Предел функции (1-20)

- Определение предела
- Операции над пределами функции
- Пределы функций и неравенства
- Предел функции на бесконечности
- Односторонние пределы
- Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Непрерывность функции (21-38)

- **Непрерывность функции в точке**
- **Односторонняя непрерывность**
- **Непрерывность функции на промежутке**
- **Точки разрыва функции**
- **Свойства функций, непрерывных в точке**
- **Свойства элементарных функций**
- **Свойства функций, непрерывных на отрезке**

Определение предела

- *Окрестностью* точки x_0 называется любой интервал с центром в точке x_0.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 кроме, быть может, самой точки x_0. Дадим первое определение предела функции (по Гейне):

- Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 $(x_n \neq x_0 \forall n)$, последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A.

Обозначается это так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ (при $x \to x_0$)

Первое определение предела функции эквивалентно второму определению (по Коши):

- Число А называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ (вообще говоря, зависящее от ε), что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta, x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Первое определение называется также определением предела функции «на языке последовательностей», а второе – определение предела «на языке $\varepsilon - \delta$» (эпсилон-дельта).

Операции над пределами функций

Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и, кроме того $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = B$. Тогда:

- Предел суммы (разности) этих функций равен сумме (соответственно, разности) их пределов, т.е.

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = A \pm B.$$

- Предел произведения функций равен произведению их пределов, т.е.

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)\pm g(x)\right] = A\cdot B.$$

- Предел частного функций равен частному их пределов (при условии $B \neq 0$), т.е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что постоянный множитель можно выносить за знак предела функции, т.е.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = A \Rightarrow \forall \alpha \in R : \lim_{x\to 0} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot \lim_{x\to 0} f(x) = \alpha \cdot A.$$

Для функций справедливы аналоги соответствующих теорем для последовательностей о пределах корня и степени.

Пределы функций и неравенства

Пусть функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой этой точки) и $f_1(x) \leq f_2(x)$ для всех значений x из этой окрестности. Пусть, кроме того,

$$\lim_{x \to 0} f_1(x) = A_1, \quad \lim_{x \to 0} f_2(x) = A_2.$$

Тогда $A_1 \leq A_2$

Теорема 2 (о промежуточной переменной). Пусть функции $f_1(x), f(x), f_2(x)$ определены в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 (кроме, быть может, самой этой точки) и для всех $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$ верно неравенство $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ также существует и равен A.

Теорема 6.3 (о сохранении знака). Если предел функции в данной точке x_0 положителен, то и все значения функции в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может, самой точки x_0) положительны.

Теорема 6.4 (об ограниченности функции, имеющий предел).
Пусть функция имеет предел в данной точке. Тогда она ограничена в некоторой окрестности этой точки

Предел функции на бесконечности

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $(a;+\infty)$.

- Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любой положительной бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ (т.е. $x_n \to +\infty, n \to \infty$) последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A

Обозначение: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A.$

Равносильное определение предела функции при $x \to +\infty$ на языке $(\varepsilon - \delta)$ будет выглядеть так:

- Число A называется *пределом функции f(x) при* $x \to +\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число M > 0, что для всех значений $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon.$

Аналогично определяется предел функции *f(x)* при $x \to -\infty.$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A.$

Односторонние пределы

Пусть функция *f(x)* определена в правой полуокрестности точки x_0, т.е. на некотором интервале $(x_0, x_0+\delta)$, где $\delta > 0$. Тогда говорят, что число *A* называется *пределом функции f(x) справа* в точке x_0 (или правосторонним пределом), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 и такой, что все ее члены больше, чем x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу *A*.

Обозначения: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$ или $f(x_0+0) = A$.

Аналогично определяется предел функции слева (или левосторонний предел) в точке x_0 обозначаемый $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ или $f(x_0-0)$.

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует в тои и только в том случае, когда существуют и односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$,

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$ (или в окрестности точки x_0), если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$.

Таким образом,

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to x_0$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции при $x \to x_0$. Тогда:

1) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то функция $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка в окрестности точки* x_0.

В частности, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно* малыми (в окрестности точки x_0), что обозначается так: $\alpha(x) \sim \beta(x), x \to x_0$.

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$. Этот факт записывается так: $\alpha(x)=o(\beta(x)),\ \ x\to x_0$ и говорят, что $\alpha(x)$ - о малое от $\beta(x)$ при $x\to x_0$. В частности, если $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x\to x_0$, то $\alpha(x)=o(1),\ \ x\to x_0$.

При решении многих задач используется следующие эквивалентности, верные при $x\to x_0$.

1) $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$.

2) $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$.

3) $tg\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$.

4) $arctg\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$.

5) $1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{1}{2}(\alpha(x))^2$.

6) $\log_b(1+\alpha(x))\sim\dfrac{\alpha(x)}{\ln b}$.

7) $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$.

8) $b^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln b$.

9) $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$.

10) $(1+\alpha(x))^b-1\sim b\cdot\alpha(x)$.

11) $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\dfrac{\alpha(x)}{n}$

(Здесь $\alpha(x)$ -бесконечно малая функция при $x \to x_0$ (т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$)

Кроме того, имеет место следующий факт: если $\beta(x) \sim \beta_1(x), x \to x_0$ и существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x) = \lim_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot \beta_1(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}.$$

Таким образом, предел произведения или частного двух бесконечно малых не меняется при замене любой из них на эквивалентную бесконечно малую.

Пример 4.1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$, используя

1) первое определение предела функции;

2) второе определение предела функции.

Решение

1) Пусть $\{x_n\}$ - произвольная последовательность, сходящаяся к 2, т.е. такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. Тогда в соответствии со свойствами пределов последовательностей
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(2x_n+1) = 2\lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 2\cdot 2+1=5$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n)=5$ для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке $x_0=2$, то по первому определению предела функции это как раз и означает, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$.

2) Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Требуется по этому ε найти такое $\delta>0$, чтобы из условия $x\neq x_0, |x-x_0|<\delta$, т.е. из $0<|x-2|<\delta$ вытекало бы неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, т.е. $|(2x+1)-5<\varepsilon|$.

Последнее неравенство приводится к виду $|2(x-2)|<\varepsilon$, т.е. $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что если взять $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, то неравенство $|x-2|<\delta$ будет автоматически влечь за собой неравенство $|f(x)-5|<\varepsilon$ (это значит, что для всех x, для которых верно первое неравенство, будет верно и второе). В соответствии со вторым определением предела функции это означает, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$.

Пример 4.10. Доказать, что функция $y = signx$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$.

Решение. Действительно, если выбрать последовательность $\{x'_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, сходящуюся к нулю, то

$$\lim_{x\to\infty} f(x'_n) = \lim_{x\to\infty} (sign\frac{1}{n}) = \lim_{x\to\infty} 1 = 1,$$

т.е. последовательность $\{f(x'_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к единице.

Если же выбрать последовательность $\{x''_n\} = \left\{-\frac{1}{n}\right\}$, также сходящуюся к нулю, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \lim_{n\to\infty} sign(-\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1.$$

Таким образом, мы нашли две различные последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, сходящиеся к точке $x_0 = 0$, для которых соответствующие последовательности $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ значений функций $f(x) = signx$ сходятся к различным числам. Это противоречит первому определению предела функции, и, значит, у функции sign x нет предела в точке $x_0 = 0$.

Пример 4.14. Использую свойства пределов функций, найти следующие пределы:

Пример 4.14 (1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-1}{4x^2+5x+2}$;

Решение: Применяя теорему о действиях над пределами функций, получим:

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-1}{4x^2+5x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(4x^2+5x+2)}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}3x^2-\lim\limits_{x\to -1}1}{\lim\limits_{x\to -1}4x^2+\lim\limits_{x\to -1}5x+\lim\limits_{x\to -1}2}=$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to -1}x\cdot\lim\limits_{x\to -1}x-1}{4\lim\limits_{x\to -1}x\cdot\lim\limits_{x\to -1}x+5\lim\limits_{x\to -1}x+2}=\frac{3\cdot(-1)(-1)-1}{4(-1)(-1)+5(-1)+2}=2.$$

Пример 4.14 (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$;

Решение: Так как пределы числителя и знаменателя при $x\to 2$ равны нулю, то мы имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. «Раскроем» эту неопределенность (т.е. избавимся от нее), разложив числитель и знаменатель на множители и сократив их далее на общий множитель $x-2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}.$$

В полученной дроби знаменатель уже не стремится к нулю при $x\to 2$, поэтому можно применять теорему о пределе частного:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\frac{2+2}{2-3}=-4$$

Окончательно $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}=-4.$

Пример 4.14 (3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$;

Решение: Здесь м также имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю (избавляемся от иррационального в числителе):

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8})^2-3^2}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+8)-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{1}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{1}{6}.$$

Пример 4.14 (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x+x^2}{2x^2+3x}$.

Решение: Числитель и знаменатель дроби – бесконечно большие функции, поэтому здесь имеет место неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Раскрывая эту неопределенность, поделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x, т.е. на x^2:

$$\frac{1+x+x^2}{2x^2+3x}=\frac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-1}{2+\dfrac{3}{x}}.$$

Осталось воспользоваться свойствами пределов, а также тем, что функция $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x^2}$ - бесконечно малые при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x+x^2}{2x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-1}{2+\dfrac{3}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-1)}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\dfrac{3}{x})}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}2+3\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}=\frac{0+0-1}{2+0}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 4.37. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x}{x}, a\in R;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x};$

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{2x-\pi};$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}.$

Пример 4.37 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x}{x}, a\in R;$

Решение Сделаем замену $y=\alpha\cdot x;$ тогда $y\to 0$ при $x\to 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha\cdot x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{\left(\dfrac{y}{\alpha}\right)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\alpha \sin y}{y}=\alpha\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=\alpha.$ В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x}{x}=\alpha.$

Пример 4.37 (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x};$

Решение: Поделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на x, после чего воспользуемся предыдущим пунктом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\sin 5x}{x}\right)}{\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)}=\frac{5}{3}.$$

Пример 4.37 (3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi}$;

Решение: Сводя предел к первому замечательному, сделаем замену $y = x - \frac{\pi}{2}$. Тогда $y \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2}$, а $x = y + \frac{\pi}{2}$, откуда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-\pi} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{2y} = -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = -\frac{1}{2}.$$

Во втором равенстве в этой цепочке мы использовали формулу приведения, а в последнем – первый замечательный предел.

Пример 4.37 (4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

Решение: Сделаем замену $t = \arcsin x$, т.е. $x = \sin t$. Ясно, что $t \to 0$ при $x \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin t}{t}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}} = 1.$$

Пример 4.46 Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{k}{x})^x, k\in R;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x};$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x;$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{7x}.$

Пример 4.46 (1). $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{k}{x})^x, k\in R;$

Решение: В данном случае мы имеем неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$. Для ее раскрытия сделаем замену $y=\dfrac{x}{k}$. Тогда $y\to\infty$ при $x\to\infty$ и исходный предел сводится ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{k}\right)})^{x\cdot\frac{x}{k}}=\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{ky}=\left[\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y\right]^k=e^k.$$

Пример 4.46 (2). $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}$;

Решение: Поскольку $\sqrt[x]{1+5x}=(1+5x)^{\frac{1}{x}}$, то здесь мы также имеем дело с неопределенностью 1^{∞}, для раскрытия которой нам снова понадобится одна из форм второго замечательного предела. Сделаем замену $y=5x$. Тогда $y\to\infty$ при $x\to\infty$ и

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}=\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}\cdot 5}=\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{5}=e^{5}$$

Пример 4.46 (3). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$;

Решение: Поделив числитель и знаменатель дроби на x, сведем данный предел к частному пределов из пункта 1):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}}=\frac{e^{3}}{e^{-2}}=e^{5}$$

Пример 4.46 (4). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{7x}$.

Решение: Сделав замену $y=2x$ и применяя одно из следствий из второго замечательного предела, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{7x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{\frac{7}{2}y}=\frac{7}{2}\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}=\frac{2}{7}.$$

Пример 4.56. Найти пределы справа и слева функции $f(x)=signx$ в точке $x_0=0$.

Решение: Так как $f(x)=1$ при $x>0$, то

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}(-1)=-1.$$

Аналогично находим:

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}(-1)=-1.$$

Пример 4.59. Заменяя бесконечно малые эквивалентными, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$,

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x-1)}{1-\cos x}$.

Пример 4.59. (1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$

Решение: В силу следствия из первого замечательного предела $\sin\alpha x\sim\alpha x, x\to 0$. Отсюда (при $x\to 0$) $\sin 4x\sim 4x$, а $\sin 3x\sim 3x$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}.$$

Пример 4.59. (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x-1)}{1-\cos x}$

Решение: При $x\to 0$ имеем $e^x-1\sim x$ и $1-\cos\sim\dfrac{x^2}{2}$, откуда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(e^x-1)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\left(\frac{x^2}{2}\right)}=2.$$

Непрерывность функции

- Непрерывность функции в точке
- Односторонняя непрерывность
- Непрерывность функции на промежутке
- Точки разрыва функции
- Свойства функций, непрерывных в точке
- Свойства элементарных функций
- Свойства функций, непрерывных на отрезке

§5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Непрерывность функции в точке

- Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{x\to x_0}) f(x)=f(x_0)$.

Если обозначить $x-x_0=\Delta x$ (приращение аргумента), $f(x)-f(x_0)=\Delta y$ (приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx), то это определение можно записать в эквивалентной форме.

- Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

Односторонняя непрерывность

- Функция $f(x)$ называется непрерывной слева в точке x_0, если она определена на некотором полуинтервале $(a; x_0]$ и

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

- Функция $f(x)$ называется непрерывной справа в точке x_0, если она определена на некотором полуинтервале $[x_0; b)$ и

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда и только тогда, когда она непрерывна слева и справа в этой точке, т.е. когда

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Непрерывность функции на промежутке

- Функция $f(x)$ называется *непрерывной* на данном промежутке (интервале, полуинтервале, отрезке), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

При этом если функция определена в конце промежутка, то под непрерывностью в этой точке понимается непрерывность справа или слава. В частности, функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a;b]$, если она:

1) непрерывна в каждой точке интервала $(a;b)$;
2) непрерывна справа в точке a;
3) непрерывна слева в точке b.

Точки разрыва функции

- Пусть точка x_0 принадлежит области определения функции $f(x)$ или является граничной точкой этой области. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если $f(x)$ не является непрерывной в этой точке.

Точки разрыва подразделяются на точки разрыва 1-го и 2-го рода.

- Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, но они не равны между собой, или же односторонние пределы равны между собой, а значение функции в этой точке не совпадает с односторонними пределами, то x_0 называется точкой разрыва 1-го рода.

Если в точке x_0 существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0)$, а $f(x_0)$ не определено или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то эта точка называется точкой *устранимого разрыва.*

Точки разрыва 1-го рода функции $f(x)$, не являющиеся точками устранимого разрыва, называются *точками скачка* этой функции.

Если x_0 – точка скачка функции $f(x)$, то разность $\Delta f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ не равна нулю и называется *скачком функции* $f(x)$ в точке x_0.

- Если в точке x_0 не существует хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$м, то x_0 называется *точкой разрыва 2-го рода.*

Теорема 5. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$; $f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ (если $g(x_0) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0.

Свойства функций, непрерывных в точке

В частности если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то функция $\alpha \cdot f(x)$, где $\alpha \in R$, также непрерывна в точке x_0.

Теорема 6 (о непрерывности сложной функции).
Пусть функция $u(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = u(x_0)$. Тогда сложная функция $f(u(x))$ непрерывна в точке x_0

Непрерывность элементарных функций

Теорема 7. Все простейшие элементарные функции (c, x^a, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$) непрерывны в каждой точке своих областей определения.

Из этой теоремы, а также из двух предыдущих следует, что также непрерывны в каждой точке своих областей определения все функции, полученные из простейших с помощью конечного числа арифметических операций и операции композиции.

Свойства функций, непрерывных на отрезках

Теорема 8 (Больцано-Коши). Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах разные знаки. Тогда найдется хотя бы одна такая точка $x_0 \in (a;b)$, что $f(x_0) = 0$.

Теорема 9 (о промежуточных значениях). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда для любого числа C, заключенного между числами $f(a)$ и $f(b)$, найдется такая точка $x_0 \in [a;b]$,

что $f(x_0) = C$.

Теорема 10 (1-я теорема Вейерштрасса). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке [a;b]. Тогда эта функция ограничена на этом отрезке.

Теорема 11 (2-я теорема Вейерштрасса). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда эта функция принимает на отрезке $[a;b]$ свои наибольшие и наименьшие значения, т.е существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a;b]$ что для любой точки $x \in [a;b]$ справедливы неравенства

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \ .$$

Пример 5.1. Заполнить таблицу для функции $f(x)$, найдя для каждого приращения Δx в точке $x_0 = 2$ соответствующее приращение $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Δx	-1	-0,2	-0,1	-0,01	1	0,2	0,1	0,01
Δy								

a) $f(x) = 3x + 1$

b) $f(x) = \begin{cases} x - 2 \\ 1 \end{cases}$

На основании заполненной таблицы сделать предположение о поведении функции в точке $x_0 = 2$.

Решение:

а) При $\Delta x = -1$ имеем $x = x_0 + \Delta x = 2 - 1 = 1$ откуда $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(1) - f(2) = 4 - 7 = -3$

Аналогично находим и другие значения Δy В результате получаем таблицу

Δx	-1	-0,2	-0,1	-0,01	1	0,2	0,1	0,01
Δy	-1	-0,2	-0,1	-0,01	1	1	1	1

Из таблицы видно, что малые приращения функции соответствуют малым приращениям аргумента лишь слева от точки $x_0 = 2$; справа же от этой точки (т.е. при $\Delta x > 0$) Δy не уменьшается при уменьшении Δx. Отсюда можно предположить, что $x_0 = 2$ – точка разрыва данной функции; при этом $f(x)$ непрерывна слева в этой точке.

Пример 5.4. Пользуясь определением непрерывности функции доказать, что функция $y = x^2$ непрерывна в произвольной точке $x_0 \in R$.

Решение: Пусть Δx - приращение аргумента в точке x_0. Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 =$$

$$= (x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

Теперь, применяя теоремы о пределе суммы и произведения функций, получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 \cdot \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2 = 2x_0 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \right)^2 = 0$$

Таким образом, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, что и означает(по определению) непрерывность данной функции в точке $x_0 \in R$.

Пример 5.6. Доказать что функция $f(x)=\begin{cases}1, при\ x\geq 0\\ 0, при\ x\leq 0\end{cases}$

Не является непрерывной в точке $x_0=0$, но непрерывна справа в этой точке. Построить график функции $f(x)$.

Решение: Найдем односторонние пределы в точке $x_0=0$. Слева от точки x_0 имеем $f(x)=0$, поэтому

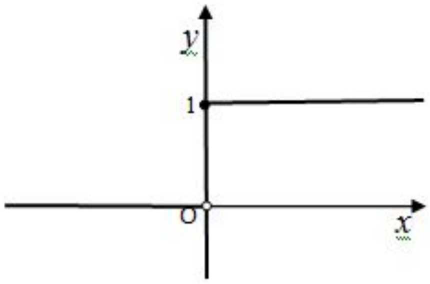
$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} 0=0.$$

Аналогично,

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} 1=1.$$

Кроме того, $f(x_0)=f(0)=1,$, откуда следует, что

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)\neq\lim_{x\to 0+0} f(x)..$$



Это означает, что в точке 0 не выполнены все условия непрерывности функции, но функция $f(x)$ непрерывна справа в этой точке.

Пример 5.11 Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x)=\begin{cases} x, при\ \ x\le -\pi \\ \sin x, при -\pi<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 1, при\ \ x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти скачок функции в точках скачка.

Решение: Функции $y=x, y=\sin x$ и $y=1$ непрерывны на всей числовой прямой, поэтому данная функция может иметь разрывы только в точках, где меняется ее аналитическое выражение, т.е. в точках $x_1=-\pi$ и $x_2=\dfrac{\pi}{2}$

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соотвествующие односторонние пределы и значения функции.

В точке $x_1=-\pi$ имеем:

$$\lim_{x\to-\pi-0} f(x)=\lim_{x\to-\pi} x=-\pi, \quad \lim_{x\to-\pi+0} f(x)=\lim_{x\to-\pi} \sin x=0,$$

$$f(-\pi)=-\pi$$

Таким образом, в этой точке

$$\lim_{x\to-\pi-0} f(x) = f(-\pi) \neq \lim_{x\to-\pi+0} f(x)$$

т.е. функция имеет разрыв 1-го рода и непрерывна слева. Скачок функции $f(x)$ в точке $x_1 = -\pi$ равен

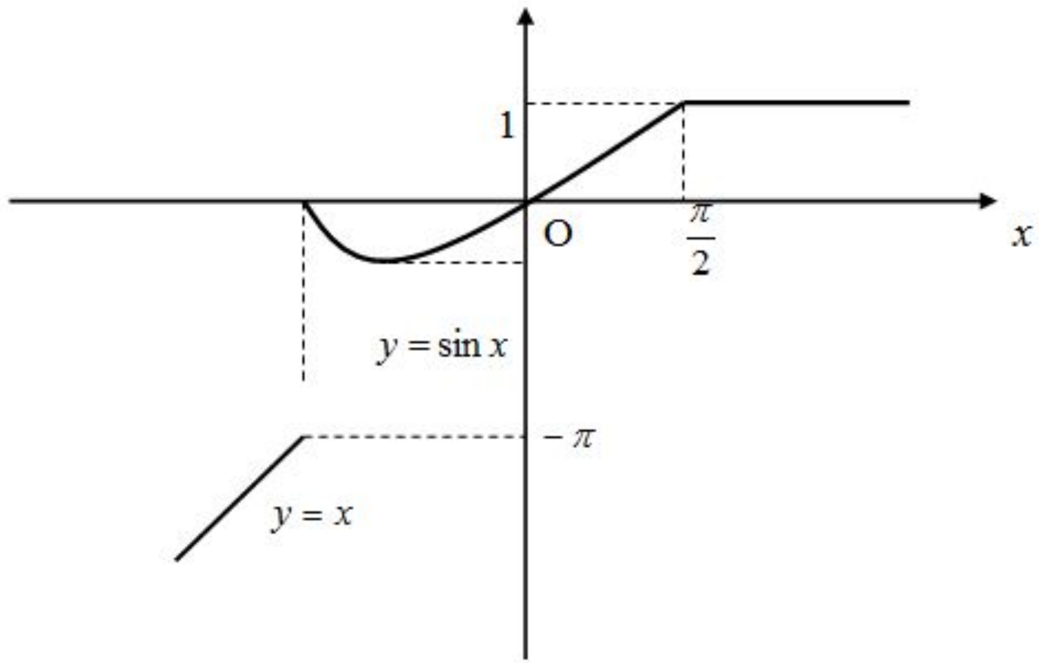
$$\Delta f(-\pi) = \lim_{x\to-\pi+0} f(x) - \lim_{x\to-\pi-0} f(x) = \pi .$$

Аналогично, для точки $x_2 = \frac{\pi}{2}$ получим:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} 1 = 1,$$

а значит $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ не определено. Отсюда следует, что $x_2 = \frac{\pi}{2}$ -точка устранимого разрыва для функции $f(x)$.



1
O
$\frac{\pi}{2}$
x
$y = \sin x$
$-\pi$
$y = x$

Пример 5.17. Используя свойства непрерывных функций, доказать, что функция $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$ непрерывна на промежутке $(-\infty;+\infty)$.

Решение: Функции $y = x^2, y = x^3$ и $y = c$ непрерывны на промежутке $(-\infty;+\infty)$

Следовательно данная функция $f(x)$ также непрерывна в каждой точке $x_0 \in R$ как сумма непрерывных функций $y = x^3, y = -5x^2$(эта функция непрерывна,так как является произведением непрерывных функций $y = -5$ и $y = x^2$) $y = 7$.

Пример 5.19. Найти предел, используя свойства непрерывных функций:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+8x-1}{x^2-4}.$$

Решение: Данная функция элементарная, поэтому она непрерывна на области определения, т.е. при всех $x \neq \pm 2$. Следовательно, $f(x)$ непрерывна и в точке $x = 3$, откуда

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+8x-1}{x^2-4} = \frac{3^2+8\cdot 3-1}{3^2-4} = \frac{32}{5} = 6{,}4.$$

Пример 5.21. Исследовать функцию $y = \dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$ на непрерывность на отрезке $[a;b]$, если

а) $[a;b] = [-1;2]$

б) $[a;b] = [-5;0]$

в) $[a;b] = [-3;4]$

Решение: Данная функция элементарная, поэтому она непрерывна на области определения, т.е. при всех x, не равных -2 и 3. В точке $x_1 = -2$ функция терпит разрыв 2-го рода, так как

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = +\infty, \quad \lim_{x\to -2+0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = -\infty$$

В точке $x_2 = 3$ также рызрыв 2-го рода, потому что

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = -\infty, \quad \lim_{x\to 3+0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = +\infty$$

Отсюда следует, что дальше функция непрерывна на отрезке $[-1;2]$ (так как $x_1, x_2 \notin [-1;2]$); функция непрерывна всюду, кроме точки -2, в которой терпит разрыв 2-го рода $x_1 \in [-5;0], x_2 \notin [-5;0]$ на отрезке $[-3;4]$ функция имеет две точки разрыва 2-го рода $x_1 = -2, x_2 = 3$, а в остальных точках непрерывна $x_1, x_2 \in [-3;4]$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ