вынужденных колебаний

$$\omega(t) = \omega$$

частота вынуждающей силы

Амплитуда
вынужденных колебаний

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

↑ частота вынуждающей силы

↑ частота вынуждающей силы

вспомним, что амплитуда при:

- незатухающих колебаниях $A = \text{const}$
- затухающих колебаниях $A = f(t \text{ и } \beta)$

Отставание по фазе
вынужденных колебаний
от вынуждающей силы

$$\varphi_1 = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

величина отставания зависит от частоты вынуждающей силы

Амплитудно-частотная зависимость

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

при $A(\omega) - \max$
 \min

собственная частота системы частота вынуждающей силы

Резонанс

явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к резонансной частоте

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Характеристика системы

Резонансная частота

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

при $\sqrt{4\beta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \rightarrow 0$

$$A(\omega) \rightarrow \infty$$

При каких ω ?

Продифференцируем это выражение по ω и приравняем нулю, получим условия для определения $\omega_{\text{рез}}$

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0$$

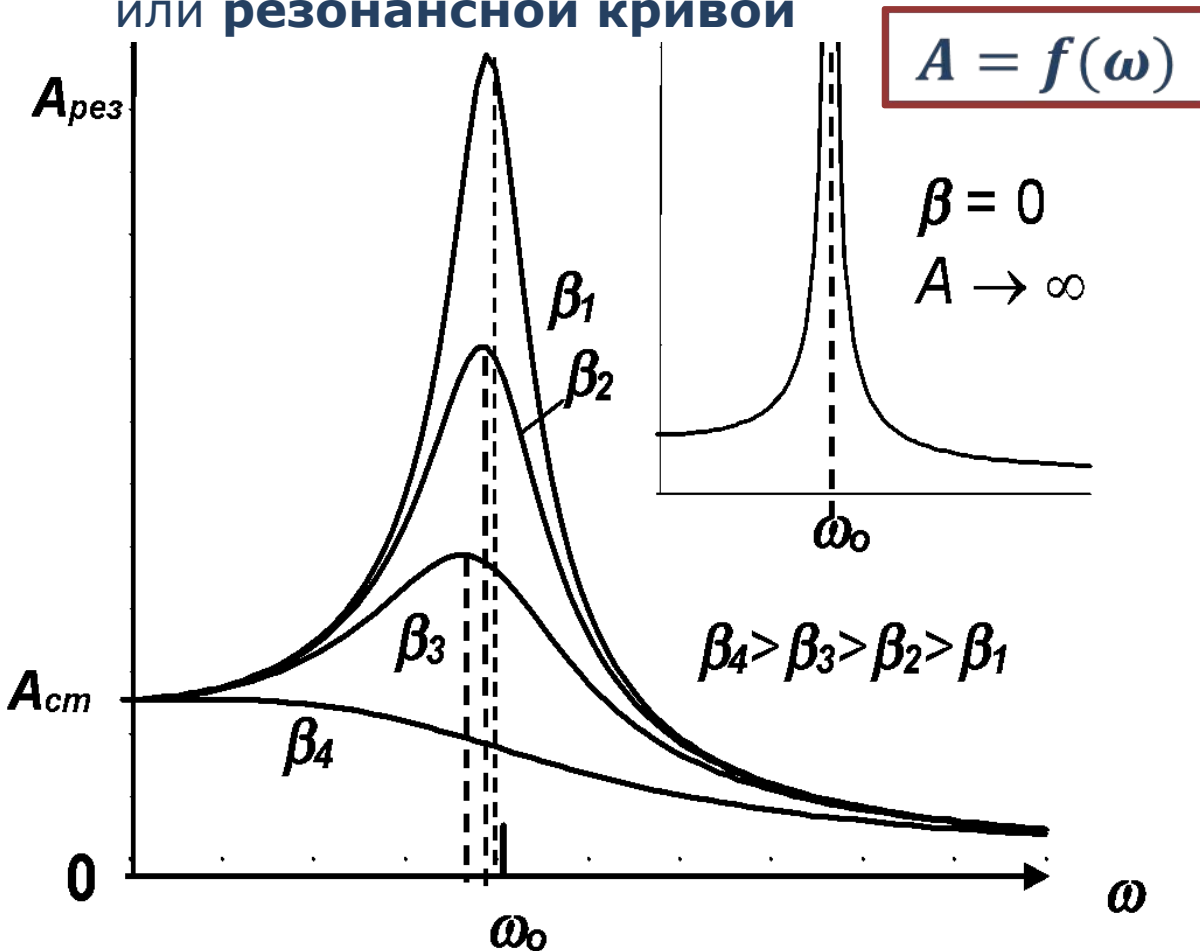
Полученное уравнение имеет два решения:

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

«-» не имеет физического смысла, остается со знаком «+»

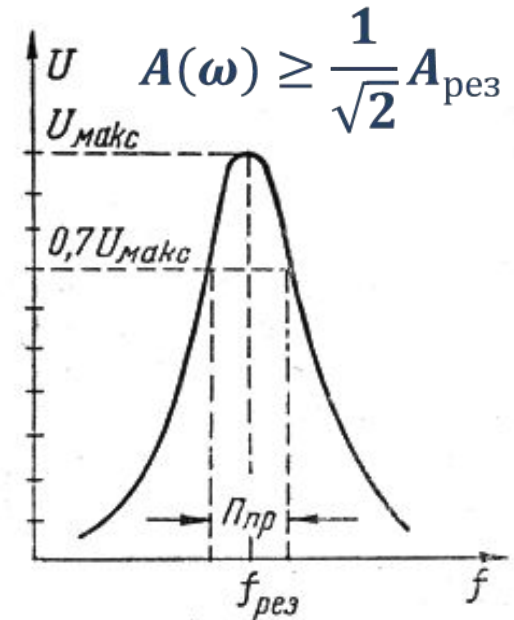
Резонансные кривые

Зависимость амплитуды A вынужденных колебаний от частоты ω вынуждающей силы называется **резонансной характеристикой** или **резонансной кривой**



Полоса пропускания

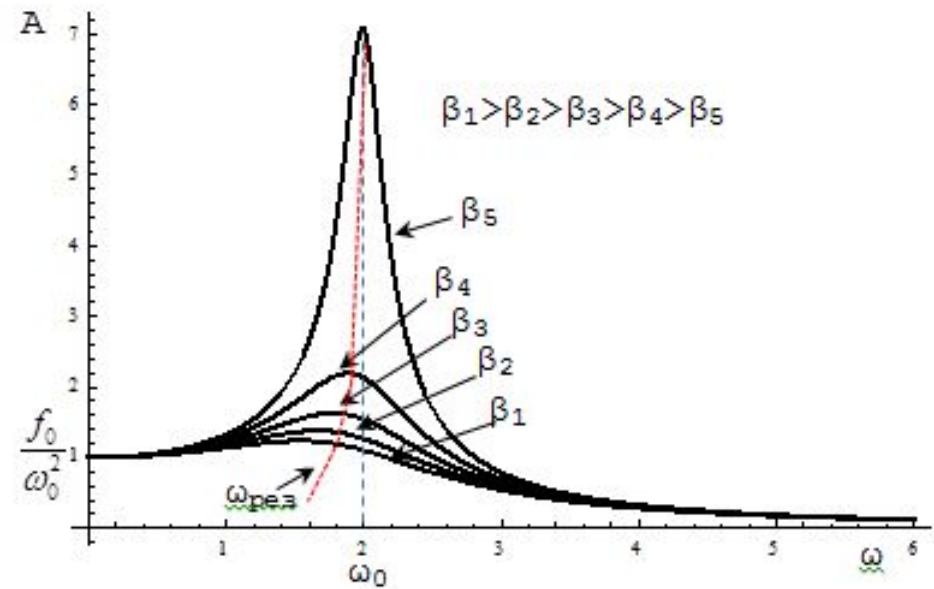
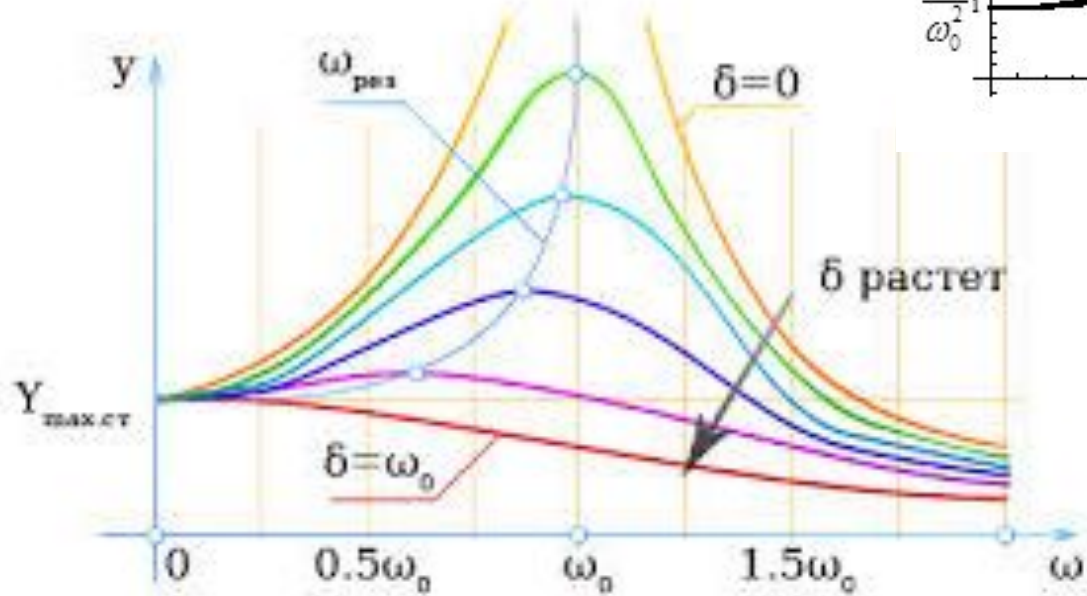
область частот $\Delta\omega$, внутри которой амплитуда вынужденных колебаний



ширина резонансной кривой

Вид резонансной кривой зависит от f_0 и β :
чем $> \beta$, тем шире кривая и левее ее max

Резонансные кривые



Анализ фазово-частотной характеристики

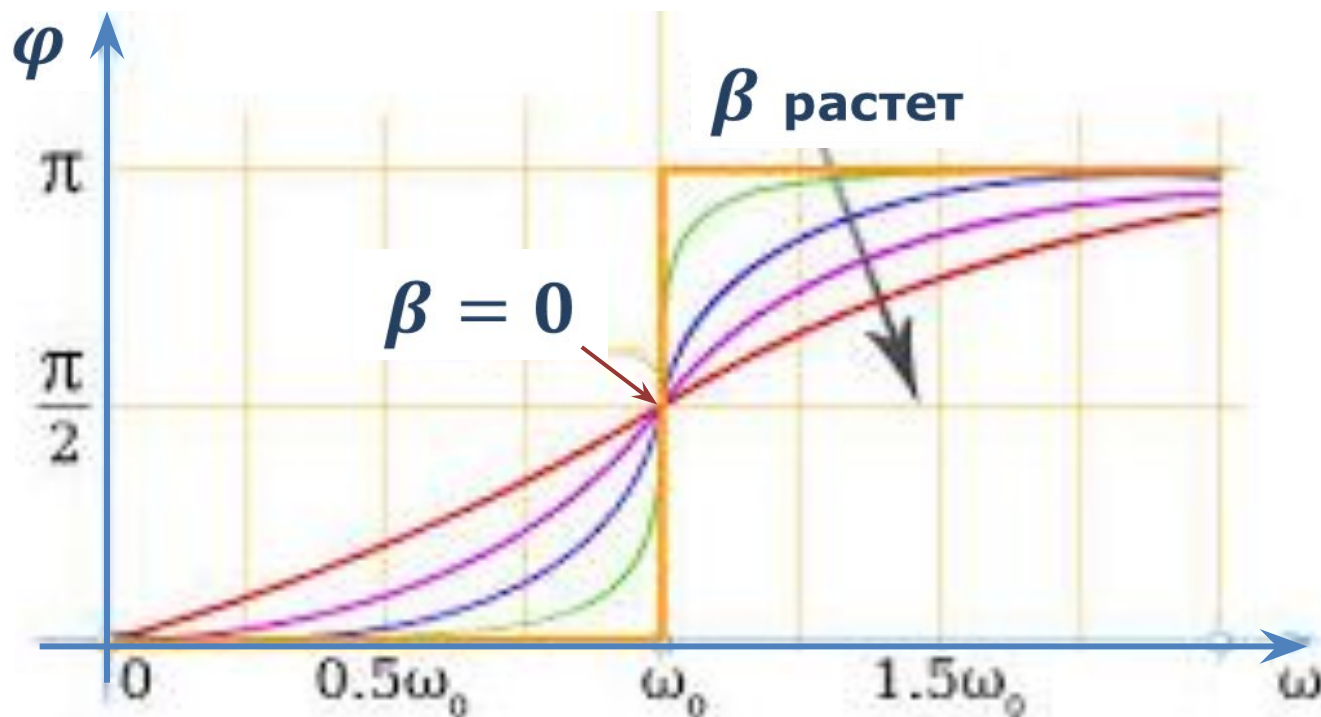
Демонстрация зависимости фазы вынужденных колебаний от коэффициента затухания

$$x = A(\omega) \cos(\omega t - \phi_1)$$

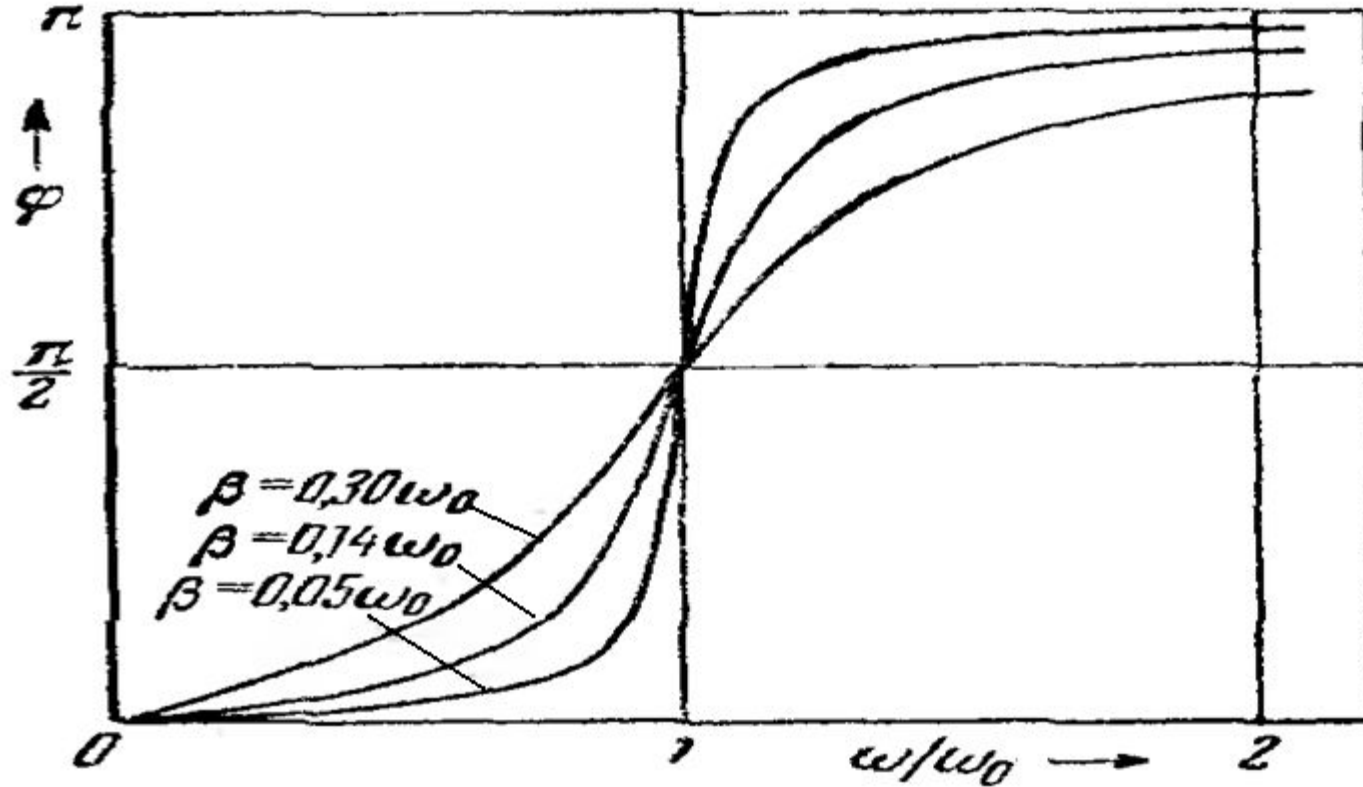
$$F = F_0 \cos \omega t$$

$$\varphi = f(\omega)$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



РЕЗОНАНС



Зависимость φ от ω при различных значениях коэффициента затухания β . Частоте ω_0 соответствует $\varphi = \pi/2$.

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Случай малого затухания. Добротность

$$\beta \ll \omega_0 \quad A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} =$$

Учитывая, что

$$m\omega_0^2 = k \quad \Rightarrow \quad A_{\text{рез}} = \frac{F_0 \omega_0}{2k\beta} =$$

$$F_0 = kA_0 \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Учитывая, что

$$\beta T_0 = \lambda \quad \Rightarrow \quad A_{\text{рез}} = \frac{A_0 \pi}{\lambda} \quad \Rightarrow$$

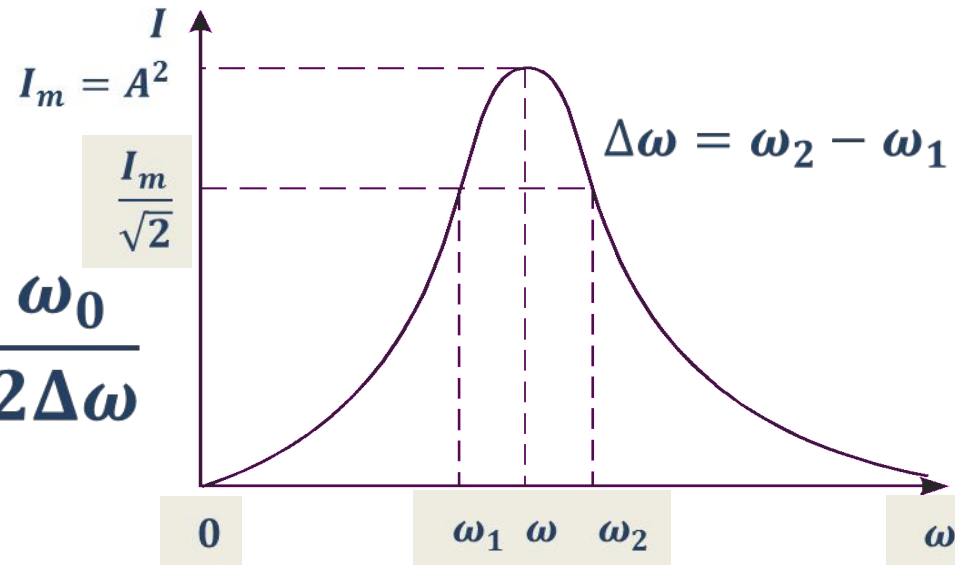
$$\frac{A_{\text{рез}}}{A_0} = \frac{\pi}{\lambda} = Q$$

\Rightarrow Физический смысл добротности:

Добротность показывает во сколько раз амплитуда при резонансе больше статической амплитуды

Добротность можно определить по резонансной кривой:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$$



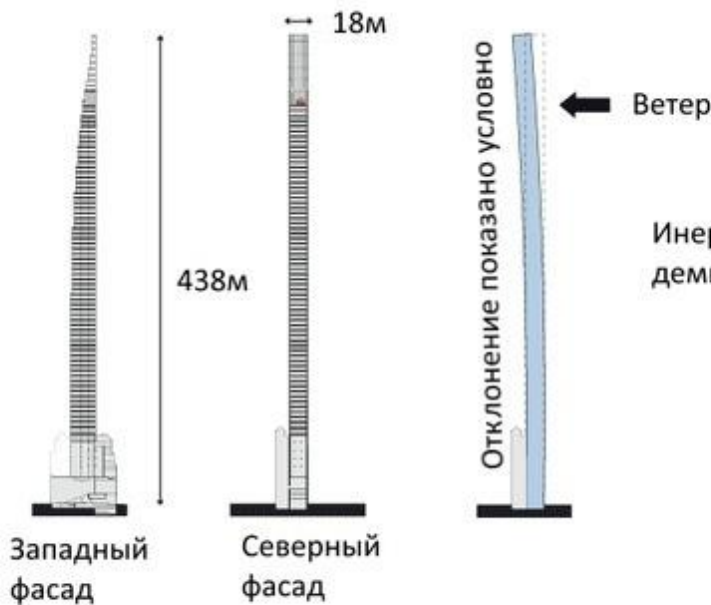
Демпфирование колебаний

Маятниковый баланс

стальной сферический маятник весом в 660 тонн, помещенный внутри здания между 88 и 91 этажом - инерционный демпфер башни "Тайбей 101", которая находится в столице Китайской республики (Тайвань).



Маятниковый баланс



Конструкция демпфера оснащена двумя грузами один из которых подвешен на тросах, а второй опирается на перекрытие



...здание отклоняется. Масса демпфера перемещается в том же направлении, но на меньшее расстояние. Связанный с конструкциями здания системой поршневых опор и распорок, демпфер, благодаря своей массе, способствует возвращению здания в состояние равновесия.

Демпфирование колебаний



Шанхай



Демпфирование колебаний Сингапурский отель Marina Bay Sands

прославился на весь мир свои потрясающим бассейном на крыше, соединяющей сразу три башни отеля. Но отдыхающие и не подозревают, что плавают по сути в огромном демпфере. Вода в бассейне компенсирует колебания во время подземных толчков.



Повторение и обобщение

Дифференциальные уравнения колебаний

гармонические $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

затухающие $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

вынужденные $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$

Решения дифференциальных уравнений колебаний

гармонические $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ $A = \text{const}$

затухающие $x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_{\text{зат}} t + \varphi_0)$

вынужденные $x(t) = A(\omega) \cos(\omega t - \varphi_1)$