Лекция по теме:

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК.

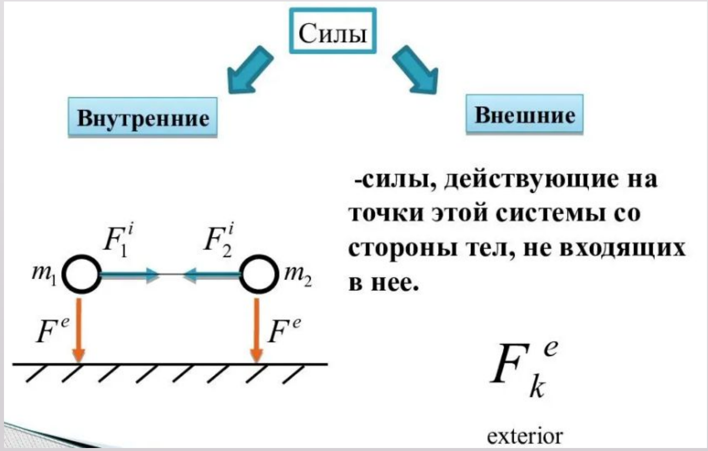
ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ.

13. Законы Ньютоны для системы материальных точек.
Закон сохранения импульса.

Третий закон Ньютона в соединении с первым и вторым законами позволили перейти от динамики отдельной материальной точки к динамике произвольной механической системы. Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Для i-й материальной точки согласно второму закону Ньютона:

$$\frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \vec{F}_i. \qquad (1)$$

Все тела, не входящие в рассматриваемую механическую систему , называются внешними, а силы, действующие со стороны этих тел, называются *внешними силами*. Силы взаимодействия частей самой системы называются *внутренними*.



13. Законы Ньютоны для системы материальных точек. Закон сохранения импульса.

Пусть $\vec{F}_i^{\,внеш}$ – сумма всех внешних сил, действующих на i-ю точку системы, $\vec{F}_{ik}$ – внутренняя сила, действующая на i-ю точку со стороны k-ой, тогда: $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,внеш} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik}$. В результате (1) примет вид:

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_i^{\,внеш} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} \qquad (2)$$

Просуммируем левые и правые части (2) по i для всех материальных точек:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,внеш} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} \qquad (3)$$

По третьему закону Ньютона: $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$. Отсюда $\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} = 0.$$

Обозначим : $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,внеш} = \vec{F}^{\,внеш}$ – результирующая всех внешних сил и $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{p}$ – импульс механической системы. Отсюда (3) примет вид:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\,внеш}} \qquad (4)$$

Мы получили закон изменения импульса механической системы: *производная по времени от импульса механической системы равна вектору внешних сил, действующих на систему.*

13. Законы Ньютоны для системы материальных точек. Закон сохранения импульса.

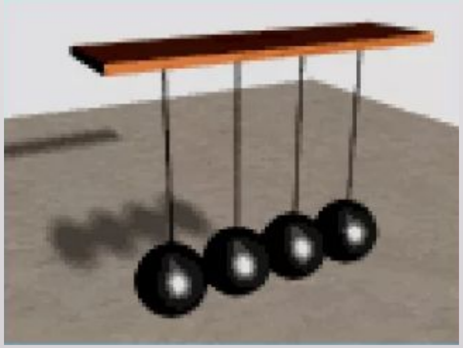
Рассмотрим замкнутую (или изолированную) систему. Механическая система, на которую не действуют внешние силы, называют *замкнутой системой*.

Итак, если система замкнута, то $\vec{F}_i^{внеш}=0$. Из закона динамики для системы тел (материальных точек):

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=0 \qquad (5)$$

Из (5) следует, что $\boxed{\vec{p} = const}$ или $\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = const}$ (6)

Мы пришли к ***закону сохранения полного импульса изолированной системы***: *при любом характере взаимодействия тел, образующих замкнутую систему, вектор полного импульса этой системы все время остается постоянным.*



13. Законы Ньютоны для системы материальных точек. Закон сохранения импульса.

Закон сохранения полного импульса изолированной системы – это универсальный закон природы. В более общем случае, когда система незамкнута, из (4) следует, что полный импульс незамкнутой системы не остается постоянным. Его изменение за единицу времени равно геометрической сумме всех внешних сил.

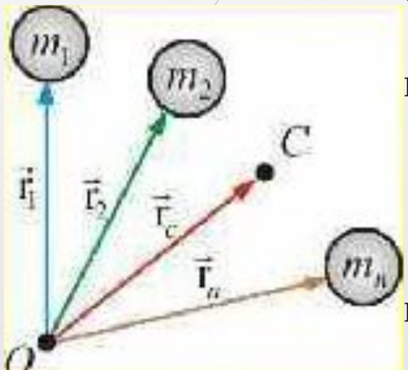
Если система незамкнута, то полный импульс незамкнутой системы не остается постоянным. Его изменение за единицу времени равно геометрической сумме всех внешних сил. Однако в некоторых случаях импульс незамкнутой системы также может сохраняться:

а) Иногда (например, при взрыве, ударе или выстреле) импульсы частей системы претерпевают большие изменения за сравнительно короткие промежутки времени. Это связано с возникновением в системе кратковременных, но весьма значительных по величине внутренних сил взаимодействия частей системы, по сравнению с которыми все постоянно действующие на систему внешние силы оказываются малыми. В этом случае внешними силами мы пренебрегаем и импульс всей системы в целом не изменяется.

б) Если система не замкнута, но $\vec{F}^{внеш}=0$, то по закону сохранения импульса импульс системы не изменяется с течением времени: $\vec{p} = const$.

в) Может оказаться, $\vec{F}^{внеш} \neq 0$, и $\vec{p} \neq const$, но $F_x^{внеш} = 0$ или $F_y^{внеш} = 0$. Тогда $p_x = const$ или $p_y = const$. Например, на систему действуют внешние силы, направленные вертикально, тогда $p_x = const$.

14. Центр масс и его движение.



В динамике широко используется понятие центра масс механической системы.

Центром масс или центром инерции системы материальных точек называется воображаемая точка С, радиус-вектор которой равен:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m},$$

где m_i и r_i – соответственно масса и радиус-вектор i-ой материальной точки; n–число материальных точек в системе; $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – масса системы.

Декартовы координаты центра масс равны проекциям $\vec{r}_c$ на координатные оси: $x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}$; $y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}$; $z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}$

В случае непрерывного распределения массы в системе (например, в случае протяженного тела радиус-вектор центра масс системы:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int_{(m)} \vec{r}\, dm,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор малого элемента системы массой dm.

14. Центр масс и его движение.

Скорость центра масс: $\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{m}$.

Учитывая, что $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, а $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$ – импульс механической системы, можно написать:

$$\vec{p} = m\vec{v}_c, \qquad (7)$$

то есть импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс. Подставим (7) в уравнение (4):

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^{\,внеш}} \qquad (8)$$

получили *закон движения центра масс:* центр масс системы движение как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.

В соответствии с (8) из закона сохранения импульса вытекает:

(т.к. $\vec{F}_i^{\,внеш} = 0 \Rightarrow m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0$) $\boxed{\vec{v}_c = const}$,

то есть центр масс замкнутой системы либо движение прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным.

15. Движение тел переменной массы.

В механике Ньютона считается, что масса тела не зависит от скорости. Однако это не означает, что при движении тела его масса всегда остается постоянной. Она может изменяться вследствие изменения состава движущегося тела (вращающаяся катушка с кабелем, поливная маши-на, полет ракеты с работающими двигателями, когда выбрасываются продукты сгорания топлива).

Основное уравнение динамики материальной точки переменной массы впервые было получено И.В.Мещерским (1897 г.)

Российский и советский ученый И.В. Мещерский (1859-1935)

15. Движение тел переменной массы.

Изменение за малое время dt импульса системы, состоящей из поступательно движущегося тела переменной массы и отделяющихся от него за это время (или присоединяющихся к нему) частиц равно:

$$d\vec{p} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - m\vec{v} - \vec{v}_1 dm, \qquad (1)$$

где m и $\vec{v}$ – масса и скорость тела в момент времени t, dm и $d\vec{v}$ – их изменение за малое время dt; $\vec{v}_1$ – скорость отделяющихся частиц.

Преобразуем (1) (пренебрежем $dm\, d\vec{v}$ вследствие малости):

$$d\vec{p} = m d\vec{v} + (\vec{v} - \vec{v}_1) dm.$$

Обозначим $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ – скорость отделяющихся частиц после отделения по отношению к телу переменной м4ассы (относительная скорость).

$$d\vec{p} = m d\vec{v} - \vec{u} dm.$$

Воспользуемся законом динамики: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{внеш}$, получим:

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{внеш} + \vec{u}\frac{dm}{dt}}$$

– уравнение Мещерского.

Обозначим : $\vec{F}_p = \vec{u}\frac{dm}{dt}$ - реактивная сила. Она характеризует механическое действие на тело отделяющихся от него (или присоединяющихся к нему) частиц.

15. Движение тел переменной массы.

Николай Иванович Кибальчич (1853 – 1881 г.) – российский физик-изобретатель

Константин Эдуардович Циолковский (1857 – 1935 гг.) – российский ученый, основоположник космонавтики

Идея использования реактивной силы для создания летательных аппаратов высказалась еще в 1881 г. революционером Н.И.Кибальчичем. Он перед казнью за участие в убийстве царя Александра II составил проект летательного аппарата, но чертежи затерялись в тюремных архивах. В 1903 г. Циолковский опубликовал основы теории движения ракеты и жидкостного ракетного двигателя (ЖРД). В 1929 г. Стечкин Б.С. разработал теорию воздушно-ракетного двигателя. Циолковский рассчитал максимальную скорость ракеты, которая движется под действием только реактивной силы двигателя, при отсутствии силы тяготения и сопротивления. В уравнении Мещерского $\vec{F}^{\,внеш} = 0$:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}\,\frac{dm}{dt}$$

где $\vec{u}$ – относительная скорость истечения продуктов сгорания топлива из сопла. В проекции на направление движения ракеты:

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt}; \quad \Rightarrow \quad dv = -u\frac{dm}{m}$$

Пусть m_0 – стартовая масса ракеты;

$m^* = m_0 - m_\tau$ – конечная масса ракеты после выгорания топлива;

m_τ –масса топлива и окислителя до старта.

$$v_{max} = -u\int_{m_0}^{m^*}\frac{dm}{m} = u\ln\frac{m_0}{m^*} \qquad \boxed{v_{max} = u\ln\frac{m_0}{m_0 - m_\tau}}$$ –

формула Циолковского.

v_{max} – характеристическая скорость ракеты.

В действительности эта скорость меньше из-за сопротивления атмосферы и тяготения Земли на старте.

16. Энергия системы материальных точек. Закон сохранения механической энергии в консервативной системе.

Пусть имеем систему материальных точек. Относительно системы отсчета координаты точки изменяются вследствие их движения. Кроме того, они взаимодействуют между собой: $E_K+E_P=E$

Сумма потенциальной и кинетической энергии всех точек, входящих в эту систему, называется полной.

Выясним, как изменяется энергия в консервативной системе. Для этого запишем уравнение движения для i-ой точки:

$$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}=\vec{f}_{i1}+\vec{f}_{i2}+\ldots+\vec{f}_{in}+\vec{F}_i; \qquad i=1,2\ldots,n$$

где $\vec{f}_{i1}; \vec{f}_{i2};\ldots;\vec{f}_{in}$ –внутренние силы, действующие на i-ю точку, $\vec{F}_i$ – внешние.

За малое время *dt* точка совершит перемещение $d\vec{r}_i=\vec{v}_i dt$. Умножим это выражение с уравнением движения:

$$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\vec{v}_i dt=(\vec{f}_{i1}+\vec{f}_{i2}+\ldots+\vec{f}_{in})d\vec{r}_i+\vec{F}_i d\vec{r}_i\ .$$

$m_i\vec{v}_i d\vec{v}_i=dE_{K\,i}$ –изменение кинетической энергии одной точки.

$(\vec{f}_{i1}+\vec{f}_{i2}+\ldots+\vec{f}_{in})d\vec{r}_i=dA_{внут\,р}=-dE_{Pi}$ – изменение ее потенциальной энергии.

16. Энергия системы материальных точек. Закон сохранения механической энергии в консервативной системе.

$\vec{F}_i d\vec{r}_i = dA_{i\,внеш}$ –работа внешних сил.

В итоге получаем: $dE_{K\,i} = -dE_{П\,i} + dA_{i\,внеш}$.

Просуммируем левые и правые части по всем точкам:

$$\sum_{i=1}^{n} dE_{K\,i} = -\sum_{i=1}^{n} dE_{П\,i} + \sum_{i=1}^{n} dA_{i\,внеш} \quad \Rightarrow \quad dE_{K} = -dE_{П} + dA_{внеш}$$

dE_K–изменение кинетической энергии всех точек,

dE_P– изменение потенциальной энергии всех точек,

$dA_{внеш}$ –работа внешних сил над всей системой за время dt.

$$dE_K + dE_P = dA_{внеш} \quad \Rightarrow d(E_K + E_P) = dA_{внеш}.$$

Но $E_K + E_P = E$ –полная механическая энергия системы.

$$dE = dA_{внеш}$$

dE–изменение полной механической энергии за время dt. Проинтегрируем по всему промежутку времени от t_1 до t_2. $\int_1^2 dE = \int_0^A dA_{внеш}$

$$\boxed{E_2 - E_1 = A_{внеш}}$$

16. Энергия системы материальных точек. Закон сохранения
механической энергии в консервативной системе.

Изменение полной механической энергии в незамкнутой консервативной системе равна работе внешних сил.

Если консервативная система замкнута, то внешние силы отсутствуют:

$$A_{внеш} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_2 - E_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_2 = E_1 \qquad E = const.$$

$$\boxed{E_K + E_P = const}$$

закон сохранения замкнутой консервативной системы:

Сумма кинетической и потенциальной энергии всех материальных точек, входящих в замкнутую консервативную систему, остается величиной постоянной, какие бы изменения не происходили.

Если система подвергается действию *неконсервативных* (диссипативных) сил, механическая энергия убывает, переходя в другие виды энергии (например, тепловую при действии сил трения). Но в целом энергия остается постоянной.

Согласно всеобщему закону сохранения и превращения энергии уменьшение или увеличение полной механической энергии системы в точности компенсируется увеличением или уменьшением какого-либо другого вида энергии.

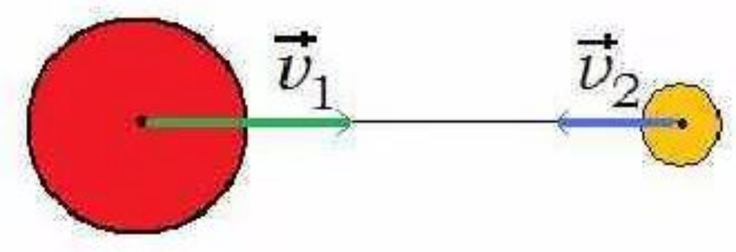
Энергия никуда не исчезает и не появляется вновь, а лишь переходит от одного тела к другому или превращается из одного вида в другой.

17. Соударение двух тел.

Примером применения законов сохранения импульса и энергии при решении реальной физической задачи является удар абсолютно упругих и неупругих тел.

- *Удар или соударение* – это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время. При рассмотрении столкновений необходимо знать форму тел, массы покоя, скорости движения и их упругие свойства. Простейшим видом соударений является *центральный удар тел, при котором тела до удара движутся поступательно вдоль прямой, проходящей через их центры масс.*

Существует два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий. Рассмотрим центральный удар шаров для этих видов удара.



17. Соударение двух тел.

1. ***Абсолютно неупругий удар*** *– это такой удар, после которого скорость соударяющихся тел оказывается одинаковой* (рис.17.1).

При абсолютно неупругом ударе кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию, поэтому здесь неприменим закон сохранения механической энергии, а применим лишь закон сохранения импульса: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}',$ $\Rightarrow$

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

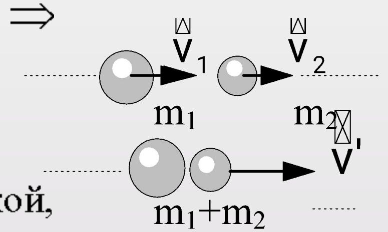


Рис.17.1.

Частным случаем рассматриваемого взаимодействия будет такой, когда первоначальные импульсы $m_1\vec{v}_1$ и $m_2\vec{v}_2$ тел будут равны по модулю, но противоположны по направлению. В этом случае кинетическая энергия взаимодействующих тел полностью переходит во внутреннюю энергию, так как при этом совершается работа по деформации тел.

В общем случае во внутреннюю энергию тел переходит часть кинетической энергии (идет на работу деформации и нагревание тел), величину которой можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара:

$$\Delta E_к = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)v'^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2.$$

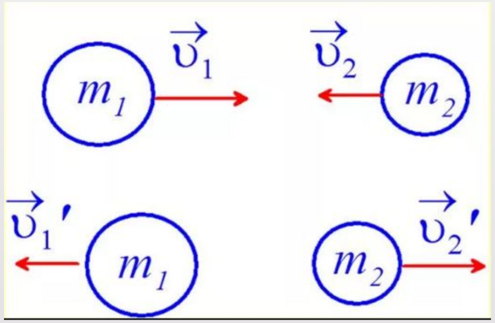
Таким образом, для неупругого удара не выполняется закон сохранения механической энергии, но справедлив сохранения закон суммарной энергии различных видов – механической и внутренней.

17. Соударение двух тел.

2. Абсолютно упругий удар – это *такой удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие, немеханические, виды энергии,* так как этом случае нет деформации, на которую бы расходовалась часть энергии. Следовательно, для абсолютно упругого удара выполняются законы сохранения механической энергии и импульса:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$



Перепишем систему в виде:

$$m_1(v_1^2 - v'^2_1) = m_2(v'^2_2 - v_2^2) \qquad (1)$$

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2) \qquad (2)$$

Полагая $v_1 - v'_1 \neq 0$ и $v'_2 - v_2 \neq 0$, поделим первое уравнение на второе:

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2 \qquad (3)$$

Решая систему из уравнений (3) и (2), получаем:

$$\boxed{v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}}; \quad \boxed{v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}}.$$

Скорости имеют положительный знак, если они совпадают с положительным направлением оси, выбранной нами, и отрицательный – в противном случае.

17. Соударение двух тел.

Проанализируем полученные выражения для двух шаров различных масс.

1. $m_1 = m_2. \Rightarrow \qquad v'_1 = \dfrac{2m_2 v_2}{2m_2} = v_2;\ v'_2 = \dfrac{2m_1 v_1}{2m_1} = v_1.$

Шары равной массы «обмениваются» скоростями.

2. $m_1 > m_2,\ v_2 = 0$, (рис.17.2).

$v'_1 < v_1$, следовательно, первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью;

$v'_2 > v'_1$, следовательно, скорость второго шара после удара больше, чем скорость первого после удара.

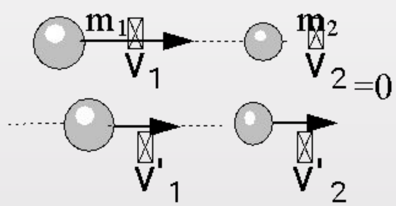


Рис.17.2.

3. $m_1 < m_2,\ v_2 = 0$, (рис.17.3)

$v'_1 < 0$, следовательно, направление движения первого шара при ударе изменяется – шар отскакивает обратно.

$v'_2 < v_1$, следовательно, второй шар в ту же сторону, в которую двигался первый шар до удара, но с меньшей скоростью.

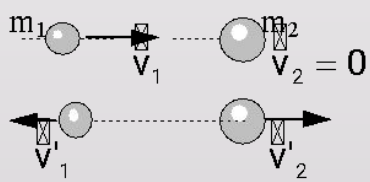


Рис.17.3.

4. $m_2 >> m_1$ (например, столкновение шара со стенкой)

$v'_1 = -v_1, \quad v'_2 \approx \dfrac{2m_1 v_1}{m_2} \approx 0,$ следовательно, получившее удар большое тело останется в покое, а ударившее малое тело отскочит с первоначальной скоростью в противоположную сторону.

Спасибо за внимание!