

Функция регрессии

Зависимость СВ

Функциональная

Стохастическая

Компоненты системы НСВ независимы

$$\Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(y|x) = f_Y(y) \Leftrightarrow f(x|y) = f_X(x)$$

$$M(X|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x|y) dx$$

$$M(Y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y|x) dy$$

$$M(X|y) = \psi(y)$$

$$M(Y|x) = \varphi(x)$$

Свойства функции регрессии

Р₁ Y не зависит от $X \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ – константа

Р₂ $M(Y \cdot u(X)) = M(\varphi(X) \cdot u(X))$

Р₃ $M((Y - \varphi(X))^2) \leq M((Y - g(X))^2)$

Следствие Р2 $M(Y) = M(\varphi(X))$ При $u(X)=1$

Следствие Р3 $D(Y) \geq D(\varphi(X))$ При $g(x)=M(Y)$

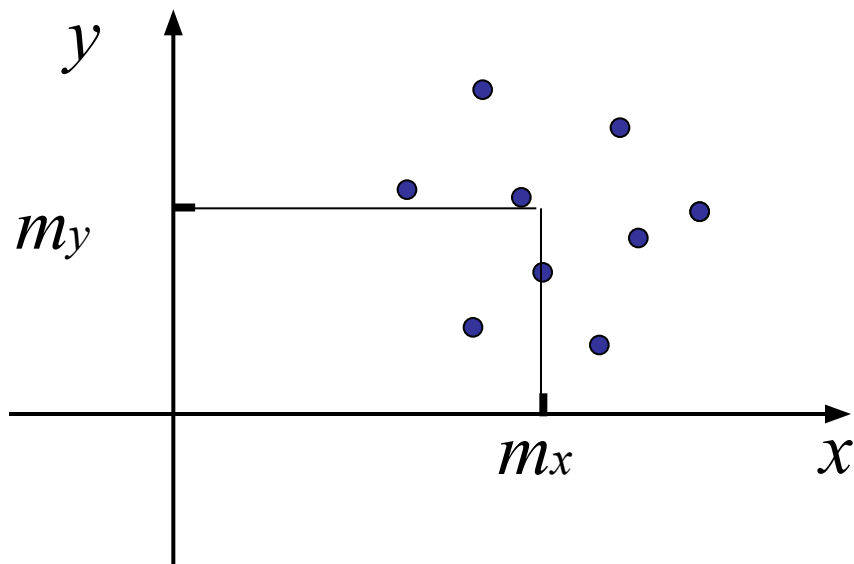
Обозначения: $y = \varphi(x)$ – функция регрессии Y на X ; $u(x)$, $g(x)$ – произвольные функции, имеющие м.о.

Доказательство свойств

Р
1

Y не зависит от $X \Leftrightarrow f(y|x) = f_Y(y) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = M(Y|x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y|x) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) dy = m_Y \end{aligned}$$



Доказательство свойств

$$\textcircled{P}_2 \quad M(Y \cdot u(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot u(x) f(x, y) dx dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot u(x) f_X(x) f(y|x) dx dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) f_X(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y f(y|x) dy \right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) f_X(x) \varphi(x) dx = M(\varphi(X) \cdot u(X))$$

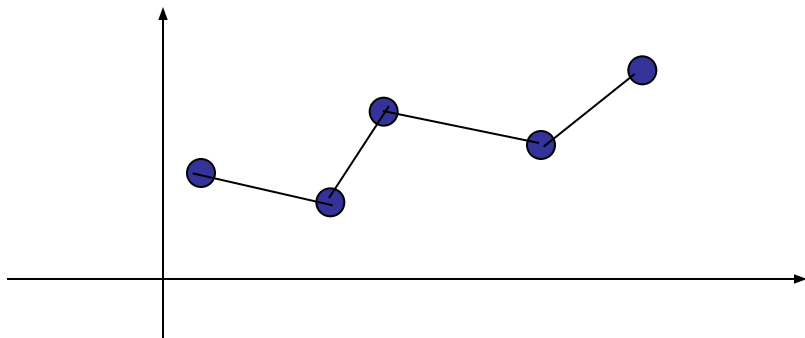
Основное свойство регрессии

Р
3

$$M\left((Y - \varphi(X))^2\right) \leq M\left((Y - g(X))^2\right)$$

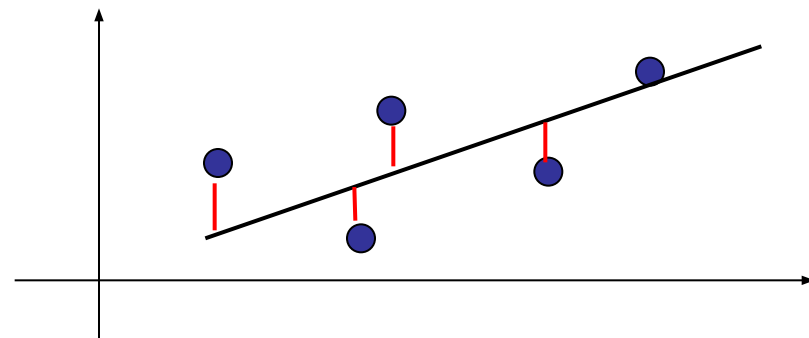
Функция регрессии - наилучшее
среднеквадратичное приближение СВ Y

Интерполяция



$$\sum_{i=1}^n |y_i - g(x_i)| = 0$$

Среднеквадратичное
приближение



$$\sum_{i=1}^n (y_i - g(x_i))^2 \rightarrow \min$$

5

Доказательство свойства

Р
3

$$M\left((Y - \varphi(X))^2\right) \leq M\left((Y - g(X))^2\right)$$

$$M\left((Y - g(X))^2\right) = M\left((Y - \varphi(X) + \varphi(X) - g(X))^2\right) =$$

$$= M\left((Y - \varphi(X))^2\right) + M\left((\varphi(X) - g(X))^2\right) +$$

$$+ 2M\left((Y - \varphi(X))(\varphi(X) - g(X))\right) =$$

$u(x)$
6

Доказательство свойства

P
3

$$M\left((Y - \varphi(X))^2\right) \leq M\left((Y - g(X))^2\right)$$

$$\begin{aligned}
 M\left((Y - g(X))^2\right) &= M\left((Y - \varphi(X))^2\right) + M(u^2(X)) + \\
 &\quad + 2M\left((Y - \varphi(X)) \cdot u(X)\right) = \\
 &= M\left((Y - \varphi(X))^2\right) + \underbrace{M(u^2(X))}_{\geq 0} + \\
 &\quad + \underbrace{2\left(M(Y \cdot u) - M(\varphi(X)u)\right)}_{=0} \geq M\left((Y - \varphi(X))^2\right)
 \end{aligned}$$

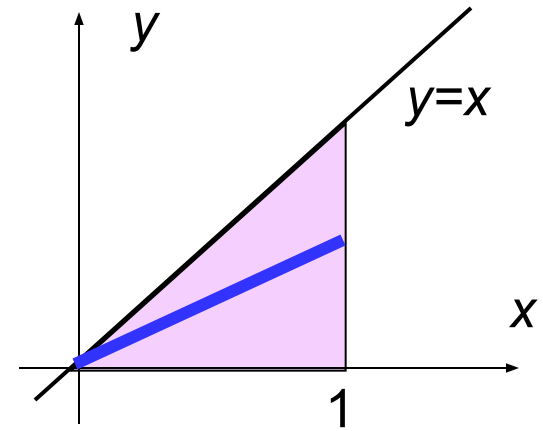
Функция регрессии

Пример. Найти функцию регрессии y на x , если

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x + y) & \text{при } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при остальных } x \text{ и } y \end{cases}$$

Решение.

$$f(y|x) = \frac{2(x + y)}{3x^2} \quad \text{ïðå} \quad 0 \leq y \leq x$$



$$M(Y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y|x) dy = \int_0^x y \cdot \frac{2(x + y)}{3x^2} dy = \boxed{y = \frac{5}{9}x}$$

$$= \frac{2}{3x^2} \int_0^x (xy + y^2) dy = \frac{2}{3x^2} \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^x = \frac{2}{3x^2} \cdot \frac{5}{6} x^3 = \frac{5}{9} x$$