Функция регрессии

Зависимость СВ

Функциональная — Стохастическая

Компоненты системы НСВ независимы

$$\Leftrightarrow f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(y|x) = f_Y(y) \Leftrightarrow f(x|y) = f_X(x)$$

$$\boxed{M(X|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x|y)\,dx} \quad \boxed{M(Y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f(y|x)\,dy}$$

$$M(X|y) = \psi(y) \qquad M(Y|x) = \varphi(x)$$

Свойства функции регрессии

P1 Y не зависит от X $\Leftrightarrow$ $y=\varphi(x)$ – константа

P2 $$M\left(Y\cdot u(X)\right)=M\left(\varphi(X)\cdot u(X)\right)$$

P3 $$M\left(\left(Y-\varphi(X)\right)^2\right)\le M\left(\left(Y-g(X)\right)^2\right)$$

<u>Следствие P2</u> $M(Y)=M\left(\varphi(X)\right)$ При $u(X)=1$

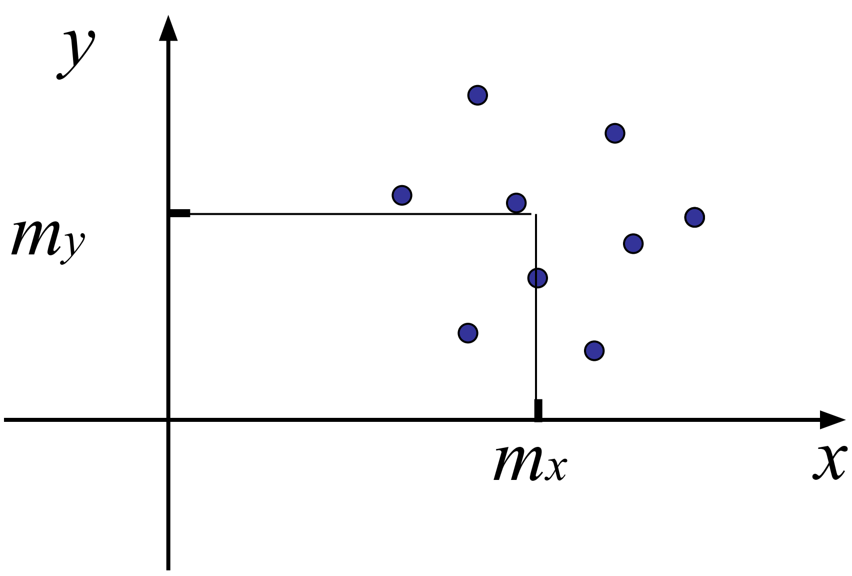
<u>Следствие P3</u> $D(Y)\ge D\left(\varphi(X)\right)$ При $g(x)=M(Y)$

<u>Обозначения</u>: $y=\varphi(x)$ – функция регрессии Y на X; $u(x)$, $g(x)$ – произвольные функции, имеющие м.о.

Доказательство свойств

Р 1 Y не зависит от X $\Leftrightarrow f(y|x) = f_Y(y) \Rightarrow$

$$\varphi(x) = M(Y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y|x)\,dy =$$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)\,dy = m_Y$$

Доказательство свойств

P2

$$M\left(Y\cdot u\left(X\right)\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y\cdot u\left(x\right)f\left(x,y\right)dxdy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y\cdot u\left(x\right)f_X\left(x\right)f\left(y\middle|x\right)dxdy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u\left(x\right)f_X\left(x\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}yf\left(y\middle|x\right)dy\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u\left(x\right)f_X\left(x\right)\varphi\left(x\right)dx=M\left(\varphi\left(X\right)\cdot u\left(X\right)\right)$$

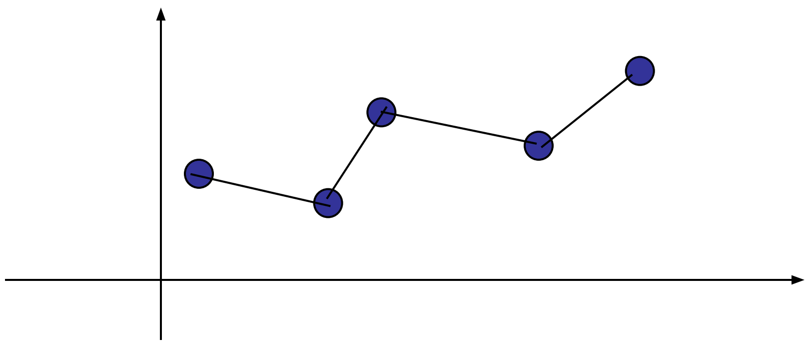
Основное свойство регрессии

Р 3

$$M\left(\left(Y-\varphi(X)\right)^2\right) \le M\left(\left(Y-g(X)\right)^2\right)$$

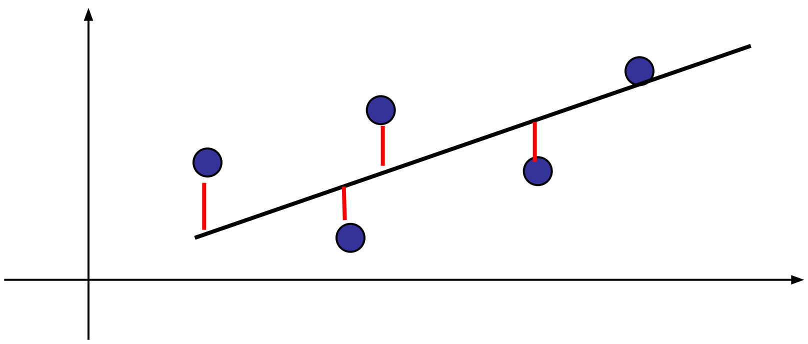
Функция регрессии - наилучшее среднеквадратичное приближение СВ Y

Интерполяция



$$\sum_{i=1}^{n}\left|y_i-g(x_i)\right|=0$$

Среднеквадратичное приближение



$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-g(x_i)\right)^2 \to \min$$

Доказательство свойства

Р 3

$$M\left(\left(Y-\varphi\left(X\right)\right)^2\right)\le M\left(\left(Y-g\left(X\right)\right)^2\right)$$

$$M\left(\left(Y-g\left(X\right)\right)^2\right)=M\left(\left(Y-\varphi\left(X\right)+\varphi\left(X\right)-g\left(X\right)\right)^2\right)=$$

$$=M\left(\left(Y-\varphi\left(X\right)\right)^2\right)+M\left(\left(\varphi\left(X\right)-g\left(X\right)\right)^2\right)+$$

$$+2M\left(\left(Y-\varphi\left(X\right)\right)\underbrace{\left(\varphi\left(X\right)-g\left(X\right)\right)}_{u(x)}\right)=$$

Доказательство свойства

Р 3

$$M\left(\left(Y-\varphi(X)\right)^2\right)\le M\left(\left(Y-g(X)\right)^2\right)$$

$$M\left(\left(Y-g(X)\right)^2\right)= M\left(\left(Y-\varphi(X)\right)^2\right)+M\left(u^2(X)\right)+$$

$$+2M\left(\left(Y-\varphi(X)\right)\cdot u(X)\right)=$$

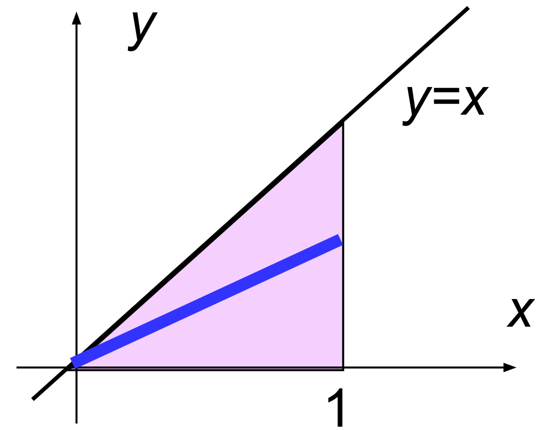
$$=M\left(\left(Y-\varphi(X)\right)^2\right)+\underbrace{M\left(u^2(X)\right)}_{\ge 0}+$$

$$+2\underbrace{\left(M\left(Y\cdot u\right)-M\left(\varphi(X)u\right)\right)}_{=0}\ \ge M\left(\left(Y-\varphi(X)\right)^2\right)$$

Функция регрессии

<u>Пример</u>. Найти функцию регрессии *y на x,* если

$$f(x,y)=\begin{cases}2(x+y) & \text{при } 0\le y\le x\le 1,\\ 0 & \text{при остальных } x \text{ и } y\end{cases}$$



<u>Решение</u>.

$$f(y|x)=\frac{2(x+y)}{3x^2}\ \text{ïðè}\ \ 0\le y\le x$$

$$M(Y|x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f(y|x)dy=\int_0^x y\cdot\frac{2(x+y)}{3x^2}dy=\boxed{y=\frac{5}{9}x}$$

$$=\frac{2}{3x^2}\int_0^x\left(xy+y^2\right)dy=\frac{2}{3x^2}\left(\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^x=\frac{2}{3x^2}\cdot\frac{5}{6}x^3=\frac{5}{9}x$$