

Тема 2. Волны в упругой среде

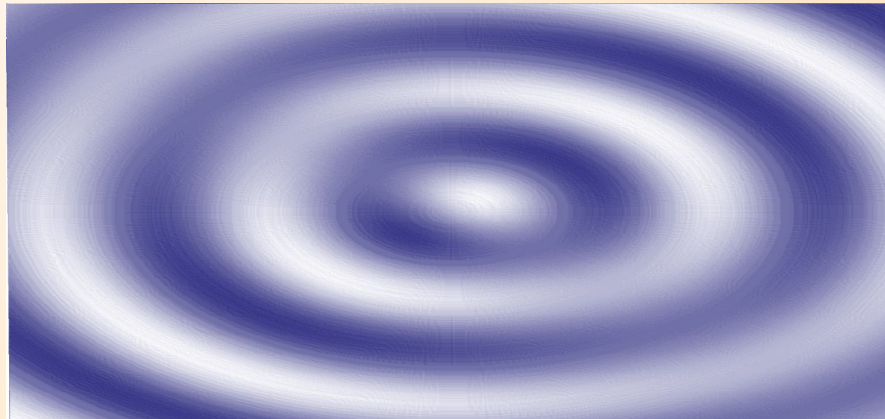
Основные вопросы темы:

- 2.1. Образование волн. Принцип Гюйгенса
- 2.2. Уравнение бегущей волны
- 2.3. Волновое уравнение
- 2.4. Скорость волны
- 2.5. Энергия упругой волны
- 2.6. Звуковые волны
- 2.7. Эффект Доплера

2.1. Образование волн. Принцип Гюйгенса.

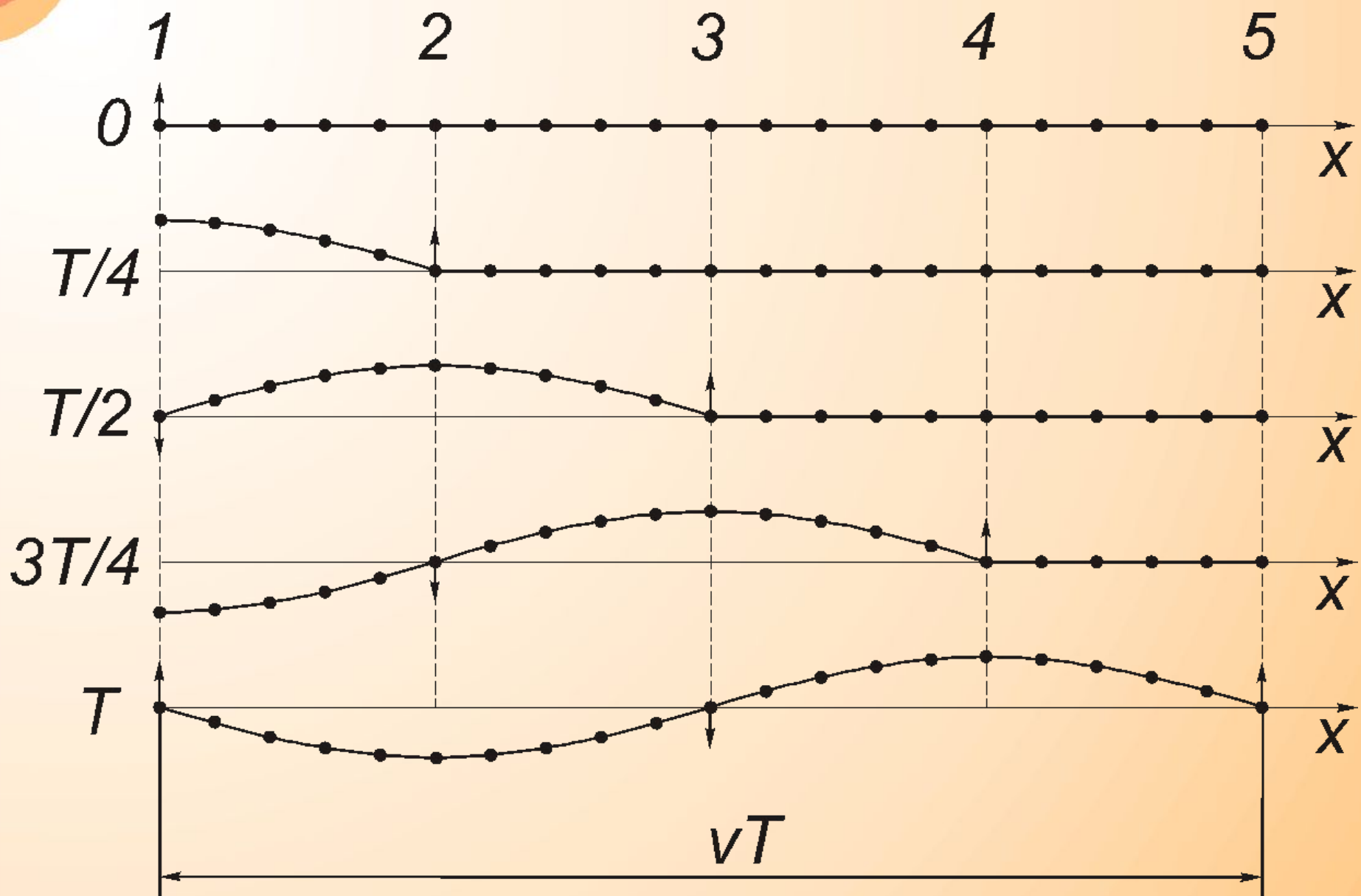


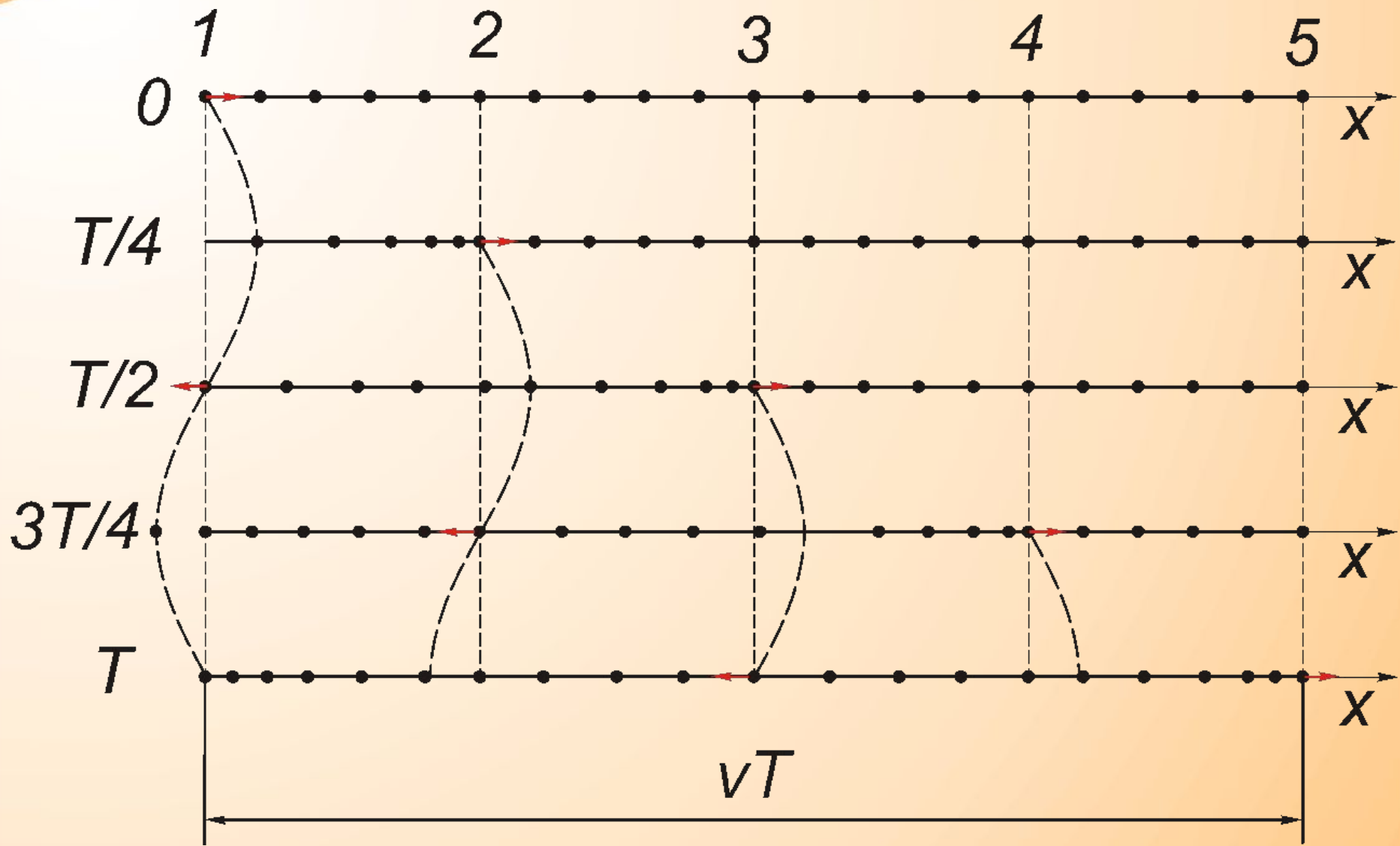
- Процесс распространения колебаний в пространстве, сопровождающийся переносом энергии, называется **ВОЛНОЙ**.



- Волна называется ***поперечной***, если направление колебаний частиц среды перпендикулярно направлению распространения волны.

- Волна называется ***продольной***, если направление колебаний частиц среды совпадает с направлением распространения волны.



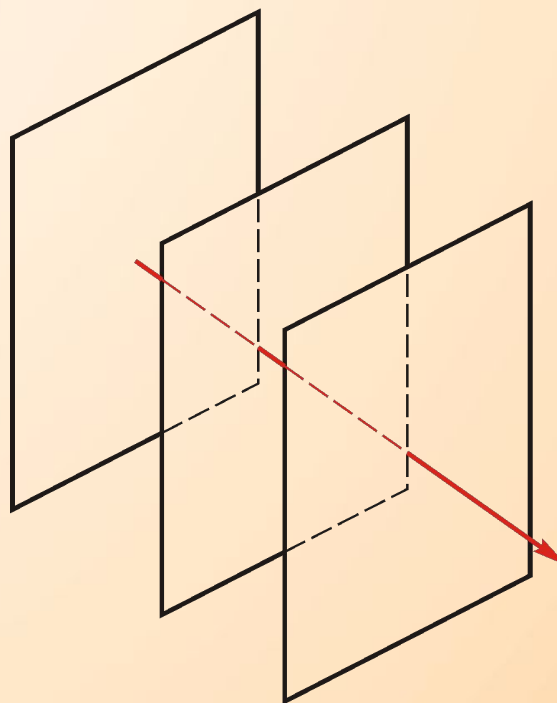


- Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называется **фронтом волны** (волновым фронтом).

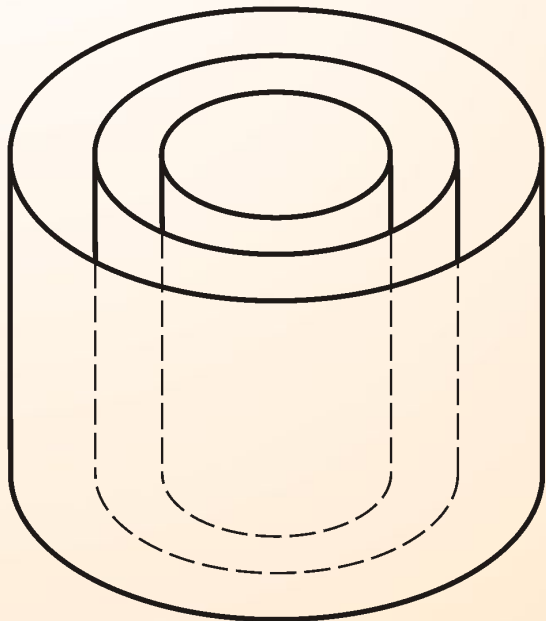
- Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью**.

В зависимости от формы волновой поверхности волны бывают плоские, сферические, цилиндрические.

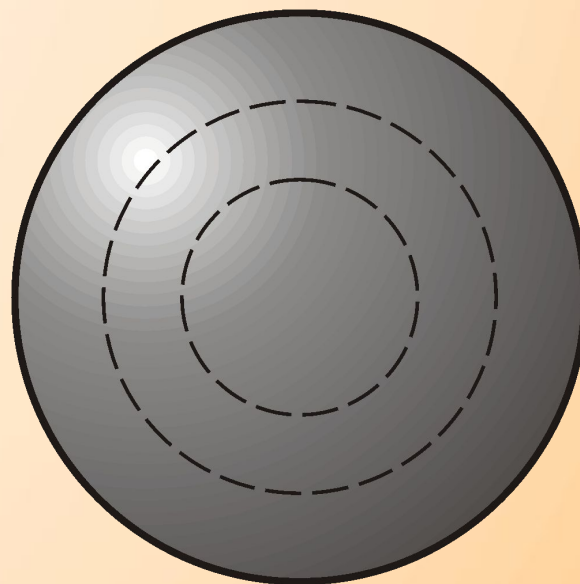
Плоская волна:



Цилиндрическая волна:

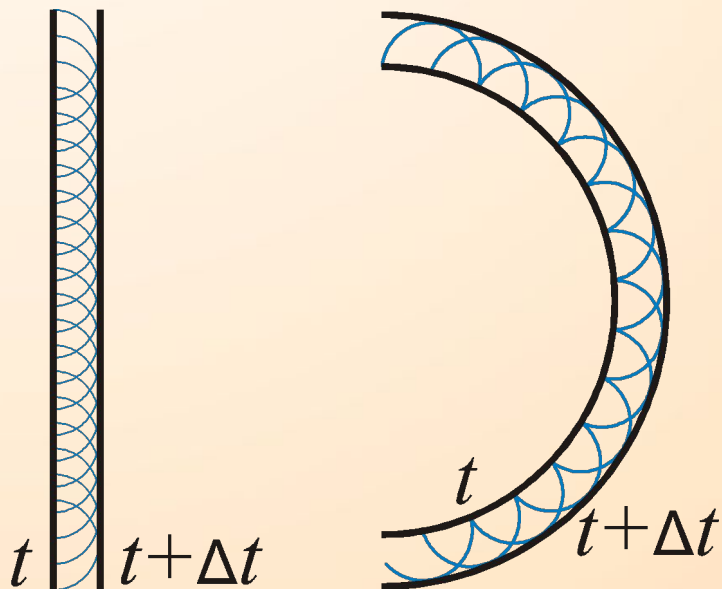


Сферическая волна:



Принцип Гюйгенса:

- Каждая точка среды, до которой дошло колебание, становится источником вторичных волн, а огибающая этих вторичных волн дает положение волнового фронта в последующий момент времени.



2.2. Уравнение бегущей волны.

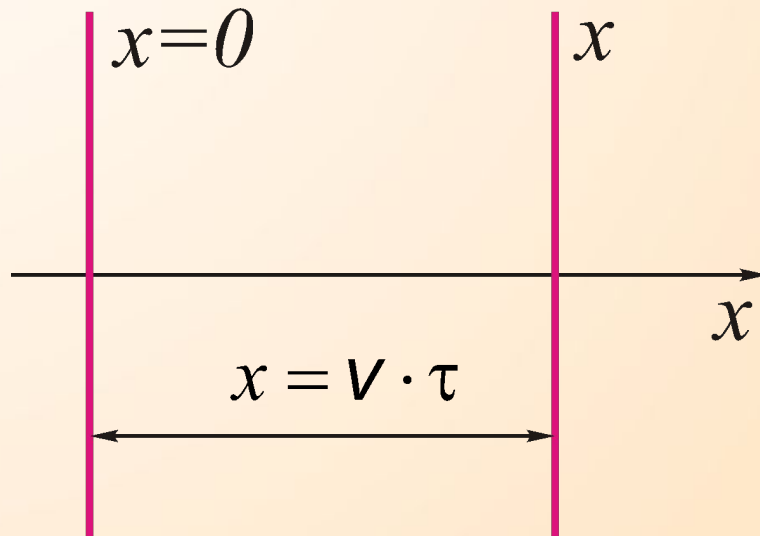
Волны, которые переносят в пространстве энергию, называются бегущими.

- Уравнением волны называется выражение, которое определяет зависимость смещения колеблющейся частицы от координат ее положения равновесия x , y , z и времени t :

$$\xi = \xi(x, y, z, t) \quad (2.1)$$

Волна называется **гармонической**, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими.

1. Уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль оси



- Уравнение колебаний точек, лежащих в плоскости $x=0$, имеют вид:

$$\xi(0, t) = A \cdot \cos(\omega t + \alpha) \quad (2.2)$$

Чтобы колебанию достигнуть точки с координатой X , потребуется время τ

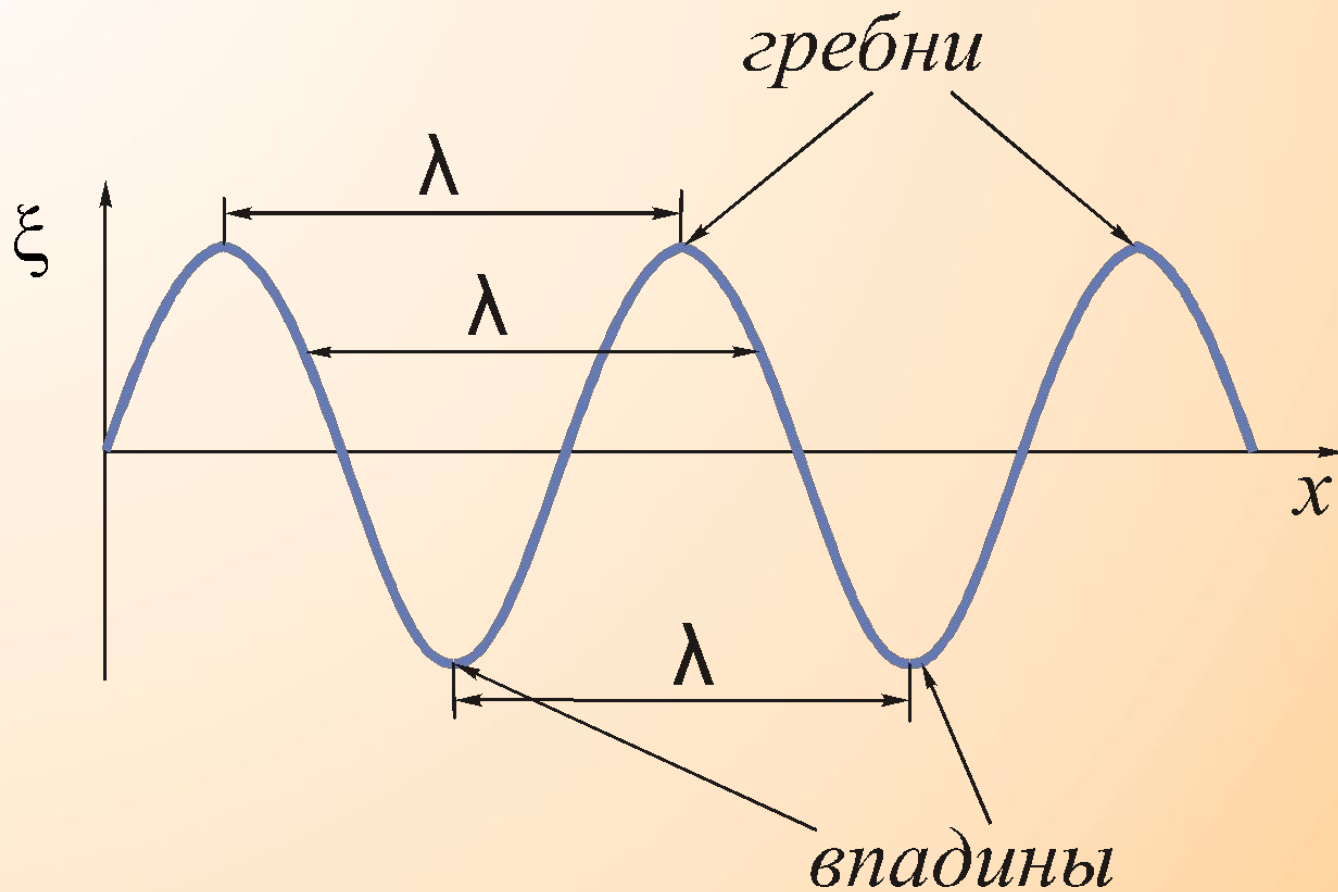
$$\tau = X/v$$

Уравнение колебаний в точке с координатой X :

$$\xi(x, t) = A \cdot \cos[\omega(t - \tau) + \alpha]$$

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= A \cdot \cos[\omega(t - x/v) + \alpha] = \\ &= A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x + \alpha\right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Зависимость смещения ξ частиц среды от расстояния x от источника колебаний (при $t = \text{const}$)



● Длина волны – это расстояние, проходимое волной за время, равное периоду колебания.

- Длина волны - это расстояние между двумя гребнями или двумя впадинами.
- Расстояние между ближайшими точками, колеблющимися в одинаковой фазе, называется длиной волны (λ).

Величина $k=\omega/v$ называется волновым числом, а вектор $\vec{k}=k\cdot\vec{n}$, где \vec{n} – единичный вектор нормали к волновой поверхности, называется волновым вектором.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль оси X:

$$\xi(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad (2.5)$$

Уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся в произвольном направлении:

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha) \quad (2.6)$$

2. Уравнение сферической волны

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} \cdot \cos(\omega t - k \cdot r + \alpha) \quad (2.7)$$

A - постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице.

r - расстояние от центра волны до рассматриваемой

точки среды: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2.3. Волновое уравнение.

- Волновое уравнение – это дифференциальное уравнение в частных производных, решением которого является уравнение волны.

$$\xi(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha)$$

Уравнение плоской волны является решением волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

2.4. Скорость упругих волн.

Фазовая скорость - скорость перемещения точек поверхности, соответствующей любому фиксированному значению фазы волны.

- Зафиксируем значение фазы волны:

$$\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) + \alpha = \text{const}$$

Продифференцируем по времени:

$$\frac{dx}{dt} = V$$

V-фазовая скорость

2.5. Энергия упругой волны.

Уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль оси x :

$$\xi = A \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad (2.9)$$

$$w = \rho \omega^2 A^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx + \alpha) \quad (2.10)$$

Энергия упругой волны пропорциональна квадрату амплитуды

Энергию волны характеризуют средней по времени плотностью потока энергии или интенсивностью волны

- Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется потоком энергии через эту поверхность.

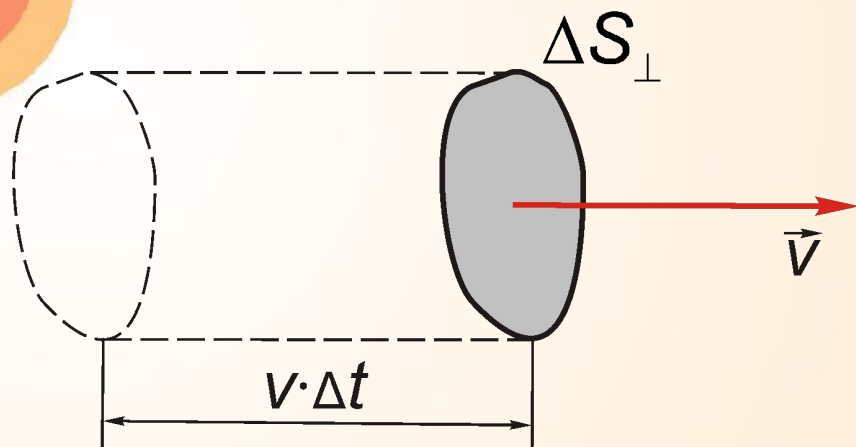
$$\Phi = \frac{dW}{dt} \quad (2.11)$$

● Плотностью потока энергии называется вектор, численно равный потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке перпендикулярно к направлению, в котором переносится энергия, и направленный в направлении распространения волны.

$$\vec{j} = \frac{d\Phi}{dS_{\perp}} \vec{n} = \frac{dW}{dS_{\perp} \cdot dt} \vec{n} \quad (2.12)$$

$$[Вт / м^2]$$

Выразим энергию, переносимую волной, через объемную плотность энергии w :



$$w = \frac{W}{\Delta V}$$

$$\Delta W = w \cdot \Delta V = w \cdot \Delta S_{\perp} \cdot v \cdot \Delta t$$

$$j = \frac{\Delta W}{\Delta S_{\perp} \Delta t} = w \cdot v$$

Вектор Умова:

$$j = wv \cdot n$$

(2.13)

2.6. Звуковые волны.

Звуковые волны (звук) – это упругие волны в диапазоне частот от 16 Гц до 20 кГц, воспринимаемые ухом человека.

$\nu < 16$ Гц – инфразвук

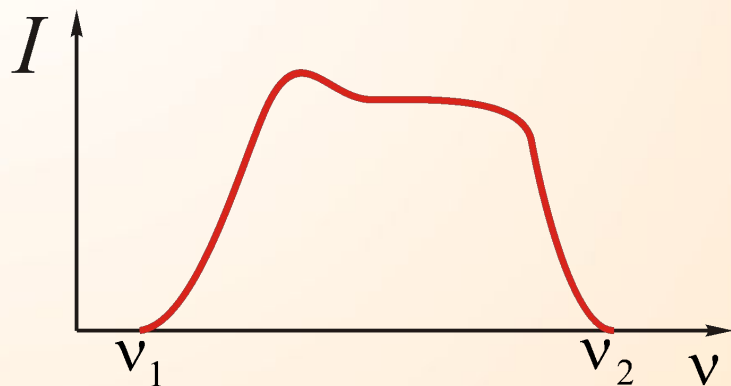
$\nu > 10^9$ Гц - гиперзвук

$\nu > 20$ кГц - ультразвук

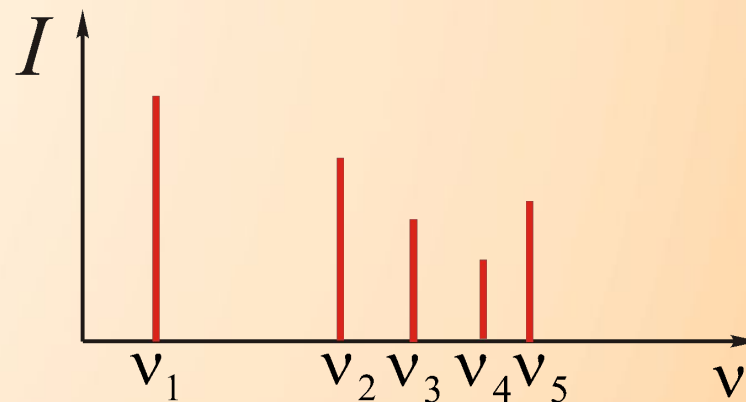
Любой реальный звук есть сумма многих гармонических колебаний с разными частотами и амплитудами.

○ **Распределение интенсивности звуковой волны по частотам называется акустическим спектром.**

Акустический спектр может быть сплошным, линейчатым.



Сплошной спектр



Линейчатый спектр

Звуки, имеющие линейчатый спектр, называются тональными.

Звук человек различает по **высоте, тембру** и **громкости**.

Высота звука определяется частотой ν .

Тембр звука определяется характером акустического спектра колебаний.

Громкость звука – субъективная характеристика звука, связанная с его интенсивностью.

- Интенсивность(сила) звука - среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой звуковой волной, т.е. среднее значение вектора Умова:

$$I = \langle j \rangle = \langle w \rangle V = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 V \left[\frac{Вт}{м^2} \right] \quad (2.14)$$

ρ - плотность среды, A -амплитуда,

ω -круговая частота, V -фазовая скорость волны

Для каждой частоты колебаний существует наименьшая (порог слышимости) I_0 , и наибольшая I (болевого порог чувствительности) интенсивности звука, вызывающие звуковое восприятие.

Порог слышимости:

$$\Delta\nu = 0,5 \div 5,0 \text{ кГц} \quad I_{\text{пор}} \approx 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$$

Порог болевого ощущения:

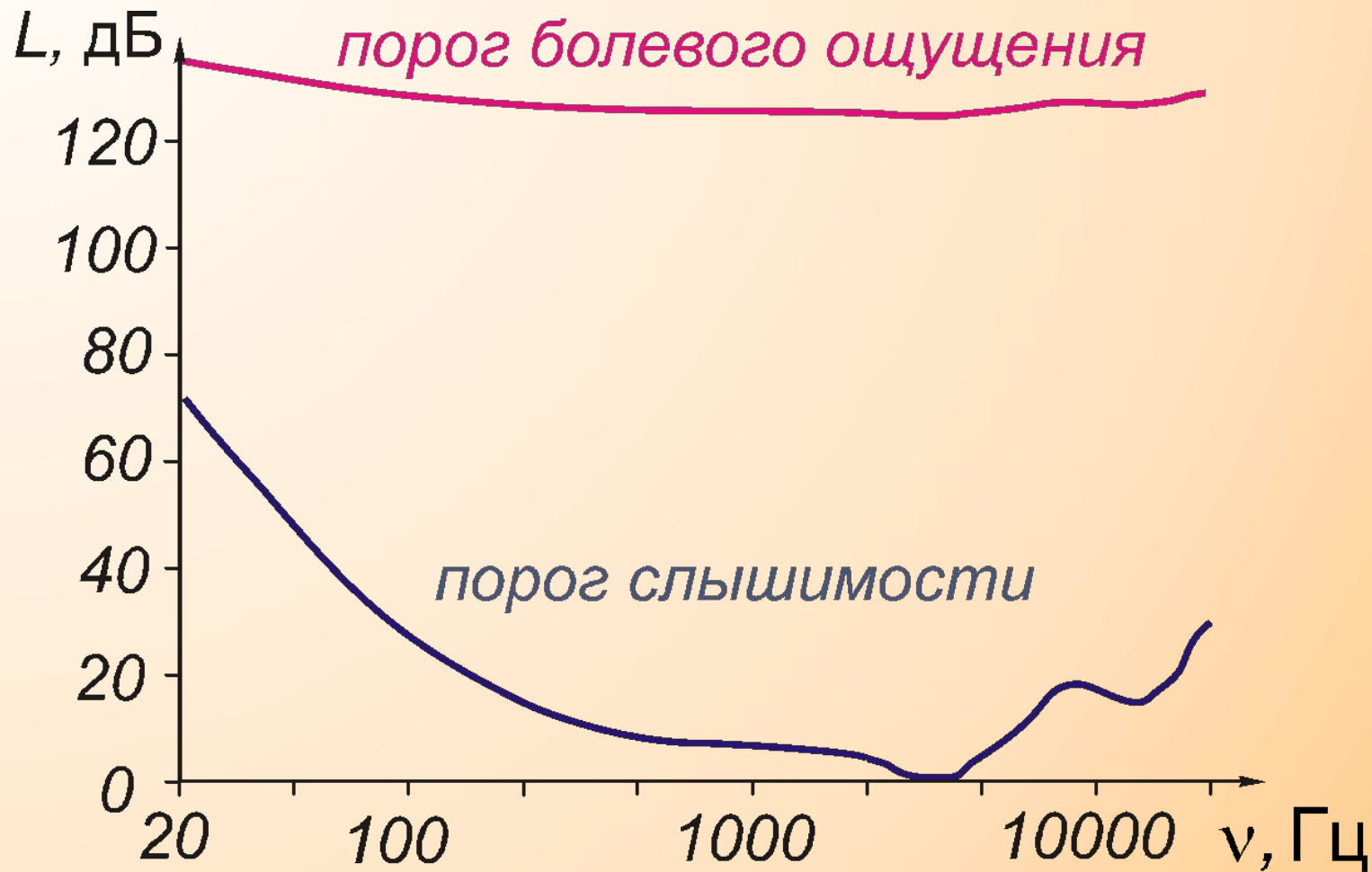
$$I_{\text{бол}} \approx 1 \div 10 \text{ Вт/м}^2$$

○ Уровень интенсивности звука:

$$L_{\text{Бел}} = \lg \frac{I}{I_0}$$

$$L_{\text{дБ}} = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad (2.15)$$

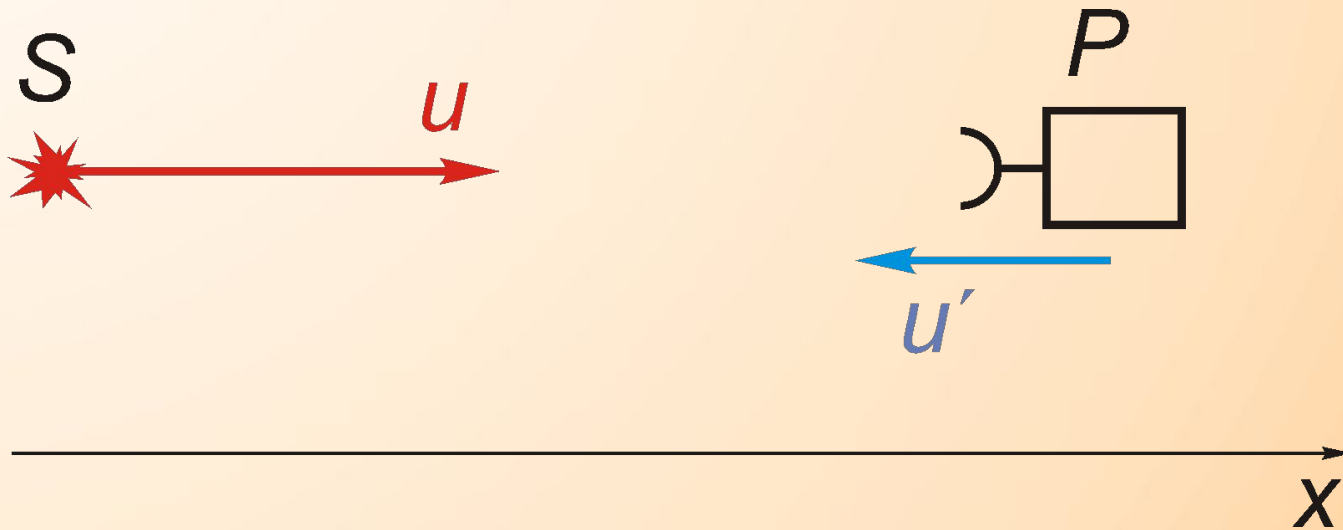
20 дБ = 100 раз



Звук	Уровень громкости, L, дБ
Тиканье часов	20
Тихий шепот	30
Нормальный разговор	60
Громкая речь	70
Крик	80
Оркестр фортиссимо	100
Шум самолетного мотора на расстоянии 5 м	120
на расстоянии 3 м	130

2.7. Эффект Доплера.

Эффект Доплера заключается в изменении частоты волн, воспринимаемой наблюдателем, при движении наблюдателя и источника волн относительно друг друга.



v – фазовая скорость волны, u – скорость движения источника, u' – скорость движения приемника, ν – частота колебаний источника

Период колебаний источника:

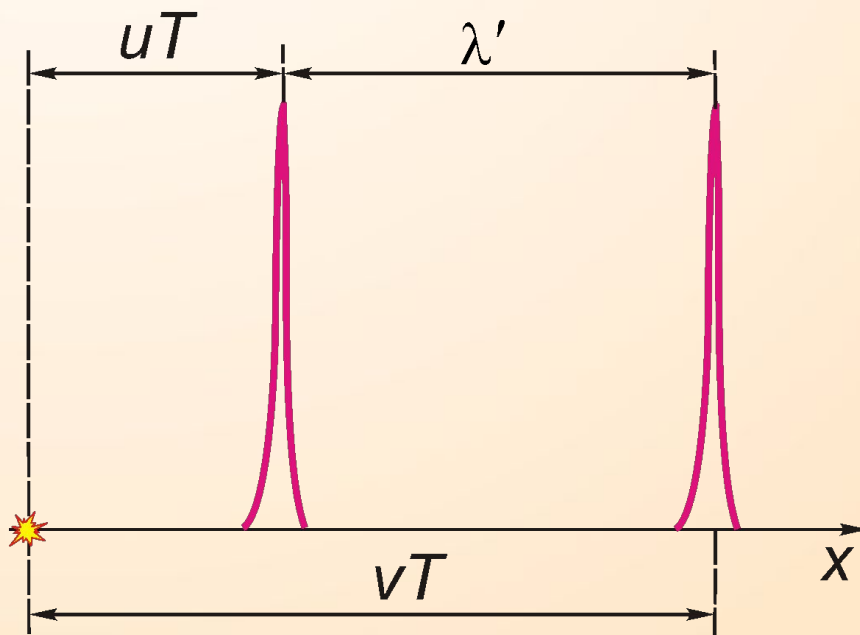
$$T = \frac{1}{\nu}$$

Длина волны (источник неподвижен):

$$\lambda = \nu T = \frac{V}{\nu}$$

Длина волны для наблюдателя:

$$\lambda' = \nu T - uT$$



1. Приемник неподвижен:

$$\nu' = \frac{\nu}{\lambda'} = \frac{\nu}{T(\nu - u)}$$

2. Приемник движется навстречу источнику:

$v + u'$ - скорость импульсов относительно приемника

$$v' = \frac{v + u'}{T(v - u)} = v \frac{v + u'}{v - u}$$

$$v' = v \frac{v - u'_x}{v - u_x}$$

Реверберация – процесс постепенного затухания звука в закрытых помещениях после выключения его источника.

Время реверберации – время, в течении которого интенсивность звука в помещениях ослабляется в миллион раз, а его уровень - на 60дБ.

Помещение обладает хорошей акустикой, если время реверберации составляет 0,5 – 1.5 секунд.