ФГОБУ
Финуниверситет при Правительстве РФ

Эконометрика

- **Семинар 6**

Исследование уравнения множественной линейной регрессии

Необходимые формулы

$$\square^2 = 1 - \frac{\sigma\,\square_{\square}^2}{\sigma(\square_{\square} - \square)^2} = \square\square\square / \square\square\square$$

$$\square^2 = 1 - \frac{\square 1 - \square^2 \square(\square - 1)}{\square - \square - 1}$$

$$\square = \frac{\square^2}{1 - \square^2} \square \frac{\square - \square - 1}{\square}$$

$$\square = \square \overline{\frac{\sigma\,\square_{\square}^2}{\square - \square - 1}}$$

$$\square_{\square} = \square\square \overline{\square\square^{\square} \square \square\square_{\square}^{-1}}$$

$$\Delta_{\square} = \square_{\square} \square \square_{\square}$$

Задача 1. Исследовать уравнение множественной линейной регрессии по данным, приведенным в таблице

x1	x2	y
10	12	20
15	10	35
20	9	30
25	9	45
40	8	60
37	8	70
43	6	75

Исходная матрица *X*

	x1	x2
1	10	12
1	15	10
1	20	9
1	25	9
1	40	8
1	37	8
1	43	6

Для нахождения дисперсий коэфф. уравнения регрессии находим обратную матрицу

$$(Xt*X)^{-1}=\begin{vmatrix} 50,37494 & -0,55331 & -3,97572 \\ -0,55331 & 0,006588 & 0,042281 \\ -3,97572 & 0,042281 & 0,3193 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\text{[illegible]}} = 21{,}39 + 1{,}39\,\text{[illegible]}_1 - 1{,}26\,\text{[illegible]}_2$$

$$\text{[illegible]}^2 = 0{,}93, \quad \text{[illegible]}_{\text{кр}}(0{,}05;\,4) = 2{,}78$$

$$\text{[illegible]}^2 = 0{,}89 \quad S = 6{,}942$$

$$\text{[illegible]} = 25{,}4, \quad \text{[illegible]}_{\text{кр}} = \text{[illegible]}\,0{,}05;\,2;\,4\,\text{[illegible]} = 6{,}94$$

$$\text{[illegible]}_0 = 6{,}942 \cdot \text{[illegible]}\,50{,}375^{0{,}5}\,\text{[illegible]} = 49{,}3, \quad \Delta_{\text{[illegible]}_0} = 49{,}3 \cdot 2{,}78 = 137,$$

$$\text{[illegible]}_{\text{набл[illegible]}0} = \text{[illegible]},\ \text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}_1 = 0{,}56, \quad \Delta_{\text{[illegible]}_1} = 1{,}566, \quad \text{[illegible]}_{\text{набл[illegible]}1} = \text{[illegible]},\ \text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}_2 = 3{,}92, \quad \Delta_{\text{[illegible]}_2} = 10{,}9, \quad \text{[illegible]}_{\text{набл[illegible]}2} = -\text{[illegible]},\ \text{[illegible]}$$

$$-115{,}41 \le \text{[illegible]}_0 \le 158{,}2$$

$$-0{,}176 \le \text{[illegible]}_1 \le 2{,}952$$

$$-12{,}156 \le \text{[illegible]}_2 \le 9{,}626$$

Проверка, полученных результатов, с помощью программы «Регрессия» *Exel*.

R-квадр	0,927063								
Нормир	0,890595								
Стандар	6,941939				tkr=2,78				
Наблюд	7				Fkr=6,94				
Дисперсионный анализ									
	df	*SS*	*MS*	*F*	*значимость F*				
Регресс	2	2450,095	1225,048	25,421	0,0053				
Остаток	4	192,7621	48,19051						
Итого	6	2642,857							
Коэффициенты		*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние 95,0%*	*Верхние 95,0%*	
Y-перес	**21,38915**	49,27062	***0,434116***	0,6866	-115,41	158,2	-115,4	158,2	
Переме	**1,387798**	0,563459	***2,462997***	0,0695	-0,1766	2,952	-0,177	2,952	
Переме	**-1,26461**	3,922654	***-0,32239***	0,7633	-12,156	9,626	-12,16	9,626	

Задача 2. Исследовать уравнение множественной линейной регрессии по данным, приведенным в таблице (n = 11)

x1	x2	y
10	12	20
15	10	35
20	9	30
25	9	45
40	8	60
37	8	70
43	6	75
35	4	90
40	4	105
55	5	110
320	75	640

Самостоятельно!

Как должен выглядеть ответ:

R^2=
R^2скорр=
Fнабл=
Fkr=
tkr=

$S_{b_0} = S\sqrt{\ldots\ldots\ldots} = \cdots,$ $\Delta_{b_0} = \cdots$

$S_{b_1} = S\sqrt{\ldots\ldots\ldots} = \cdots,$ $\Delta_{b_1} = \cdots$

$S_{b_2} = S\sqrt{\ldots\ldots\ldots} = \cdots,$ $\Delta_{b_2} = \cdots$

≤b0≤
≤b1≤
≤b2≤

$$\hat{y} = 0{,}28 + 2{,}13x_1 - 0{,}59x_2$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2_{ost}}{\sigma(y_i - \bar{y})^2} = 0{,}994$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{(1 - R^2)(n - 1)}{n - m - 1} = 0{,}993$$

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m} = 776; \quad F\text{kr}(0{,}05;2;8) = 4{,}46$$

$$t = \sqrt{\frac{\sigma^2_{ost}}{n - m - 1}} = 14{,}192; \quad t\text{kr}(0{,}05;8) = 2{,}31$$

$$B = \begin{vmatrix} 0{,}288418 \\ 2{,}134305 \\ -0{,}59419 \end{vmatrix}$$

$$(Xt*X)^{-1} = \begin{vmatrix} 0{,}135724 & -0{,}0003 & -0{,}0018 \\ -0{,}00034 & 0{,}00019 & -0{,}0008 \\ -0{,}00183 & -0{,}0008 & 0{,}0035 \end{vmatrix}$$

R^2=	0,9948
R^2скорр=	0,9935
Fнабл=	766,96
Fkr=	4,45897
tkr=	2,306004

$$S_{b_j} = S\sqrt{(X^T * X)^{-1}_{jj}}$$

$$S_{b_0} = S\sqrt{0{,}135} = 5{,}228,$$

$$S_{b_1} = S\sqrt{0{,}00019} = 0{,}196,$$

$$S_{b_2} = S\sqrt{0{,}0035} = 0{,}840,$$

$$\Delta_{b_j} = S_{b_j} * t_{kr}$$

Ответ:

$$\hat{y} = 0{,}28 + 2{,}13x_1 - 0{,}59x_2$$

$$\Delta_0 = 12{,}07$$

$$\Delta_1 = 0{,}45$$

$$\Delta_2 = 1{,}94$$

-11,7682	≤b0≤	12,34503
1,681999	≤b1≤	2,586611
-2,53162	≤b2≤	1,343245

Задача 3. Исследовать уравнение множественной линейной регрессии по данным, приведенным в таблице

x1	x2	y
43	6	75
35	4	90
38	4	105
55	5	110
50	3	120
35	1	130
40	2	130
55	3	130
45	1	135
65	2	140

Самостоятельно!

$$\hat{Y} = 109{,}96 + 0{,}89X_1 - 11{,}14X_2$$

$$R^2 = 0{,}93$$

$$\bar{R}^2 = 0{,}91$$

$$n = 48$$

$$\Delta_0 = 25{,}03$$

$$\Delta_1 = 0{,}49$$

$$\Delta_2 = 2{,}96$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{109,9623} \\ \mathbf{0,890698} \\ \mathbf{-11,1366} \end{vmatrix}$$

$$(Xt*X)^{-1} = \begin{vmatrix} 2,859913 & -0,05162 & -0,12263 \\ -0,05162 & 0,001123 & -4,1E\text{-}05 \\ -0,12263 & -4,1E\text{-}05 & 0,040162 \end{vmatrix}$$

84,88	≤ b0 ≤	135
0,394	≤ b1 ≤	1,388
-14,11	≤ b2 ≤	-8,164

S=	6,271989		
Sb0=	10,60673	Δb0=	24,459
Sb1=	0,210135	Δb1=	0,484
Sb2=	1,256937	Δb2=	2,898
tst=	2,306	(двусторонняя критич.обл.)	
R2=	0,932051		
R2испр=	0,912636		
Fкр=	4,74	(правосторонняя проверка: 0,05;2;7)	
F=	48,00892		

tb0=	10,37
tb1=	4,239
tb2=	-8,86

84,88	≤ b0 ≤	135
0,394	≤ b1 ≤	1,388
-14,11	≤ b2 ≤	-8,164

Исследование уравнения множественной линейной регрессии (прогнозирование)

Необходимые формулы

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$\hat{y}_{прогн} = x_0 \beta$$

Дисперсия для мат. ожидания

$$s^2_{\hat{y}} = s^2 \, x_{прогн} (X^T X)^{-1} x_{прогн}^T$$

Дисперсия для индивид. значения

$$s^2_{y_0} = s^2 \, 1 + x_{прогн} (X^T X)^{-1} x_{прогн}^T$$

Пример. Дать прогноз для $x_{1макс}$ и $x_{2макс}$ для уравнения множественной линейной регрессии по данным, приведенным в таблице

x1	x2	y
10	12	20
15	10	35
20	9	30
25	9	45
40	8	60
37	8	70
43	6	75

$$\hat{y} = 21{,}39 + 1{,}39x_1 - 1{,}26x_2$$

	1
$X_0^T = X^T$ прогн	43
	12

$$\square^2 = 0{,}93$$

$$\square^2 = 0{,}89; \quad \square = 6{,}942$$

$$\square = 25{,}4; \quad \square = 6{,}94; \quad \square = 2{,}78$$

$$\square_0 = \square(43; 12) = 21{,}39 + 1{,}39 \cdot 43 - 1{,}26 \cdot 12 = 65{,}89$$

$$\square\square_{\text{прогн}} = \square_{\square} = \square\,\square_{\text{прогн}}(\square^{\square}\square)^{-1}\square^{\square}_{\text{прогн}} = 6{,}942 \cdot 9{,}167 = 21{,}01$$

$$7{,}457 \cdot \square\square_0 \cdot 124{,}32$$

$$\square\square^{\square}_{\text{прогн}} = \square\,1 + \square_{\text{прогн}}(\square^{\square}\square)^{-1}\square^{\square}_{\text{прогн}} = 22{,}135$$

$$4{,}352 \cdot \square_0 \cdot 127{,}43$$

?

$$A=(Xt*X)^{-1}\begin{vmatrix} 50,375 & -0,55331 & -3,97572 \\ -0,553 & 0,006588 & 0,042281 \\ -3,976 & 0,042281 & 0,3193 \end{vmatrix}$$

$$X^{T}_{прогн}=\begin{vmatrix} 1 \\ 43 \\ 12 \end{vmatrix}$$

$$X_{прогн}=\begin{vmatrix} 1 & 43 & 12 \end{vmatrix}$$

$$X_{прогн}*A=\begin{vmatrix} -21,13 & 0,237354 & 1,673977 \end{vmatrix}$$

$$X_{прогн}*A*X^{T}_{прогн}= 9,1677$$

◀

Задача 4. Дать прогноз для $x_{1макс}$, $x_{2макс}$ для уравнения множественной линейной регрессии по данным, приведенным в таблице

x1	x2	y
5	8	6
7	12	8
5	8	5
8	11	10
8	12	10
5	9	7
7	8	5
8	8	6
6	9	6
4	9	5

Самостоятельно!

$$\hat{y} = -3{,}539 + 0{,}367x_1 + 0{,}854x_2$$

$$R^2 = 0{,}812$$

$$\bar{R}^2 = 0{,}758$$

$$F = 15{,}08$$

$$\hat{y}_0 = 9{,}644$$

$$\Delta\hat{y}_0 = 0{,}95 \cdot (0{,}397^{0{,}5}) = 0{,}598$$

$$8{,}231 \le \hat{y}_{x_0} \le 11{,}06$$

$$\Delta\hat{y}_0 = 0{,}95 \cdot (1 + 0{,}397)^{0{,}5} = 1{,}123$$

$$6{,}992 \le \hat{y}_0 \le 12{,}3$$

X^T_0=	1
	8
	12

Fкр=	4,74
tкр=	2,36

S=	0,951

delta=	*1,414*

delta=	2,652

Задача 5. Дать прогноз для $x_{1макс}$, $x_{2макс}$ и $x_{3макс}$ для уравнения множественной линейной регрессии по данным, приведенным в таблице

x1	x2	x3	y
10	12	8	20
15	10	5	35
20	9	4	30
25	9	3	45
40	8	7	60
37	8	6	70
43	6	9	75

Самостоятельно!

$$\hat{y} = 23{,}47 + 1{,}333x_1 - 1{,}541x_2 + 0{,}308x_3$$

$$R^2 = 0{,}928$$

$$\bar{R}^2 = 0{,}856$$

$$\bar{y} = 12{,}86$$

$$y_0 = 65{,}08$$

$$\hat{y}(x_0) = 24{,}54$$

Fкр=	9,28
tкр=	3,18

	1
X^T_0=	43
	12
	9

delta=	*78,07*

$$-12{,}99 \le \hat{y}_0 \le 143{,}1$$

$$\hat{y}(x_0) = 25{,}813$$

delta=	82,08

$$-17 \le \hat{y}_0 \le 147{,}2$$

S=	7,972

Спасибо за внимание!