

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ (1-20)

- ❖ Определение предела
- ❖ Операции над пределами функции
- ❖ Пределы функций и неравенства
- ❖ Предел функции на бесконечности
- ❖ Односторонние пределы
- ❖ Бесконечно малые и бесконечно большие функции

❖ Непрерывность функции (21-38)

- Непрерывность функции в точке
- Односторонняя непрерывность
- Непрерывность функции на промежутке
- Точки разрыва функции
- Свойства функций, непрерывных в точке
- Свойства элементарных функций
- Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение предела

➤ *Окрестностью* точки x_0 называется любой интервал с центром в точке x_0 .

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 кроме, быть может, самой точки x_0 . Дадим первое определение предела функции (по Гейне):

➤ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 , если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 ($x_n \neq x_0 \forall n$), последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A .

Обозначается это так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ (при $x \rightarrow x_0$)

Первое определение предела функции эквивалентно второму определению (по Коши):

➤ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 , если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ (вообще говоря, зависящее от ε), что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta, x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Первое определение называется также определением предела функции «на языке последовательностей», а второе – определение предела «на языке $\varepsilon - \delta$ » (эпсилон-дельта).



Операции над пределами функций

Пусть функция $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и, кроме того $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = B$. Тогда:

- Предел суммы (разности) этих функций равен сумме (соответственно, разности) их пределов, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B.$$

- Предел произведения функций равен произведению их пределов, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B.$$

- Предел частного функций равен частному их пределов (при условии $B \neq 0$), т.е.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что постоянный множитель можно выносить за знак предела функции, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow 0} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \alpha \cdot A.$$

Для функций справедливы аналоги соответствующих теорем для последовательностей о пределах корня и степени.



Пределы функций и неравенства

Пусть функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой этой точки) и $f_1(x) \leq f_2(x)$ для всех значений x из этой окрестности. Пусть, кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = A_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = A_2.$$

Тогда $A_1 \leq A_2$

Теорема 2 (о промежуточной переменной). Пусть функции $f_1(x), f(x), f_2(x)$ определены в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 (кроме, быть может, самой этой точки) и для всех $x \in U(x_0), x \neq x_0$ верно неравенство $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$. Пусть, кроме того, $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = A$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ также существует и равен A .

Теорема 6.3 (о сохранении знака). Если предел функции в данной точке x_0 положителен, то и все значения функции в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может, самой точки x_0) положительны.

Теорема 6.4 (об ограниченности функции, имеющей предел). Пусть функция имеет предел в данной точке. Тогда она ограничена в некоторой окрестности этой точки



Предел функции на бесконечности

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $(a; +\infty)$.

- Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если для любой положительной бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ (т.е. $x_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$) последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

Равносильное определение предела функции при $x \rightarrow +\infty$ на языке $(\varepsilon - \delta)$ будет выглядеть так:

- Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что для всех значений $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично определяется предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$.

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.



Односторонние пределы

Пусть функция $f(x)$ определена в правой полуокрестности точки x_0 , т.е. на некотором интервале $(x_0, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$. Тогда говорят, что число A называется *пределом функции $f(x)$ справа* в точке x_0 (или *правосторонним пределом*), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 и такой, что все ее члены больше, чем x_0 , соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A .

Обозначения: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$ или $f(x_0 + 0) = A$.

Аналогично определяется предел функции слева (или *левосторонний предел*) в точке x_0 обозначаемый $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ или $f(x_0 - 0)$.

Очевидно, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ существует в той и только в том случае, когда существуют и односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x).$$



Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow x_0$ (или в окрестности точки x_0), если $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$.

Таким образом,

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0$. Тогда:

1) Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то функция $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка* в окрестности точки x_0 .

В частности, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми* (в окрестности точки x_0), что обозначается так:
 $\alpha(x) \sim \beta(x), x \rightarrow x_0$.



1) Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$. Этот факт записывается так: $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \rightarrow x_0$ и говорят, что $\alpha(x)$ - о малое от $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$. В частности, если $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$, то $\alpha(x) = o(1)$, $x \rightarrow x_0$.

При решении многих задач используется следующие эквивалентности, верные при $x \rightarrow x_0$.

1) $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$.

2) $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$.

3) $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$.

4) $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$.

5) $1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{1}{2} (\alpha(x))^2$.

6) $\log_b (1 + \alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln b}$.

7) $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$.

8) $b^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln b$.

9) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$.

10) $(1 + \alpha(x))^b - 1 \sim b \cdot \alpha(x)$.

11) $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$



(Здесь $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$ (т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$)

Кроме того, имеет место следующий факт: если $\beta(x) \sim \beta_1(x), x \rightarrow x_0$ и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot \beta_1(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}.$$

Таким образом, предел произведения или частного двух бесконечно малых не меняется при замене любой из них на эквивалентную бесконечно малую.



Пример 4.1. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$, используя

- 1) первое определение предела функции;
- 2) второе определение предела функции.

Решение

1) Пусть $\{x_n\}$ - произвольная последовательность, сходящаяся к 2, т.е.

такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$. Тогда в соответствии со свойствами пределов

последовательностей

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2x_n + 1) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке $x_0 = 2$, то по первому определению предела функции это как раз и означает, что $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$.

2) Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Требуется по этому ε найти такое $\delta > 0$, чтобы из условия $x \neq x_0, |x - x_0| < \delta$, т.е. из $0 < |x - 2| < \delta$ вытекало бы неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. $|(2x + 1) - 5| < \varepsilon$.

Последнее неравенство приводится к виду $|2(x - 2)| < \varepsilon$, т.е.

$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что если взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то неравенство

$|x - 2| < \delta$ будет автоматически влечь за собой неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$

(это значит, что для всех x , для которых верно первое неравенство, будет верно и второе). В соответствии со вторым определением

предела функции это означает, что $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$.



Пример 4.10. Доказать, что функция $y = \operatorname{sign} x$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$.

Решение. Действительно, если выбрать последовательность $\{x'_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, сходящуюся к нулю, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x'_n) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{sign} \frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1,$$

т.е. последовательность $\{f(x'_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к единице.

Если же выбрать последовательность $\{x''_n\} = \left\{-\frac{1}{n}\right\}$, также сходящуюся к нулю, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x''_n) = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sign}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

Таким образом, мы нашли две различные последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, сходящиеся к точке $x_0 = 0$, для которых соответствующие последовательности $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ значений функций $f(x) = \operatorname{sign} x$ сходятся к различным числам. Это противоречит первому определению предела функции, и, значит, у функции $\operatorname{sign} x$ нет предела в точке $x_0 = 0$.



Пример 4.14. Используя свойства пределов функций, найти следующие пределы:

Пример 4.14 (1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 1}{4x^2 + 5x + 2}$;

Решение: Применяя теорему о действиях над пределами функций, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 1}{4x^2 + 5x + 2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow -1} (4x^2 + 5x + 2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow -1} 1}{\lim_{x \rightarrow -1} 4x^2 + \lim_{x \rightarrow -1} 5x + \lim_{x \rightarrow -1} 2} = \\ &= \frac{3 \lim_{x \rightarrow -1} x \cdot \lim_{x \rightarrow -1} x - 1}{4 \lim_{x \rightarrow -1} x \cdot \lim_{x \rightarrow -1} x + 5 \lim_{x \rightarrow -1} x + 2} = \frac{3 \cdot (-1)(-1) - 1}{4(-1)(-1) + 5(-1) + 2} = 2. \end{aligned}$$

Пример 4.14 (2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$;

Решение: Так как пределы числителя и знаменателя при $x \rightarrow 2$ равны нулю, то мы имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. «Раскроем» эту неопределенность (т.е. избавимся от нее), разложив числитель и знаменатель на множители и сократив их далее на общий множитель $x - 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x - 3}.$$

В полученной дроби знаменатель уже не стремится к нулю при $x \rightarrow 2$, поэтому можно применять теорему о пределе частного:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 3)} = \frac{2 + 2}{2 - 3} = -4$$

Окончательно $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = -4$.



Пример 4.14 (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1}$;

Решение: Здесь мы также имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю (избавляемся от иррационального в числителе):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8} - 3)(\sqrt{x+8} + 3)}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8})^2 - 3^2}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+8) - 9}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+8} + 3} = \frac{1}{\sqrt{1+8} + 3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$



Пример 4.14 (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x+x^2}{2x^2+3x}$.

Решение: Числитель и знаменатель дроби – бесконечно большие функции, поэтому здесь имеет место неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Раскрывая эту неопределенность, поделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x , т.е. на x^2 :

$$\frac{1+x+x^2}{2x^2+3x} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1}{2 + \frac{3}{x}}.$$

Осталось воспользоваться свойствами пределов, а также тем, что функция $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ – бесконечно малые при $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x+x^2}{2x^2+3x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{3}{x})} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} 1}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = \frac{0 + 0 - 1}{2 + 0} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Пример 4.37. Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x}, \alpha \in \mathbb{R};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x};$

3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi};$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}.$

Пример 4.37 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x}, \alpha \in \mathbb{R};$

Решение Сделаем замену $y = \alpha \cdot x$; тогда $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha \cdot x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\left(\frac{y}{\alpha}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\alpha \sin y}{y} = \alpha \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \alpha. \quad \text{В последнем}$$

равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом.

$$\text{Таким образом, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha.$$

Пример 4.37 (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x};$

Решение: Поделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на x , после чего воспользуемся предыдущим пунктом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin 5x}{x}\right)}{\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x}\right)} = \frac{5}{3}.$$



Пример 4.37 (3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}$;

Решение: Сводя предел к первому замечательному, сделаем замену

$y = x - \frac{\pi}{2}$. Тогда $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, а $x = y + \frac{\pi}{2}$, откуда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{2\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \pi} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{2y} = -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Во втором равенстве в этой цепочке мы использовали формулу приведения, а в последнем – первый замечательный предел.

Пример 4.37 (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

Решение: Сделаем замену $t = \arcsin x$, т.е. $x = \sin t$. Ясно, что $t \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin t}{t}\right)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}} = 1.$$



Пример 4.46 Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x, k \in \mathbb{R};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1 + 5x};$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x;$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{7x}.$

Пример 4.46 (1). $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x, k \in \mathbb{R};$

Решение: В данном случае мы имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Для ее раскрытия сделаем замену $y = \frac{x}{k}$. Тогда $y \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ и исходный предел сводится ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{k}\right)}\right)^{x \cdot \frac{x}{k}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{ky} = \left[\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^k = e^k.$$



Пример 4.46 (2). $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{1+5x}$;

Решение: Поскольку $\sqrt[5]{1+5x} = (1+5x)^{\frac{1}{5}}$, то здесь мы также имеем дело с неопределенностью 1^∞ , для раскрытия которой нам снова понадобится одна из форм второго замечательного предела. Сделаем замену $y = 5x$. Тогда $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{1+5x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{5}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{5}} = \left[\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^5 = e^5$$

Пример 4.46 (3). $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x$;

Решение: Поделив числитель и знаменатель дроби на x , сведем данный предел к частному пределов из пункта 1):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)^x} = \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5$$



Пример 4.46 (4). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{7x}$.

Решение: Сделаем замену $y = 2x$ и применяя одно из следствий из второго замечательного предела, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{7x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{\frac{7}{2}y} = \frac{7}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \frac{7}{2}.$$

Пример 4.56. Найти пределы справа и слева функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ в точке $x_0 = 0$.

Решение: Так как $f(x) = 1$ при $x > 0$, то

$$f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} 1 = 1.$$

Аналогично находим:

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (-1) = -1.$$



Пример 4.59. Заменяя бесконечно малые эквивалентными, найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x},$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}.$$

Пример 4.59. (1). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}$

Решение: В силу следствия из первого замечательного предела $\sin ax \sim ax, x \rightarrow 0$. Отсюда (при $x \rightarrow 0$) $\sin 4x \sim 4x$, а $\sin 3x \sim 3x$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

Пример 4.59. (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$

Решение: При $x \rightarrow 0$ имеем $e^x - 1 \sim x$ и $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, откуда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (e^x - 1)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{\left(\frac{x^2}{2}\right)} = 2.$$



НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

- Непрерывность функции в точке
- Односторонняя непрерывность
- Непрерывность функции на промежутке
- Точки разрыва функции
- Свойства функций, непрерывных в точке
- Свойства элементарных функций
- Свойства функций, непрерывных на отрезке



§5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Непрерывность функции в точке

- Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 , если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если обозначить $x - x_0 = \Delta x$ (приращение аргумента), $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ (приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx), то это определение можно записать в эквивалентной форме.

- Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 , если она определена в некоторой окрестности этой точки и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , то бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.



Односторонняя непрерывность

- Функция $f(x)$ называется непрерывной слева в точке x_0 , если она определена на некотором полуинтервале $(a; x_0]$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

- Функция $f(x)$ называется непрерывной справа в точке x_0 , если она определена на некотором полуинтервале $[x_0; b)$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , тогда и только тогда, когда она непрерывна слева и справа в этой точке, т.е. когда

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$



Непрерывность функции на промежутке

➤ Функция $f(x)$ называется *непрерывной* на данном промежутке (интервале, полуинтервале, отрезке), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

При этом если функция определена в конце промежутка, то под непрерывностью в этой точке понимается непрерывность справа или слева. В частности, функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a; b]$, если она:

- 1) непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$;
- 2) непрерывна справа в точке a ;
- 3) непрерывна слева в точке b .



Точки разрыва функции

- Пусть точка x_0 принадлежит области определения функции $f(x)$ или является граничной точкой этой области. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если $f(x)$ не является непрерывной в этой точке.

Точки разрыва подразделяются на точки разрыва 1-го и 2-го рода.

- Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, но они не равны между собой, или же односторонние пределы равны между собой, а значение функции в этой точке не совпадает с односторонними пределами, то x_0 называется точкой разрыва 1-го рода.

Если в точке x_0 существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, а $f(x_0)$ не определено или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то эта точка называется точкой *устраняемого разрыва*.



Точки разрыва 1-го рода функции $f(x)$, не являющиеся точками устранимого разрыва, называются *точками скачка* этой функции.

Если x_0 – точка скачка функции $f(x)$, то разность $\Delta f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ не равна нулю и называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0 .

➤ Если в точке x_0 не существует хотя бы один из односторонних пределов $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, то x_0 называется *точкой разрыва 2-го рода*.

Теорема 5. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 . Тогда функции $f(x) \pm g(x)$; $f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ (если $g(x_0) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0 .



Свойства функций, непрерывных в точке

В частности если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , то функция $\alpha \cdot f(x)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, также непрерывна в точке x_0 .

Теорема 6 (о непрерывности сложной функции).

Пусть функция $u(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = u(x_0)$. Тогда сложная функция $f(u(x))$ непрерывна в точке x_0



Непрерывность элементарных функций

Теорема 7. Все простейшие элементарные функции $(c, x^a, a^x, \log_a x, \sin x, \cos x, \arcsin x, \arccos x)$ непрерывны в каждой точке своих областей определения.

Из этой теоремы, а также из двух предыдущих следует, что также непрерывны в каждой точке своих областей определения все функции, полученные из простейших с помощью конечного числа арифметических операций и операции композиции.



Свойства функций, непрерывных на отрезках

Теорема 8 (Больцано-Коши). Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах разные знаки. Тогда найдется хотя бы одна такая точка $x_0 \in (a; b)$, что $f(x_0) = 0$.

Теорема 9 (о промежуточных значениях). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда для любого числа C , заключенного между числами $f(a)$ и $f(b)$, найдется такая точка $x_0 \in [a; b]$, что $f(x_0) = C$.

Теорема 10 (1-я теорема Вейерштрасса). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда эта функция ограничена на этом отрезке.



Теорема 11 (2-я теорема Вейерштрасса). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда эта функция принимает на отрезке $[a; b]$ свои наибольшие и наименьшие значения, т.е. существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a; b]$ что для любой точки $x \in [a; b]$ справедливы неравенства

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) .$$

Пример 5.1. Заполнить таблицу для функции $f(x)$, найдя для каждого приращения Δx в точке $x_0 = 2$ соответствующее приращение $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Δx	-1	-0,2	-0,1	-0,01	1	0,2	0,1	0,01
Δy								

a) $f(x) = 3x + 1$

b) $f(x) = \begin{cases} x - 2 \\ 1 \end{cases}$

На основании заполненной таблицы сделать предположение о поведении функции в точке $x_0 = 2$.



Решение:

а) При $\Delta x = -1$ имеем $x = x_0 + \Delta x = 2 - 1 = 1$ откуда

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(1) - f(2) = 4 - 7 = -3$$

Аналогично находим и другие значения Δy . В результате получаем таблицу

Δx	-1	-0,2	-0,1	-0,01	1	0,2	0,1	0,01
Δy	-1	-0,2	-0,1	-0,01	1	1	1	1

Из таблицы видно, что малые приращения функции соответствуют малым приращениям аргумента лишь слева от точки $x_0 = 2$; справа же от этой точки (т.е. при $\Delta x > 0$) Δy не уменьшается при уменьшении Δx . Отсюда можно предположить, что $x_0 = 2$ – точка разрыва данной функции; при этом $f(x)$ непрерывна слева в этой точке.



Пример 5.4. Пользуясь определением непрерывности функции доказать, что функция $y = x^2$ непрерывна в произвольной точке $x_0 \in R$.

Решение: Пусть Δx - приращение аргумента в точке x_0 . Найдем соответствующее приращение функции:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 = \\ &= (x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\end{aligned}$$

Теперь, применяя теоремы о пределе суммы и произведения функций, получим:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x_0 \cdot \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^2 = 2x_0 \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \right)^2 = 0\end{aligned}$$

Таким образом, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, что и означает (по определению) непрерывность данной функции в точке $x_0 \in R$.



Пример 5.6. Доказать что функция $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \geq 0 \\ 0, & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$

Не является непрерывной в точке $x_0 = 0$, но непрерывна справа в этой точке. Построить график функции $f(x)$.

Решение: Найдем односторонние пределы в точке $x_0 = 0$. Слева от точки x_0 имеем $f(x) = 0$, поэтому

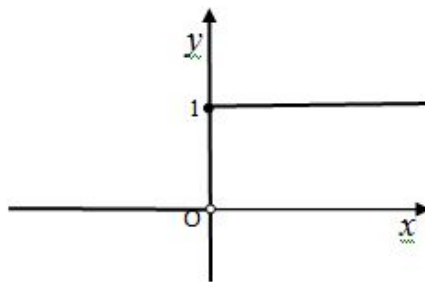
$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} 0 = 0.$$

Аналогично,

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} 1 = 1.$$

Кроме того, $f(x_0) = f(0) = 1$, откуда следует, что

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x).$$



Это означает, что в точке 0 не выполнены все условия непрерывности функции, но функция $f(x)$ непрерывна справа в этой точке.



Пример 5.11 Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \leq -\pi \\ \sin x, & \text{при } -\pi < x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти скачок функции в точках скачка.

Решение: Функции $y = x$, $y = \sin x$ и $y = 1$ непрерывны на всей числовой прямой, поэтому данная функция может иметь разрывы только в точках, где меняется ее аналитическое выражение, т.е. в точках $x_1 = -\pi$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соответствующие односторонние пределы и значения функции.

В точке $x_1 = -\pi$ имеем:

$$\lim_{x \rightarrow -\pi-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi} x = -\pi, \quad \lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi} \sin x = 0,$$

$$f(-\pi) = -\pi$$



Таким образом, в этой точке

$$\lim_{x \rightarrow -\pi-0} f(x) = f(-\pi) \neq \lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x)$$

т.е. функция имеет разрыв 1-го рода и непрерывна слева. Скачок функции $f(x)$ в точке $x_1 = -\pi$ равен

$$\Delta f(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\pi-0} f(x) = \pi.$$

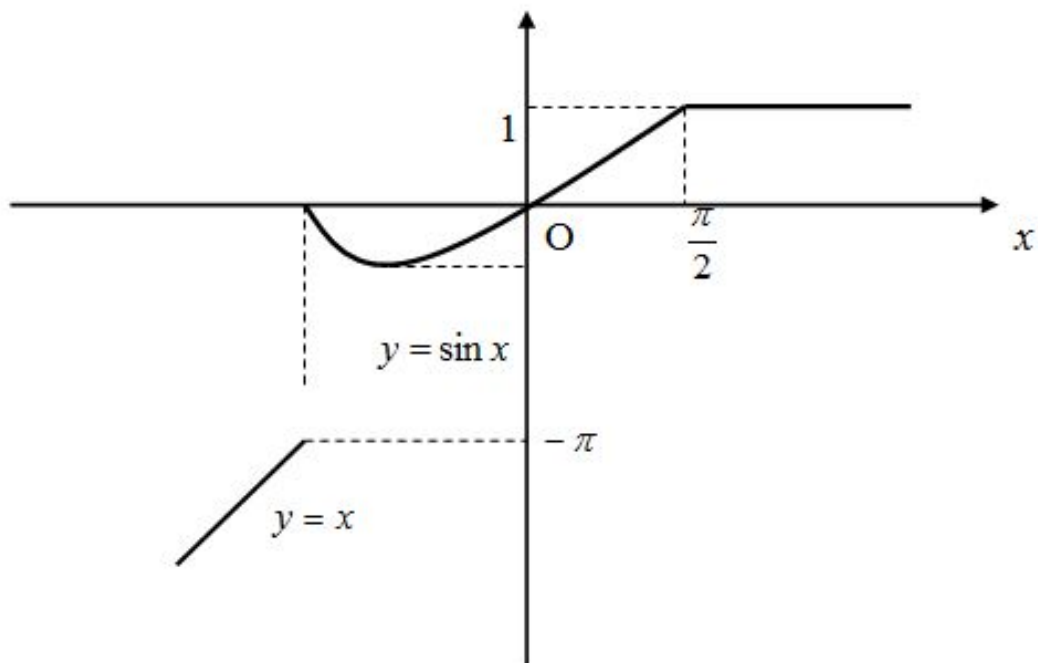
Аналогично, для точки $x_2 = \frac{\pi}{2}$ получим:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} 1 = 1,$$

а значит $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ не определено. Отсюда следует, что $x_2 = \frac{\pi}{2}$ -точка устранимого разрыва для функции $f(x)$.





Пример 5.17. Используя свойства непрерывных функций, доказать, что функция $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$ непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Решение: Функции $y = x^2$, $y = x^3$ и $y = c$ непрерывны на промежутке $(-\infty; +\infty)$

Следовательно данная функция $f(x)$ также непрерывна в каждой точке $x_0 \in R$ как сумма непрерывных функций $y = x^3$, $y = -5x^2$ (эта функция непрерывна, так как является произведением непрерывных функций $y = -5$ и $y = x^2$) $y = 7$.

Пример 5.19. Найти предел, используя свойства непрерывных функций:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 8x - 1}{x^2 - 4}.$$

Решение: Данная функция элементарная, поэтому она непрерывна на области определения, т.е. при всех $x \neq \pm 2$. Следовательно, $f(x)$ непрерывна и в точке $x = 3$, откуда

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 8x - 1}{x^2 - 4} = \frac{3^2 + 8 \cdot 3 - 1}{3^2 - 4} = \frac{32}{5} = 6,4.$$



Пример 5.21. Исследовать функцию $y = \frac{1}{(x+2)(x-3)}$ на непрерывность на отрезке $[a;b]$, если

а) $[a;b] = [-1;2]$

б) $[a;b] = [-5;0]$

в) $[a;b] = [-3;4]$

Решение: Данная функция элементарная, поэтому она непрерывна на области определения, т.е. при всех x , не равных -2 и 3 . В точке $x_1 = -2$ функция терпит разрыв 2-го рода, так как

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = -\infty$$

В точке $x_2 = 3$ также разрыв 2-го рода, потому что

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = +\infty$$

Отсюда следует, что дальше функция непрерывна на отрезке $[-1;2]$ (так как $x_1, x_2 \notin [-1;2]$); функция непрерывна всюду, кроме точки -2 , в которой терпит разрыв 2-го рода $x_1 \in [-5;0], x_2 \notin [-5;0]$ на отрезке $[-3;4]$ функция имеет две точки разрыва 2-го рода $x_1 = -2, x_2 = 3$, а в остальных точках непрерывна $x_1, x_2 \in [-3;4]$



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

