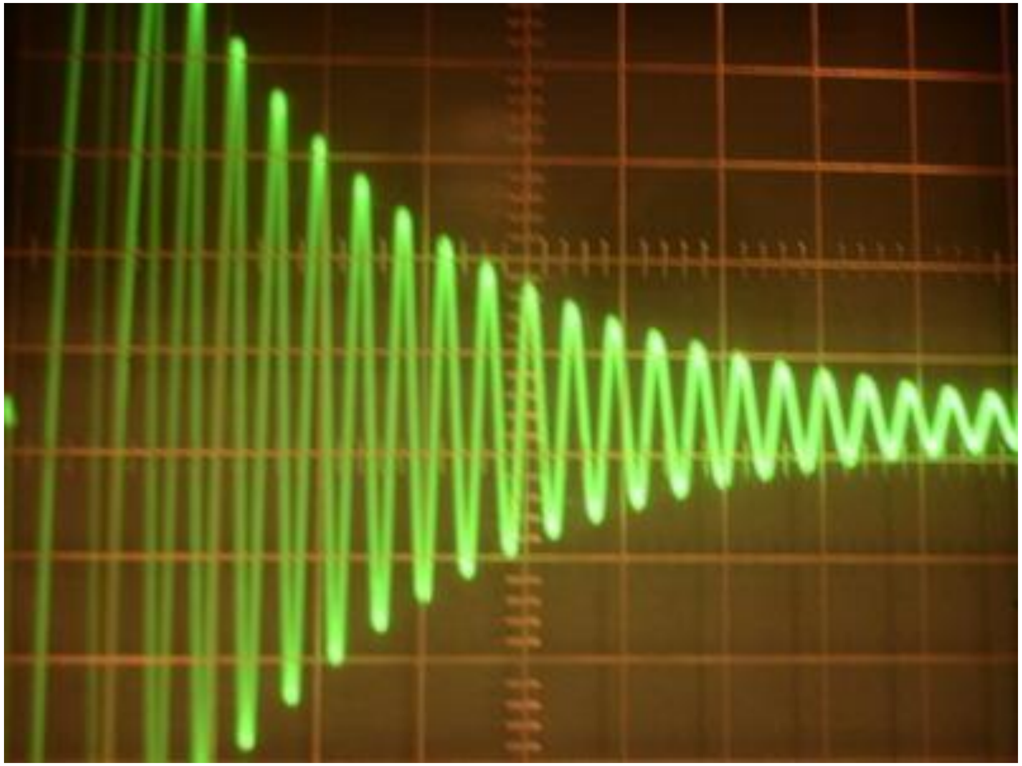
Затухающие колебания



Затухающие колебания

Свободные колебания с уменьшающейся амплитудой называют **затухающими**

Уменьшение амплитуды колебания ведет к потере энергии, т.к. $E(t) \sim A^2(t)$

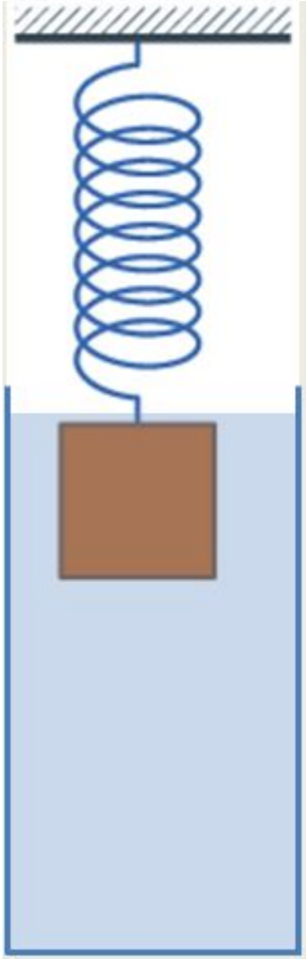
Обычно, **в механической колебательной системе потери энергии связаны с трением**

Рассмотрим на примере пружинного маятника (груз на пружине в стакане с водой)

Вязкое трение: $F_{\text{тр}} = -rv = r\dfrac{dx}{dt}$

где r – **коэффициент сопротивления**

v – **скорость движения**



уравнение движения груза на пружине в стакане воды:

$$\vec{F}_{\text{рез}} = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{тр}}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}$$

или другая форма записи

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}}$$

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

Разделим на m
и преобразуем

$$\ddot{x} + \boxed{\frac{r}{m}}\dot{x} + \boxed{\frac{k}{m}}x = 0$$

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний пружинного маятника в вязкой среде

Учитывая, что

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

собственная частота колебаний

$$\frac{r}{m} = 2\beta$$

β – коэффициент затухания

получим

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний для любой колебательной системы с сопротивлением, пропорциональным скорости

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

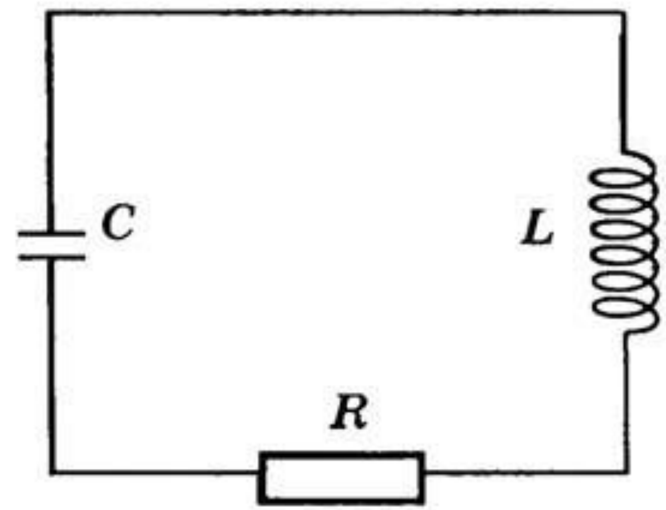
Частным случаем этого уравнения является **уравнение незатухающих колебаний (при β=0)**

Затухающие колебания в ЭМ контуре

$$U_C + \boxed{U_R} = ЭДС_{самоинд}$$

$$U_C = \frac{q}{C} \qquad U_R = RI = R\dot{q}$$

$$ЭДС_{самоинд} = -L\dot{I} = -L\ddot{q}$$



$$\ddot{q} + \boxed{\frac{R}{L}}\dot{q} + \boxed{\frac{1}{LC}}q = 0$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$$ **Собственная частота колебаний контура**

$$\frac{R}{2L} = \beta$$ **Коэффициент затухания колебаний**

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0}$$

Дифференциальное уравнение затухающих ЭМ колебаний

$$\boxed{q(t) = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

В зависимости от соотношения между собственной частотой системы и коэффициентом затухания возможны **три типа решения:**

$\beta < \omega_0$ **– колебательный режим**

$\beta = \omega_0$ **– критический режим**

$\beta > \omega_0$ **– апериодический режим**

При $\beta < \omega_0$ **решение дифференциального уравнения:**

Затухающие колебания подчиняются закону механические колебания

$$\boxed{x(t) = \boxed{A_0 e^{-\beta t}} \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

амплитуда затухающих колебаний

частота затухающих колебаний

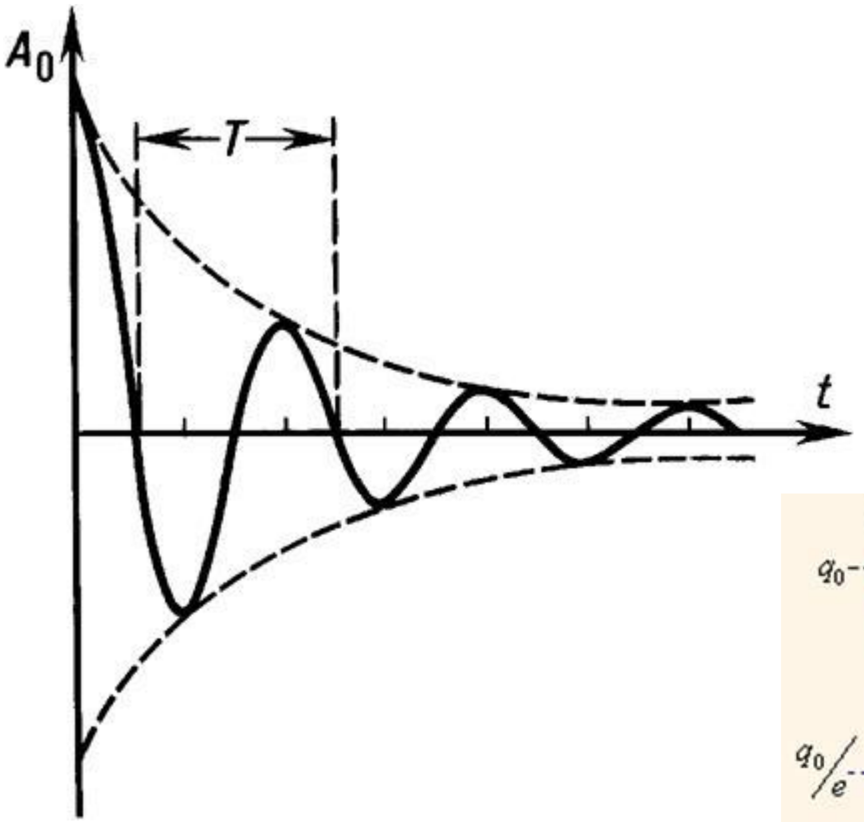
где

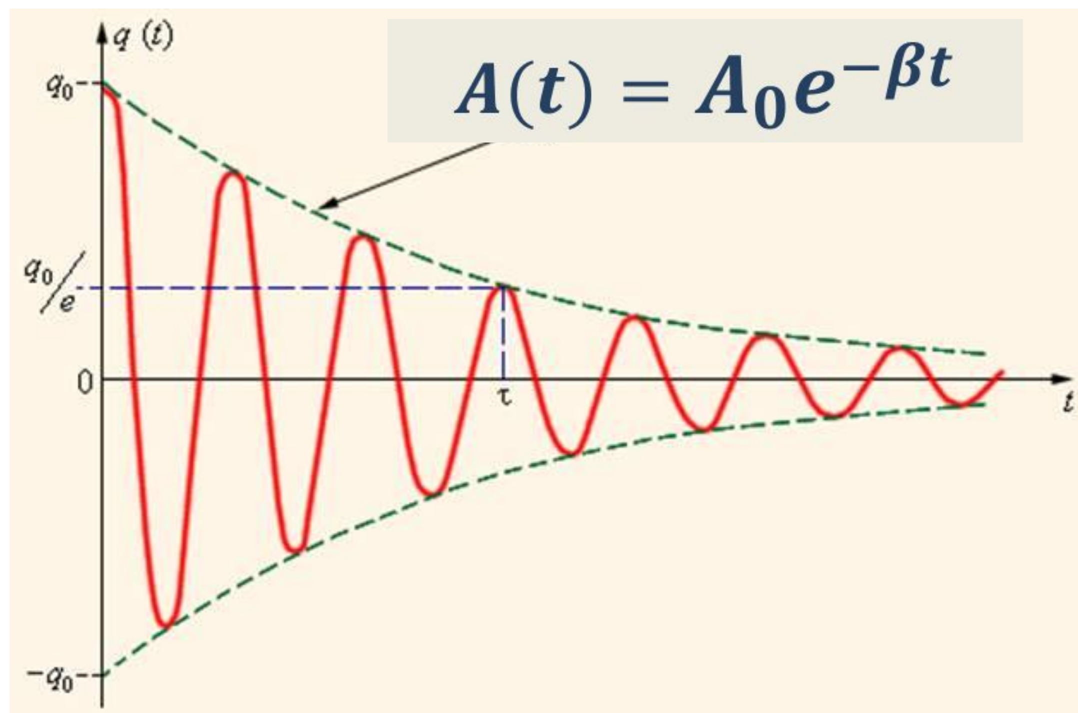
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Параметры затухающих колебаний

Частота затухающих колебаний	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$	$\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ механические	$\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ ЭМ
Амплитуда затухающих колебаний **Начальная амплитуда**	$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ $A_0 = A(0)$		
Период затухающих колебаний	$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$	$T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$	
Коэффициент затухания	β	$\beta = \dfrac{r}{2m}$ механические	$\beta = \dfrac{R}{2L}$ ЭМ
Время релаксации	$\tau = \dfrac{1}{\beta}$		
Логарифмический декремент затухания	$\lambda = \beta T$		
Добротность колебательной системы	$Q = \dfrac{\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega_0}{2\beta}$	$Q = \dfrac{\sqrt{km}}{r}$ механические	$Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ ЭМ

Период затухающих колебаний





$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

Время релаксации

Время релаксации
τ

промежуток времени, за который амплитуда затухающих колебаний уменьшается в е раз

$$A(\tau) = A_0 e^{-\beta\tau} = \frac{A_0}{e} = A_0 e^{-1} \Rightarrow \beta\tau = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{1}{\beta}}$$

τ **Время релаксации обратно пропорционально коэффициенту затухания**

β **Коэффициент затухания**

- **обратно пропорционален времени релаксации**
- **показывает во сколько раз амплитуда уменьшается за единицу времени**

Логарифмический декремент затухания

Логарифмический декремент затухания **натуральный логарифм двух последовательных амплитуд**

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

N_e – количество колебаний за время уменьшения амплитуды в ***e*** раз

Физический смысл λ **Характеризует степень затухания – показывает за какое количество колебаний амплитуда уменьшается в *e* раз**

Пусть $\lambda = 1$ тогда $\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{1}$ т.е. за одно колебание амплитуда уменьшится в ***e*** раз

Пусть $\lambda = 3$ тогда $\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{1/3}$ т.е. за одно колебание амплитуда уменьшится в $e^{1/3}$ раз

Величина, постоянная для данной колебательной системы

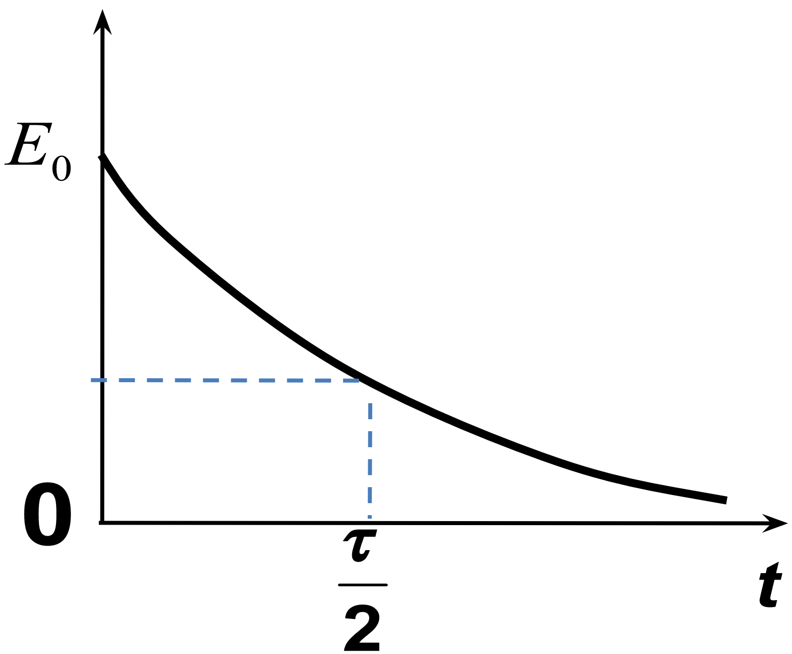
или: амплитуда уменьшится в ***e*** раз за 3 колебания

Добротность колебательной системы

Q – характеризует потери энергии колебательной системы за период

$$Q = 2\pi \frac{\text{запасенная энергия}}{\text{потери энергии за период}} = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$$

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \Rightarrow E(t) = E_0 e^{-2\beta t}$$



$$Q = 2\pi \frac{E(0)}{\Delta E(t)}$$

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\lambda}}$$

$$\lambda = \beta T$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Добротность означает **качественность:** **чем больше добротность системы, тем ближе она к идеальной, тем медленнее затухают колебания**

При малых затуханиях можно считать, что энергия в колебательной системе изменяется по закону

$$E(t) = E_0 e^{-2\beta t}$$ где $$E_0 = \frac{1}{2}kA^2$$

***E*o**- значение энергии в начальный момент времени. Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E_0 e^{-2\beta t} = -2\beta E$$

Скорость убывания энергии со временем

$$\left(-\frac{dE}{dt}\right) = 2\beta E = -\Delta E$$

Если за период энергия мало изменяется, то при умножении этого выражения на *T* можно найти убыль энергии за период и выразить добротность через энергию.

$$\frac{E}{(-\Delta E)} = 2\beta T E = 2\lambda E = \frac{Q}{2\pi}$$

Режимы затухающих колебаний

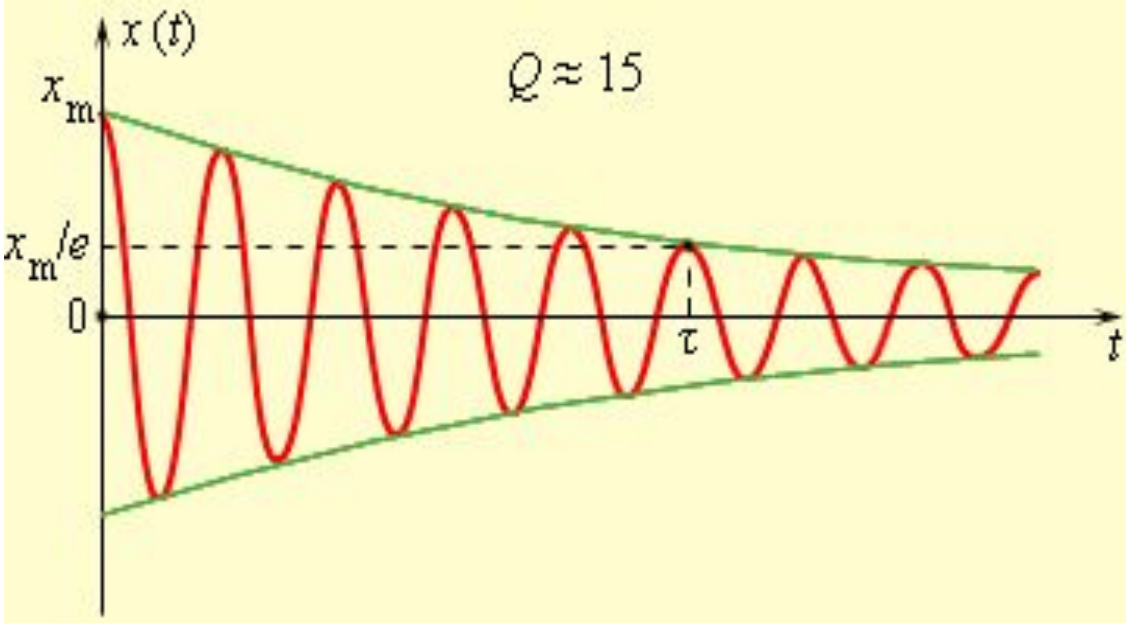
Колебательный режим

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

В случае слабого затухания

$$\beta < \omega_0 \qquad \beta^2 \ll \omega_0^2$$

$$\omega \approx \omega_0 \qquad T \approx T_0$$



Логарифмический декремент затухания

$$\boxed{\lambda = \beta T_0 = \beta \frac{2\pi}{\omega_0} \ll 1}$$

Добротность

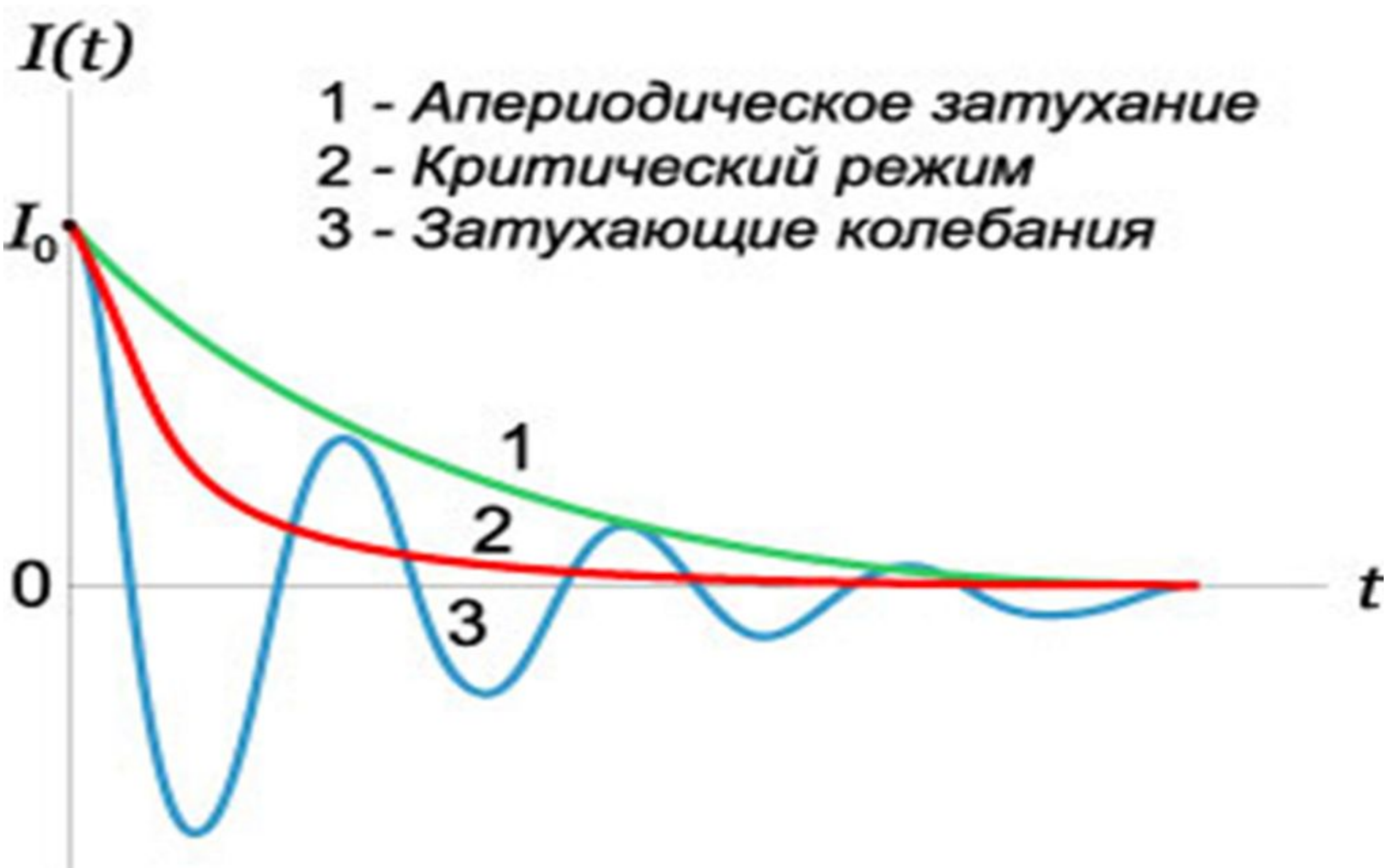
$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\lambda} \gg 1}$$

Количество колебаний за время, равное времени релаксации

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda}$$

$$Q = \pi N_e$$

Режимы затухающих колебаний



<u>При большом коэффициенте затухания</u> происходит быстрое уменьшение амплитуды и увеличивается период колебаний. Когда сопротивление становится равным критическому , ($\beta = \omega_0$,), колебания прекращаются. Такой процесс называется <u>апериодическим</u> . $T \to \infty$

В случае апериодического движения энергия тела при возвращении в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление сил сопротивления, трения.

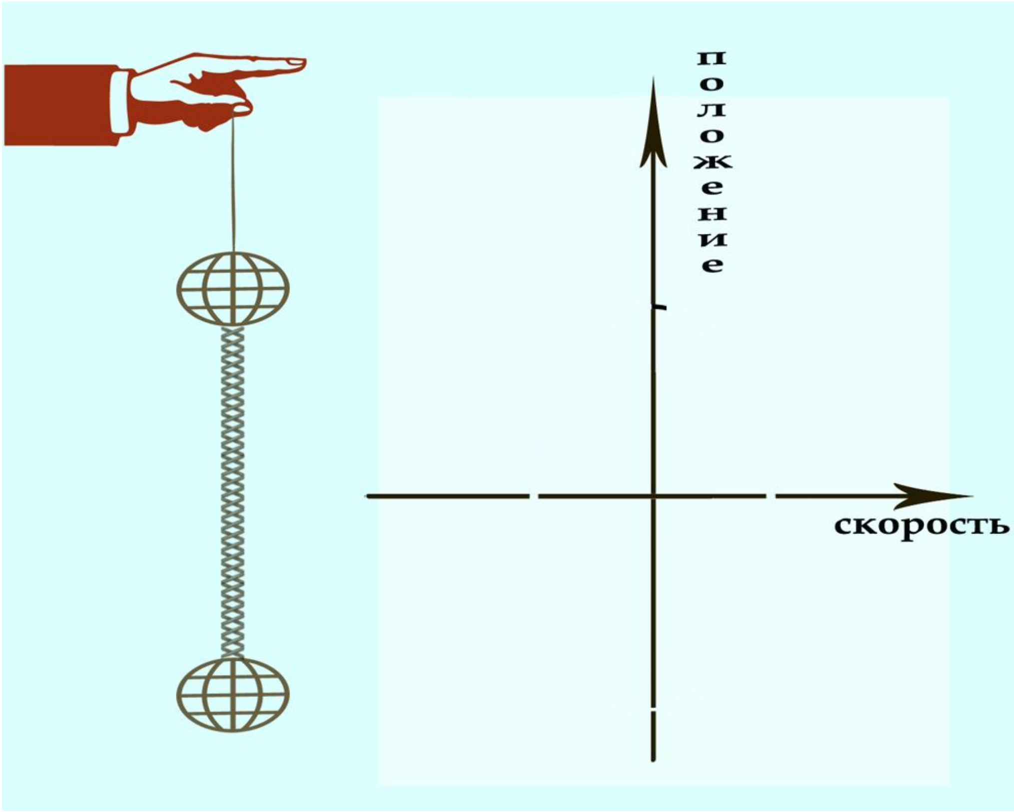
Таблица электро-механических аналогий

Механические колебания	***Электромагнитные колебания***
Смещение x	Заряд конденсатора q
Амплитуда смещения A	Амплитуда заряда q_0
Масса m	Индуктивность L
Коэффициент жесткости κ	Величина, обратная емкости $\frac{1}{C}$
Максимальная скорость v_0	Максимальная сила тока I
Ускорение a	Скорость изменения силы тока
Потенциальная энергия $\Pi = \frac{\kappa x^2}{2}$	Энергия электрического поля $W_E = \frac{q^2}{2C}$
Кинетическая энергия $K = \frac{mv^2}{2}$	Энергия магнитного поля $W_B = \frac{LI^2}{2}$
Импульс $p=mv$	Магнитный поток $\Phi_B=LI$
Коэффициент затухания $\beta = \frac{r}{2m}$	Коэффициент затухания $\beta = \frac{R}{2L}$
Амплитуда колебаний $x(t) = Ae^{-\beta t}$	Амплитуда заряда на конденсаторе $Q(t) = q_0 e^{-\beta t}$
Время релаксации $\tau = \frac{1}{\beta}$	Время релаксации $\tau = \frac{1}{\beta}$

Фазовое пространство

Координатами в этом пространстве служат положения и скорости исследуемых точек.

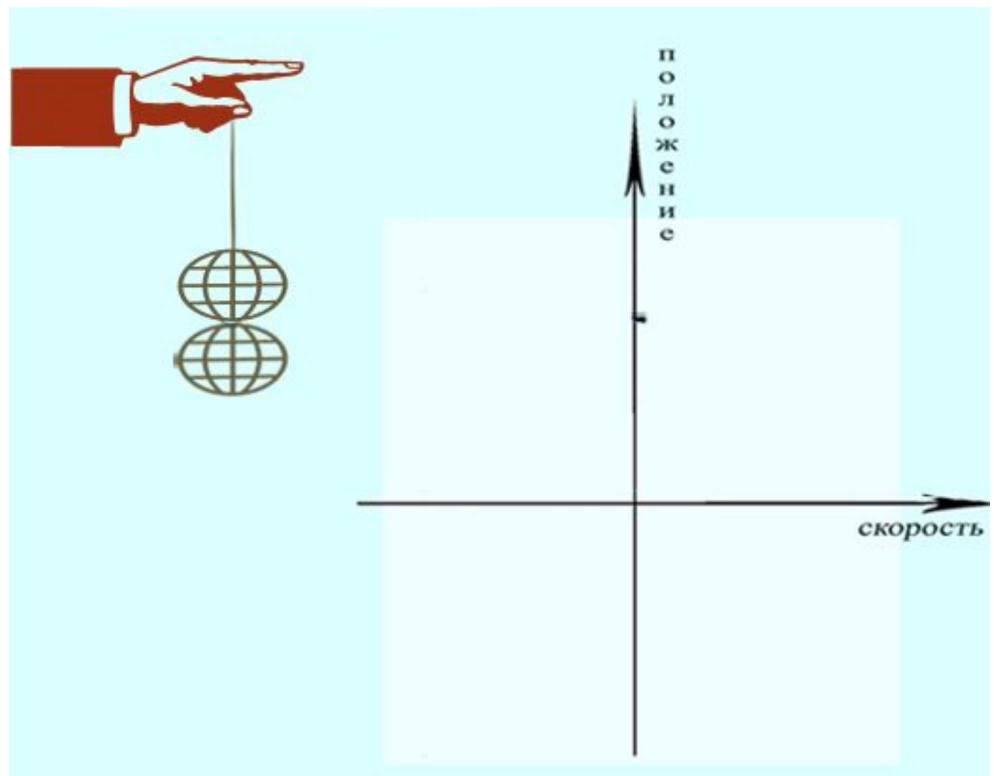
Например, шарик, колеблющийся без трения, описывает в фазовом пространстве замкнутую кривую — *фазовую траекторию.*



Фазовая траектория колебаний с трением.

Колебания с трением постепенно затухают. При этом фазовая траектория сходится по спирали к предельной точке, соответствующей остановке шарика.

Эта точка неподвижна: если шарик подтолкнуть, фазовая траектория к ней вернется. Она как бы притягивает все близлежащие фазовые траектории.



Вынужденные колебания

Вынужденные колебания

Свободные колебания реальной колебательной системы всегда являются затухающими

Чтобы возбудить в такой системе незатухающие колебания, **необходимо компенсировать потери энергии**, обусловленные трением колебаний

Будем воздействовать на колеблющуюся систему **внешней вынуждающей силой *F*, изменяющейся по гармоническом закону**

$$F_{\text{вын}}(t) = F_0 \cos \omega t$$

⇨ Возникающие при этом в системе колебания называются **вынужденными**

Итак,

Вынужденные колебаний	**колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы**

Уравнение вынужденных колебаний

Силы, действующие на систему

$$\vec{F}_{\text{рез}} = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}} + \vec{F}_{\text{вын}}$$

$$\boxed{m\ddot{x}} = \boxed{-kx} - \boxed{r\dot{x}} + \boxed{F_0 \cos \omega t}$$

Результирующая сила

Квазиупругая сила

Сила **сопротивления**

Вынуждающая сила

Разделим это уравнение на m, перенесем члены, содержащие x в левую часть:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t}$$

Неоднородное линейное **дифференциальное уравнение** второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Собственная частота

$$\beta = \frac{r}{2m}$$

Коэффициент затухания

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

Амплитуда вынуждающей силы

Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний

Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения $x(t) = x_1 + x_2$

$$x_1 = A_0 e^{-\beta t} \cos\left(\omega_{\text{зат}} t + \varphi_0\right)$$

$$\omega_{\text{зат}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$x_2 = A(\omega) \cos\left(\omega t - \varphi_1\right)$$

т.е.:

$$x(t) = \boxed{A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)} + \boxed{\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}} \cos\left(\omega t - \boxed{arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}\right)$$

Играет существенную роль только в начальной стадии процесса (при установлении колебаний)

Амплитуда вынужденных колебаний

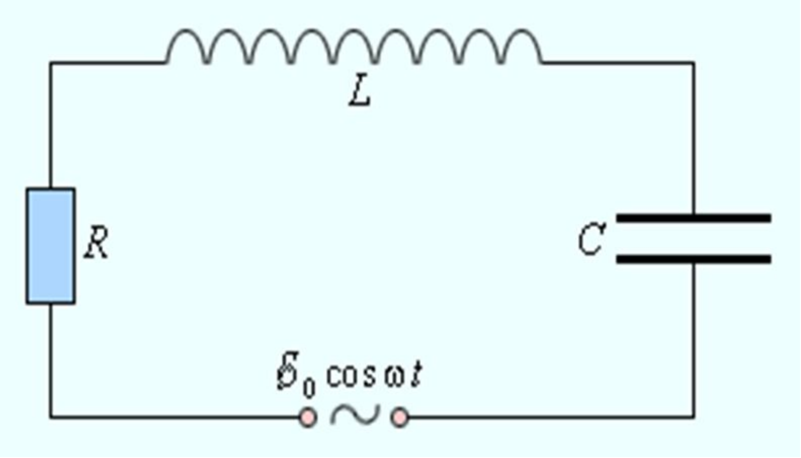
Отставание по фазе

Для ЭМ колебаний – аналогично

Вынужденные ЭМ колебания

По II правилу Кирхгоффа

$$U_C + U_L + U_R = \varepsilon$$



$$U_C = \frac{q}{C} \qquad U_L = L\dot{I} = L\ddot{q}$$

$$U_R = RI = R\dot{q}$$

Вынуждающая сила:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos \omega t$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \varepsilon_m \cos \omega t$$

$$\ddot{q} + \boxed{\frac{R}{L}}\dot{q} + \boxed{\frac{1}{LC}}q = \varepsilon$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\beta = \frac{R}{2L}$$

$$f_0 = \frac{\varepsilon_m}{L}$$

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = f_0 \cos \omega t}$$

Неоднородное линейное **дифференциал. уравнение** второго порядка с постоянными коэффициентами:

Уравнение вынужденных электромагнитных колебаний

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = f_0 \cos \omega t$$

Вынуждающая сила: $U = U_m \cos \omega t$

Решение уравнения :

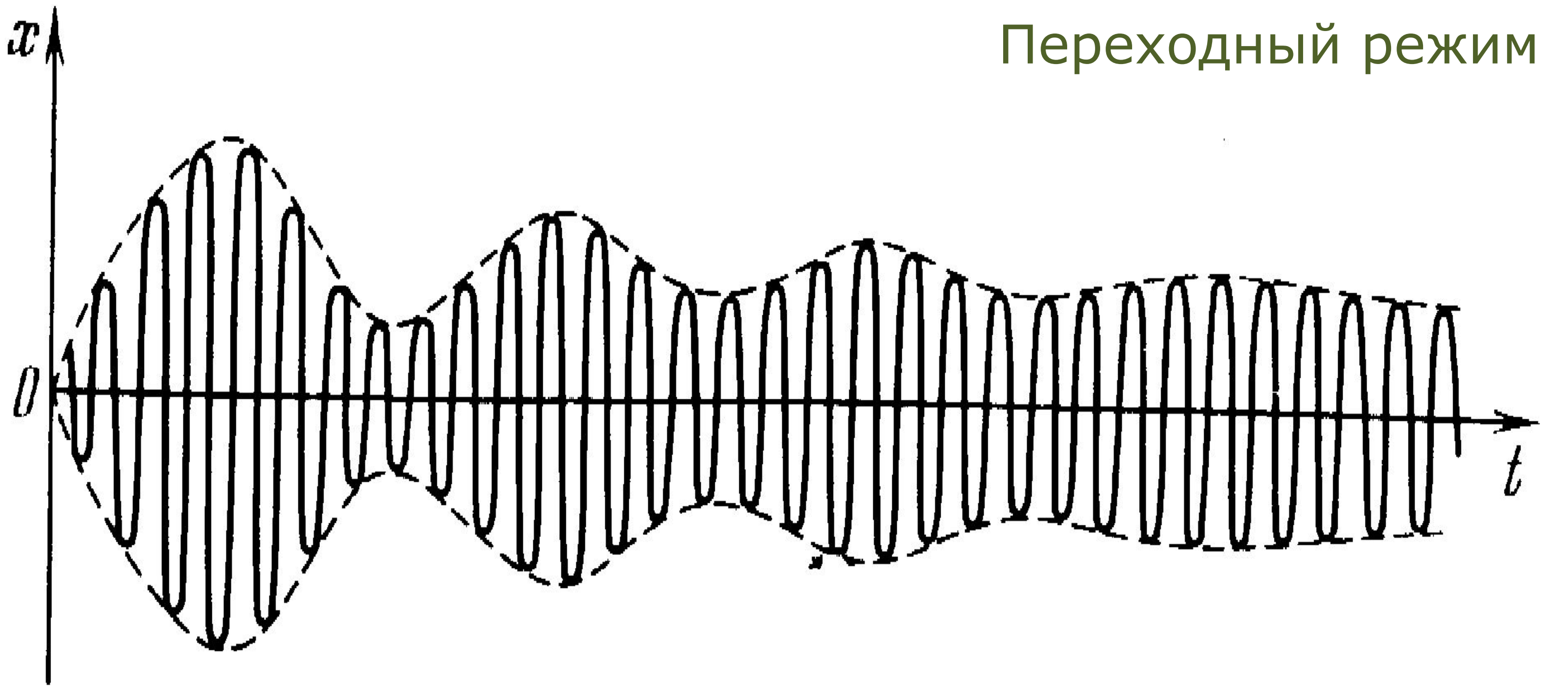
$$q(t) = q_1 + q_2$$

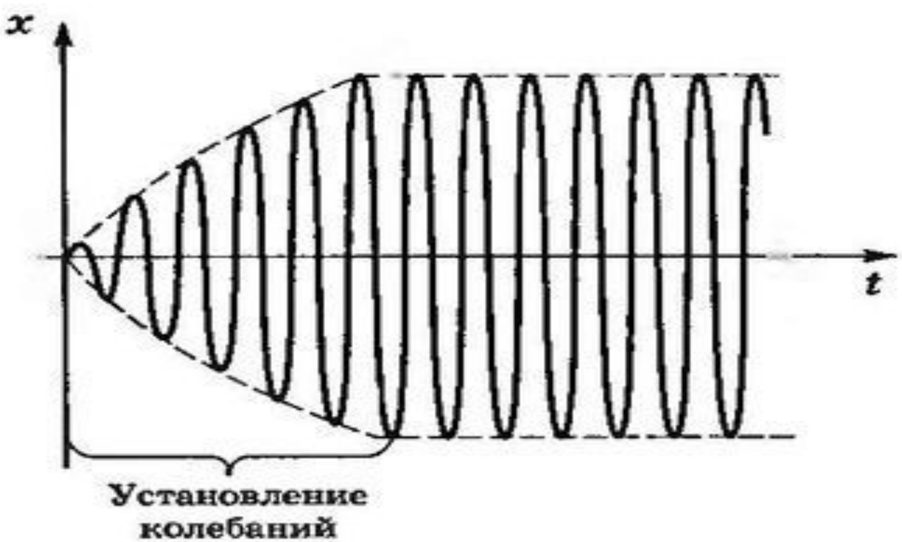
$$q_1 = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_{\text{зат}} t + \varphi_0)$$

$$q_2 = q(\omega) \cos(\omega t - \varphi_1)$$

График вынужденных колебаний

Переходный режим





Стационарный режим

Математика и физический опыт показывают, что **через некоторое время в системе устанавливаются гармонические колебания с частотой вынуждающей силы, но отстающие от нее по фазе**

Параметры вынужденных колебаний

Установившиеся вынужденные колебания

$$x(t) = A\cos(\omega t - \varphi_1)$$

Частота вынужденных колебаний

$$\omega(t) = \omega$$

частота вынуждающей силы

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A(\omega) = \frac{\boxed{f_0}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

амплитуда вынуждающей силы

частота вынуждающей силы

вспомним, что амплитуда при:

- незатухающих колебаниях A = const
- затухающих колебаниях $A = f(t$ и $\beta)$

Отставание по фазе вынужденных колебаний от вынуждающей силы

$$\varphi_1 = arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

величина отставания зависит от частоты вынуждающей силы

Амплитудно-частотная зависимость

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\boxed{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}$$

$A(\omega)$ – *max*

при *min*

собственная частота системы

частота вынуждающей силы

Резонанс

явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к резонансной частоте

$$\boxed{A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}}$$

$$\boxed{\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$

Характеристика системы

Резонансная частота

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

при $\sqrt{4\beta^2\omega^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2} \to 0$

$A(\omega) \to \infty$

При каких ω **?**

Продифференцируем это выражение по ω и приравняем нулю, получим условия для определения $\omega_{\text{рез}}$

$$-4\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\omega + 8\beta^2\omega = 0$$

Полученное уравнение имеет два решения:

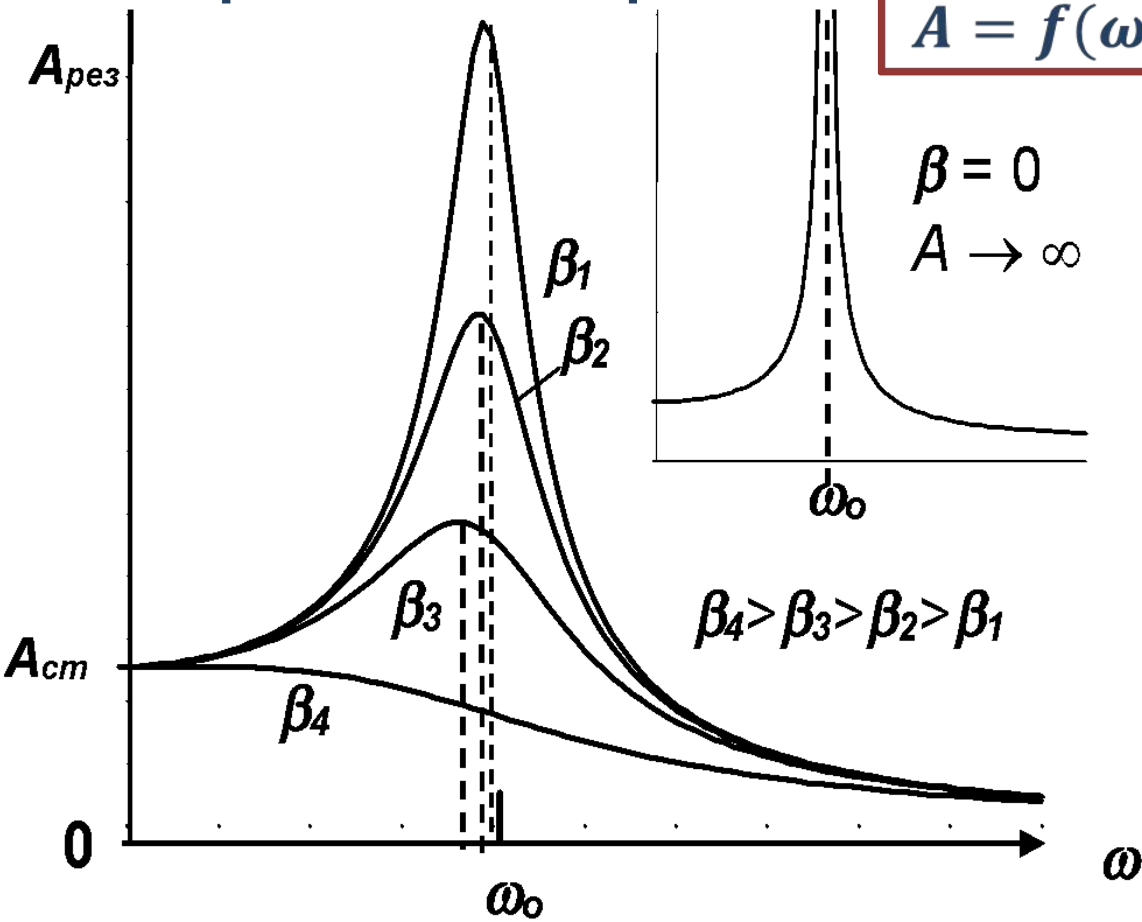
$$\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

«-» не имеет физического смысла, остается со знаком «+»

Резонансные кривые

Зависимость амплитуды ***A*** вынужденных колебаний от частоты ***ω*** вынуждающей силы называется **резонансной характеристикой** или **резонансной кривой**

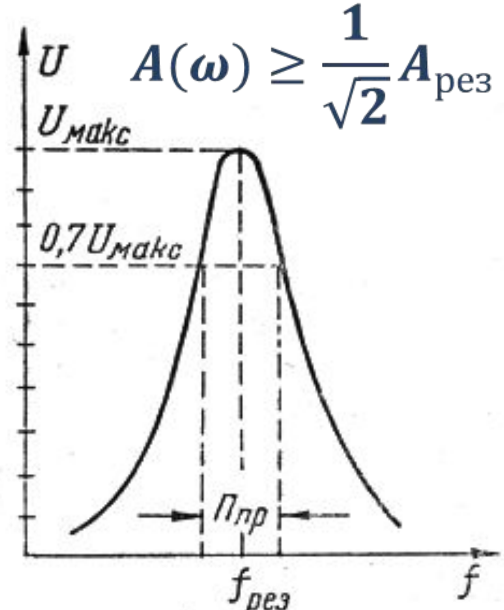
$$\boxed{A = f(\omega)}$$



Полоса пропускания

область частот $\Delta\omega$, внутри которой **амплитуда вынужденных колебаний**

$$A(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} A_{\text{рез}}$$

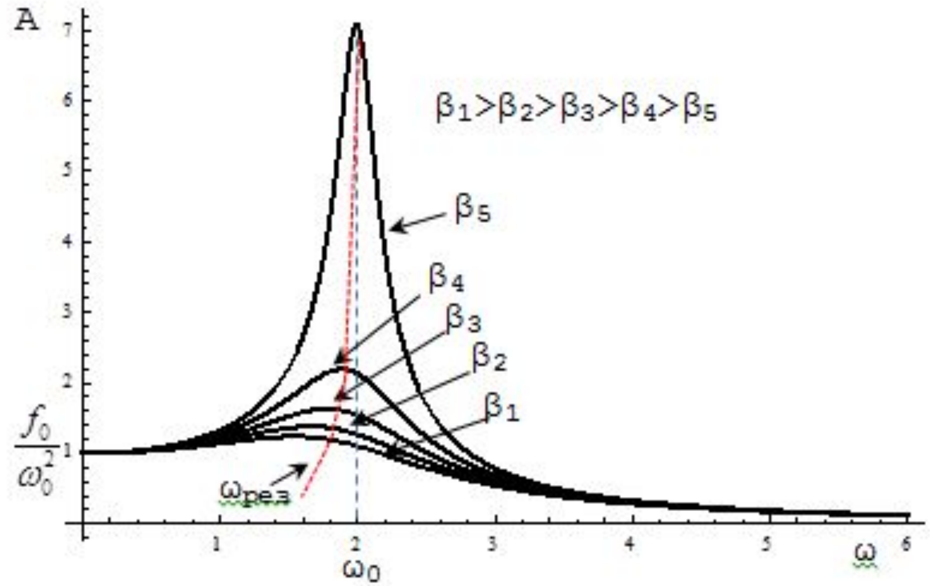


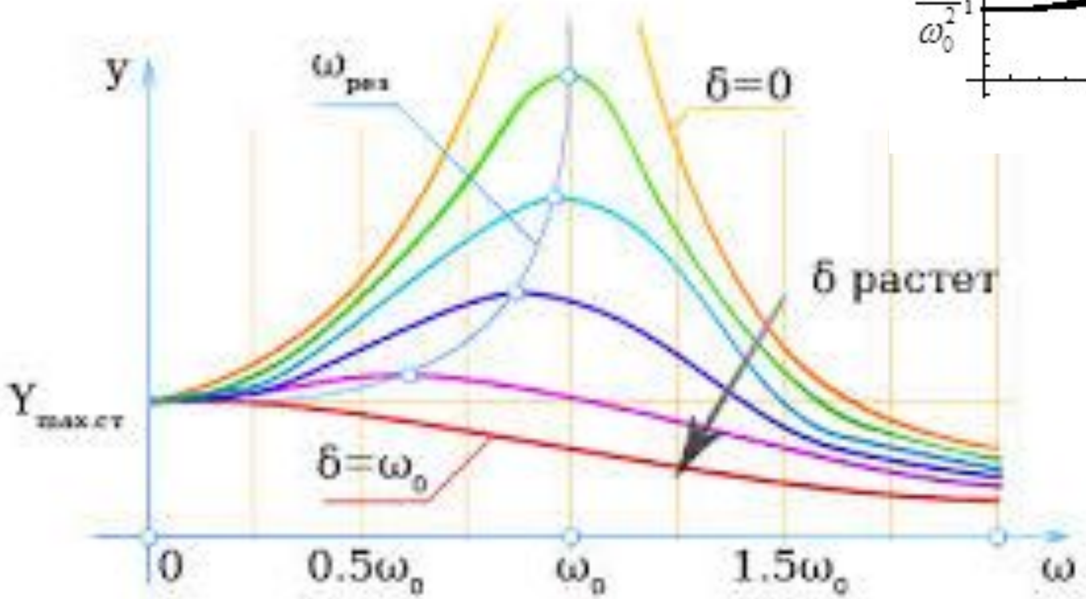
ширина резонансной кривой

Вид резонансной кривой зависит от f_0 и β:

чем > β, тем шире кривая и левее ее max

Резонансные кривые





Анализ фазово-частотной характеристики

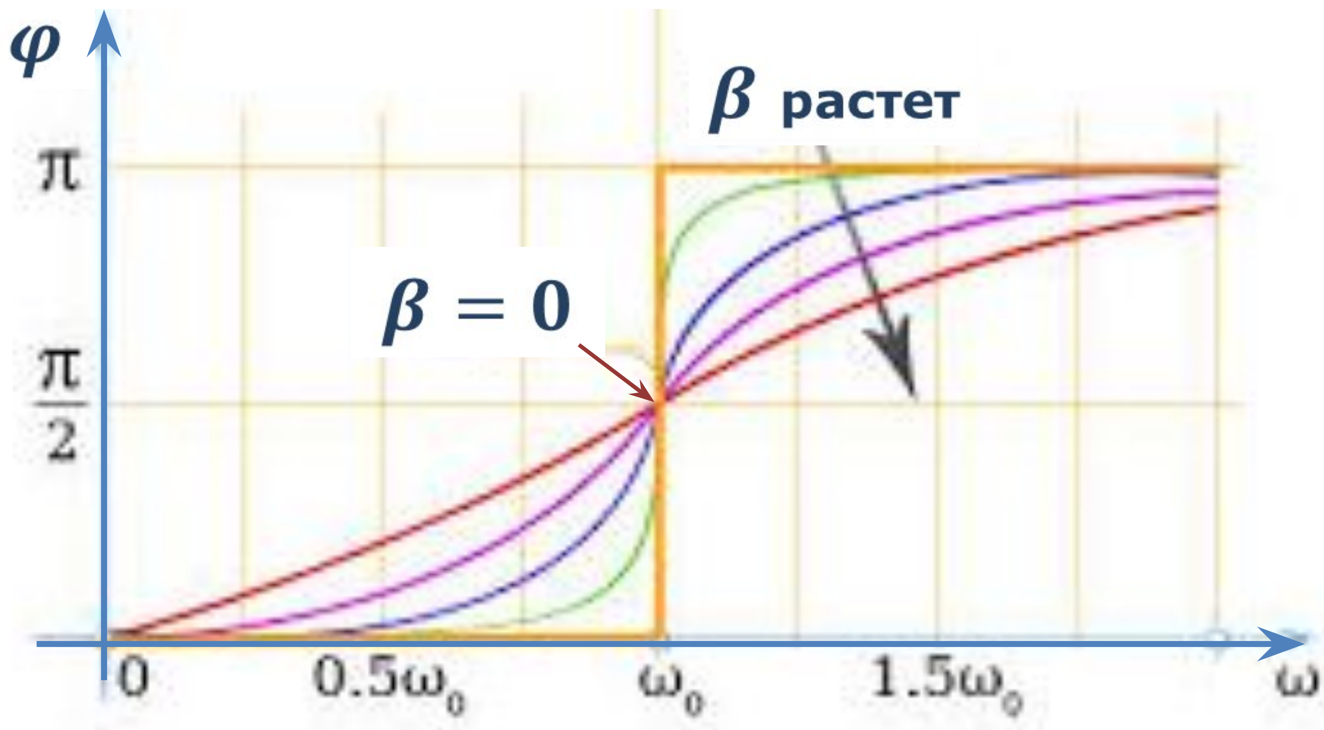
Демонстрация зависимости фазы вынужденных колебаний от коэффициента затухания

$$x = A(\omega)\cos(\omega t - \phi_1)$$

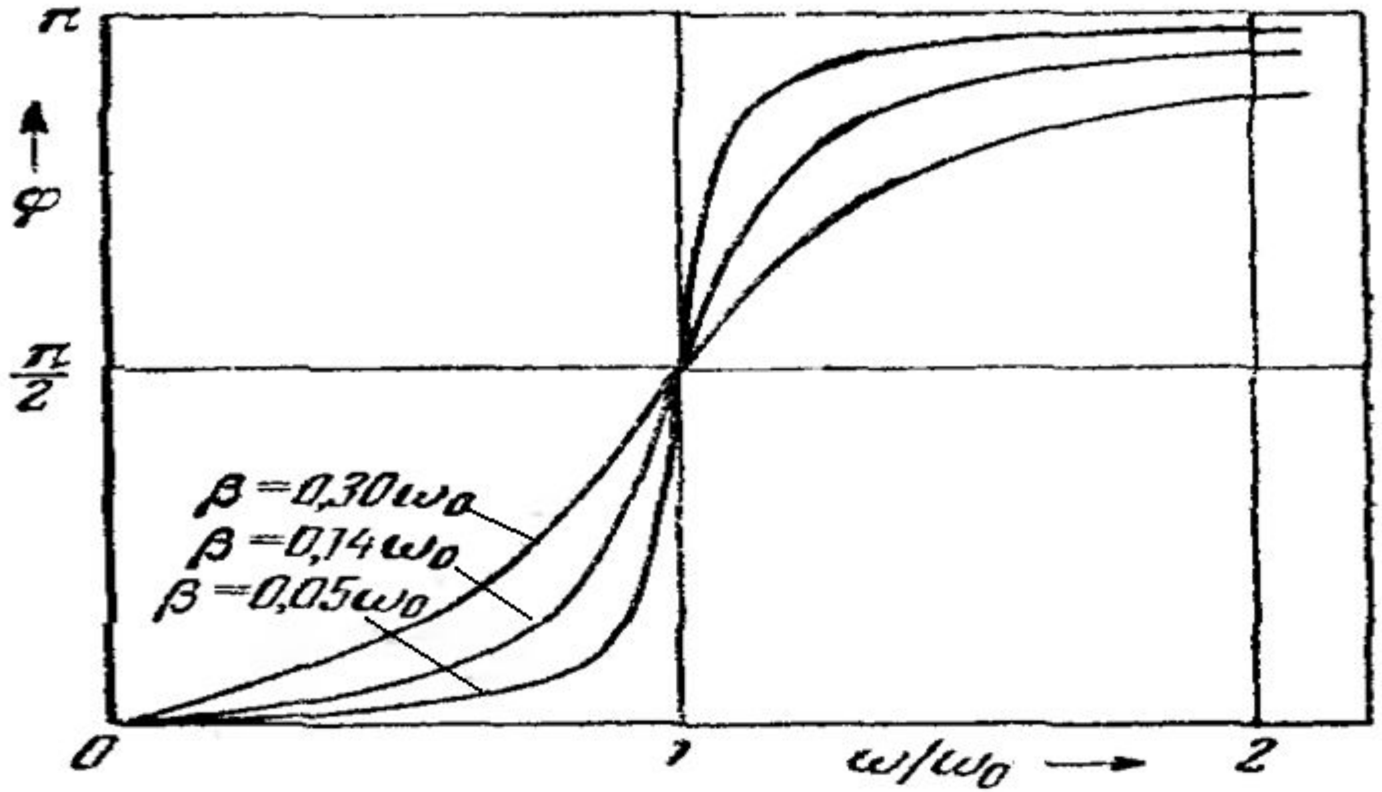
$$F = F_0 \cos \omega t$$

$$\varphi = f(\omega)$$

$$\varphi_1 = arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



РЕЗОНАНС



Зависимость ***φ*** от ***ω*** при различных значения коэффициента затухания ***β***. Частоте $\boldsymbol{\omega_0}$ соответствует ***φ=π/2.***

$$\varphi = arctg\,\frac{2\beta w}{w_0^2 - w^2}$$

Случай малого затухания. Добротность

$\beta \ll \omega_0$ $$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} =$$

Учитывая, что

$m\omega_0^2 = k$ $$A_{рез} = \frac{F_0\omega_0}{2k\beta} =$$

$F_0 = kA_0$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

Учитывая, что

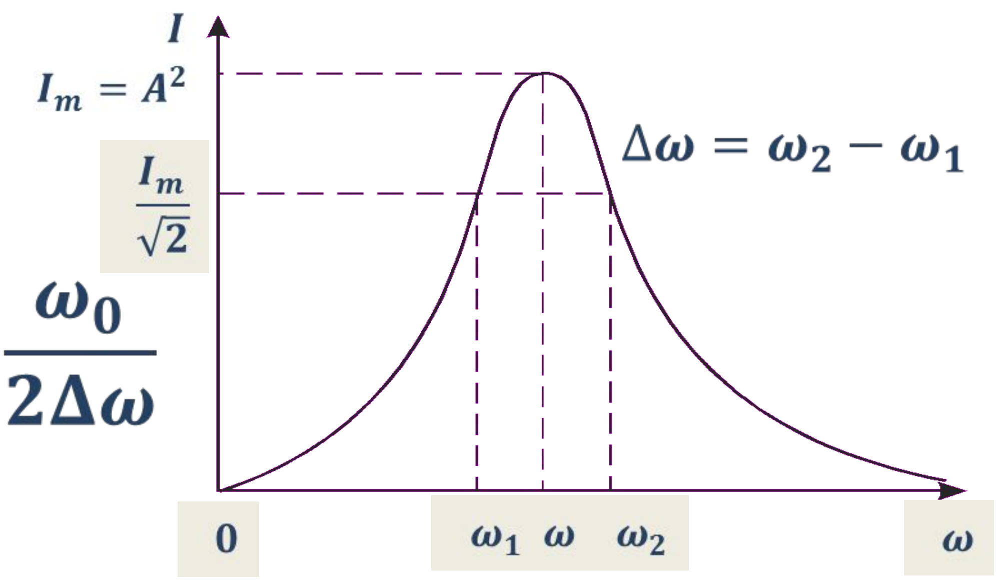
$\beta T_0 = \lambda$ $$A_{рез} = \frac{A_0\pi}{\lambda}$$ $$\frac{A_{рез}}{A_0} = \frac{\pi}{\lambda} = Q$$

Физический смысл добротности:

Добротность показывает во сколько раз амплитуда при резонансе больше статической амплитуды

Добротность можно определить по резонансной кривой:

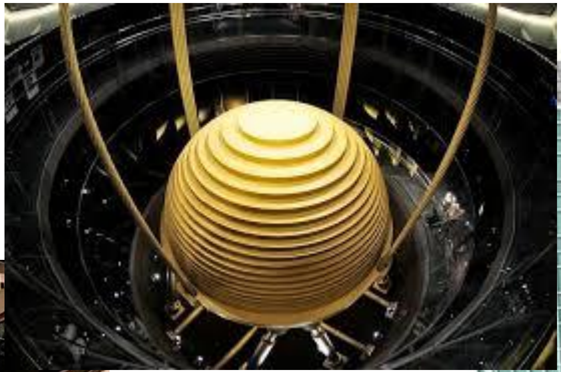
$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}$$



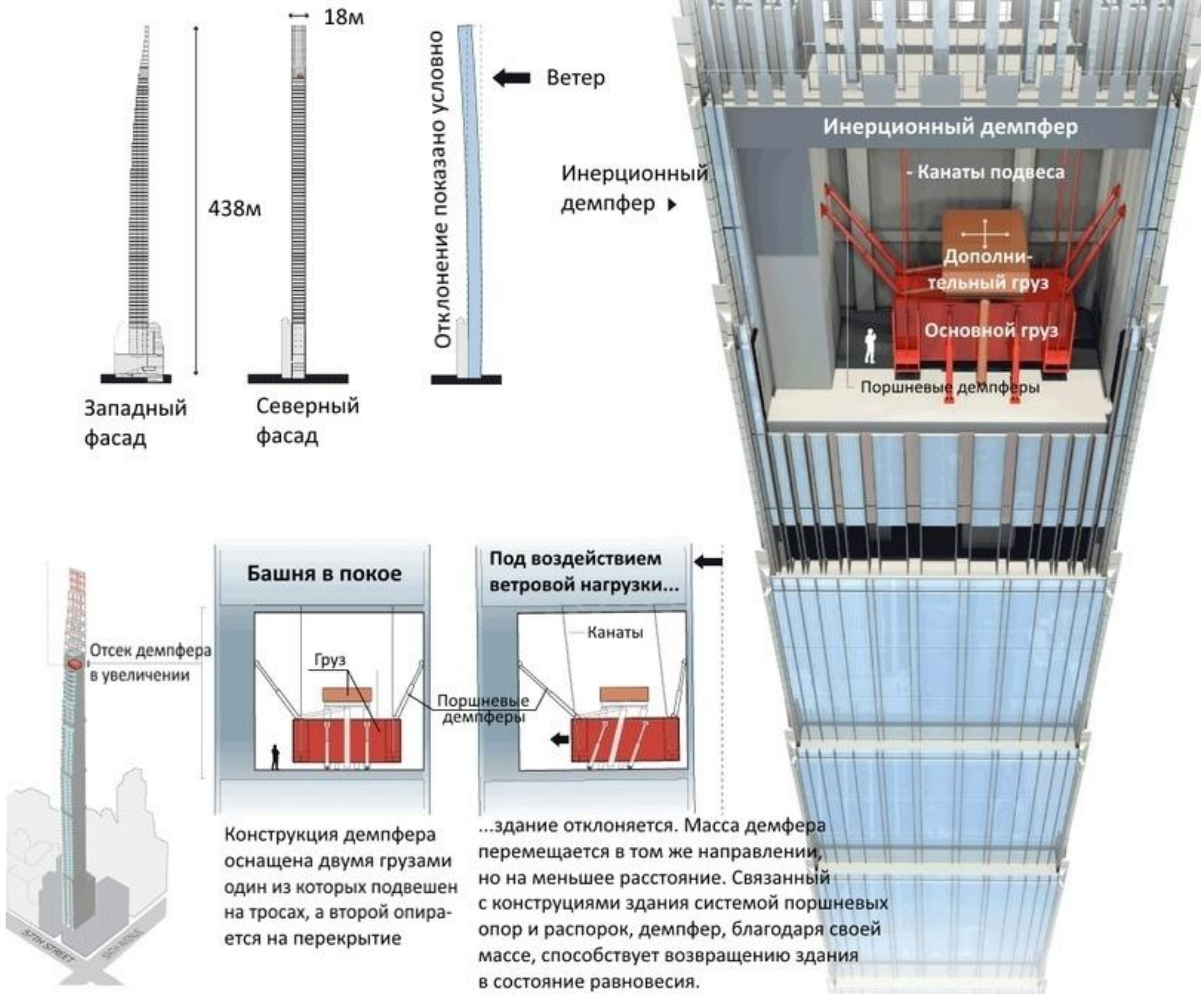
Демпфирование колебаний

Маятниковый баланс

стальной сферический маятник весом в 660 тонн, помещенный внутри здания между 88 и 91этажом-инерционный демпфер башни "Тайбей 101", которая находится в столице Китайской республики (Тайвань).



Маятниковый баланс



Демпфирование колебаний

Шанхай

Демпфирование колебаний
Сингапурский отель Marina Bay Sands

прославился на весь мир свои потрясающим бассейном на крыше, соединяющей сразу три башни отеля. Но отдыхающие и не подозревают, что плавают по сути в огромном демпфере. Вода в бассейне компенсирует колебания во время подземных толчков

Повторение и обобщение

Дифференциальные уравнения колебаний

гармонические $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

затухающие $$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

вынужденные $$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

Решения дифференциальных уравнений колебаний

гармонические $$x(t) = A\cos(\omega_0\, t + \varphi_0)$$ $$\boxed{A = const}$$

затухающие $$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_{\text{зат}} t + \varphi_0)$$

вынужденные $$x(t) = A(\omega)\cos\,(\omega t - \varphi_1)$$