

**ФГБОУ**  
**Финансовый университет при Правительстве РФ**

# ■ **Эконометрика**

■ **Семинар 6**

# **Исследование уравнения множественной линейной регрессии**

## Необходимые формулы

$$\sigma_{\alpha}^2 = 1 - \frac{\sigma_{\alpha}^2}{\sigma(\alpha - \beta)^2} = \sigma_{\alpha}^2 / \sigma_{\alpha}^2$$

$$\sigma_{\alpha}^2 = 1 - \frac{1 - \alpha^2(\alpha - 1)}{\alpha - \alpha - 1}$$

$$\alpha = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \frac{\alpha - \alpha - 1}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\sigma_{\alpha}^2}{\alpha - \alpha - 1}$$

$$\sigma_{\alpha}^2 = \sigma_{\alpha}^2 \sigma_{\alpha}^2 - 1$$

$$\Delta_{\alpha} = \sigma_{\alpha}^2 \sigma_{\alpha}^2$$

**Задача 1.** Исследовать уравнение множественной линейной регрессии по данным, приведенным в таблице

x1	x2	y
10	12	20
15	10	35
20	9	30
25	9	45
40	8	60
37	8	70
43	6	75

## Исходная матрица $X$

	x1	x2
1	10	12
1	15	10
1	20	9
1	25	9
1	40	8
1	37	8
1	43	6

Для нахождения дисперсий коэфф. уравнения регрессии находим обратную матрицу

$$(X^t * X)^{-1} = \begin{vmatrix} 50,37494 & -0,55331 & -3,97572 \\ -0,55331 & 0,006588 & 0,042281 \\ -3,97572 & 0,042281 & 0,3193 \end{vmatrix}$$

$$\hat{\beta}_0 = 21,39 + 1,39\hat{\beta}_1 - 1,26\hat{\beta}_2$$

$$\hat{\beta}_1^2 = 0,93, \quad \hat{\beta}_{kp}(0,05; 4) = 2,78$$

$$\hat{\beta}_{kp}^2 = 0,89 \quad S = 6,942$$

$$\hat{\beta}_1 = 25,4, \quad \hat{\beta}_{kp} = \hat{\beta}_{kp}(0,05; 2; 4) = 6,94$$

$$\hat{\beta}_{\hat{\beta}_0} = 6,942 \times 50,375^{0,5} = 49,3, \quad \Delta_{\hat{\beta}_0} = 49,3 \times 2,78 = 137,$$

$$\hat{\beta}_{\text{набл}0} = \hat{\beta}_0, \quad \hat{\beta}_{\text{набл}0} = 21,39$$

$$\hat{\beta}_{\hat{\beta}_1} = 0,56, \quad \Delta_{\hat{\beta}_1} = 1,566, \quad \hat{\beta}_{\text{набл}1} = \hat{\beta}_1, \quad \hat{\beta}_{\text{набл}1} = 25,4$$

$$\hat{\beta}_{\hat{\beta}_2} = 3,92, \quad \Delta_{\hat{\beta}_2} = 10,9, \quad \hat{\beta}_{\text{набл}2} = -\hat{\beta}_2, \quad \hat{\beta}_{\text{набл}2} = -12,6$$

$$-115,41 \leq \hat{\beta}_0 \leq 158,2$$

$$-0,176 \leq \hat{\beta}_1 \leq 2,952$$

$$-12,156 \leq \hat{\beta}_2 \leq 9,626$$

Проверка, полученных результатов, с помощью программы «Регрессия» Excel.

R-квадрат	0,927063								
Нормированный	0,890595								
Стандартная ошибка	6,941939				tkr=2,78				
Наблюдения	7				Fkr=6,94				
Дисперсионный анализ									
	df	SS	MS	F	значимость F				
Регрессия	2	2450,095	1225,048	25,421	0,0053				
Остаток	4	192,7621	48,19051						
Итого	6	2642,857							
Коэффициент стандартная статистика Значения 95% доверительного интервала									
Y-пересечение	21,38915	49,27062	0,434116	0,6866	-115,41	158,2	-115,4	158,2	
Переменная 1	1,387798	0,563459	2,462997	0,0695	-0,1766	2,952	-0,177	2,952	
Переменная 2	-1,26461	3,922654	-0,32239	0,7633	-12,156	9,626	-12,16	9,626	



**Задача 2.** Исследовать уравнение множественной линейной регрессии по данным, приведенным в таблице ( $n = 11$ )

x1	x2	y
10	12	20
15	10	35
20	9	30
25	9	45
40	8	60
37	8	70
43	6	75
35	4	90
40	4	105
55	5	110
320	75	640

Самостоятельно!

Как должен выглядеть ответ:

$$R^2 =$$

$$R^2_{\text{скорр}} =$$

$$F_{\text{набл}} =$$

$$F_{\text{кр}} =$$

$$t_{\text{кр}} =$$

$$S_{b_0} = S \sqrt{\dots\dots\dots} = \dots,$$

$$\Delta_{b_0} = \dots$$

$$S_{b_1} = S \sqrt{\dots\dots\dots} = \dots,$$

$$\Delta_{b_1} = \dots$$

$$S_{b_2} = S \sqrt{\dots\dots\dots} = \dots,$$

$$\Delta_{b_2} = \dots$$

$$\leq b_0 \leq$$

$$\leq b_1 \leq$$

$$\leq b_2 \leq$$

$$\hat{\mu}_2 = 0,28 + 2,13\hat{\mu}_1 - 0,59\hat{\mu}_2$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_{\hat{\mu}_2}^2}{\sigma_{(\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1)}^2} = 0,994$$

$$R^2 = 1 - \frac{(1 - R^2)(n-1)}{n-2-1} = 0,993$$

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-2-1}{n-1} = 776; F_{kr}(0,05;2;8) = 4,46$$

---


$$F = \frac{\sigma_{\hat{\mu}_2}^2}{n-2-1} = 14,192; F_{kr}(0,05;8) = 2,31$$

$$B = \begin{vmatrix} 0,288418 \\ 2,134305 \\ -0,59419 \end{vmatrix}$$

$$(X_t^* X)^{-1} = \begin{vmatrix} 0,135724 & -0,0003 & -0,0018 \\ -0,00034 & 0,00019 & -0,0008 \\ -0,00183 & -0,0008 & 0,0035 \end{vmatrix}$$

$R^2=$	0,9948
$R^2_{\text{скорр}}=$	0,9935
$F_{\text{набл}}=$	766,96
$F_{kr}=$	4,45897
$t_{kr}=$	2,306004

$$S_{b_j} = S \sqrt{(X^T * X)^{-1}_{jj}}$$

$$S_{b_0} = S \sqrt{0,135} = 5,228,$$

$$S_{b_1} = S \sqrt{0,00019} = 0,196,$$

$$S_{b_2} = S \sqrt{0,0035} = 0,840,$$

$$\Delta_{b_j} = S_{b_j} * t_{kr}$$

Ответ:

$$\hat{y}_0 = 0,28 + 2,13\hat{x}_1 - 0,59\hat{x}_2$$

$$\Delta_{\hat{y}_0} = 12,07$$

$$\Delta_{\hat{x}_1} = 0,45$$

$$\Delta_{\hat{x}_2} = 1,94$$

-11,7682	$\leq b_0 \leq$	12,34503
1,681999	$\leq b_1 \leq$	2,586611
-2,53162	$\leq b_2 \leq$	1,343245

**Задача 3.** Исследовать уравнение множественной линейной регрессии по данным, приведенным в таблице

x1	x2	y
43	6	75
35	4	90
38	4	105
55	5	110
50	3	120
35	1	130
40	2	130
55	3	130
45	1	135
65	2	140

**Самостоятельно!**

$$\hat{X}_1 = 109,96 + 0,89\hat{X}_{1|1} - 11,14\hat{X}_{2|1}$$

$$\hat{X}_1^2 = 0,93$$

$$\hat{X}_1^2 = 0,91$$

$$\hat{X}_1 = 48$$

$$\Delta_{\hat{X}_0} = 25,03$$

$$\Delta_{\hat{X}_1} = 0,49$$

$$\Delta_{\hat{X}_2} = 2,96$$



$$\begin{vmatrix} 109,9623 \\ 0,890698 \\ -11,1366 \end{vmatrix}$$

$$(X^t * X)^{-1} = \begin{vmatrix} 2,859913 & -0,05162 & -0,12263 \\ -0,05162 & 0,001123 & -4,1E-05 \\ -0,12263 & -4,1E-05 & 0,040162 \end{vmatrix}$$

84,88	≤ b0 ≤	135
0,394	≤ b1 ≤	1,388
-14,11	≤ b2 ≤	-8,164

$$S = 6,271989$$

$$Sb0 = 10,60673$$

$$\Delta b0 = 24,459$$

tb0=	10,37
tb1=	4,239
tb2=	-8,86

$$Sb1 = 0,210135$$

$$\Delta b1 = 0,484$$

$$Sb2 = 1,256937$$

$$\Delta b2 = 2,898$$

$$tst = 2,306 \text{ (двусторонняя критич.обл.)}$$

$$R2 = 0,932051$$

$$R2_{\text{испр}} = 0,912636$$

$$F_{\text{кр}} = 4,74 \text{ (правосторонняя проверка: } 0,05; 2; 7)$$

$$F = 48,00892$$

$$\begin{aligned} 84,88 &\leq b0 \leq 135 \\ 0,394 &\leq b1 \leq 1,388 \\ -14,11 &\leq b2 \leq -8,164 \end{aligned}$$

# **Исследование уравнения множественной линейной регрессии (прогнозирование)**

## Необходимые формулы

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

$$\hat{Y}_{\text{прогн}} = X_0 \hat{\beta}$$

Дисперсия для мат. ожидания

$$\text{Cov}(\hat{\beta}) = (X^T X)^{-1} \sigma^2$$

Дисперсия для индивид. значения

$$\text{Cov}(Y_0) = \sigma^2 \left( 1 + X_0^T (X^T X)^{-1} X_0 \right)$$

**Пример.** Дать прогноз для  $x_{1\text{макс}}$  и  $x_{2\text{макс}}$  для уравнения множественной линейной регрессии по данным, приведенным в таблице

x1	x2	y
10	12	20
15	10	35
20	9	30
25	9	45
40	8	60
37	8	70
43	6	75

$$\hat{y} = 21,39 + 1,39x_1 - 1,26x_2$$

	1
$X_0^T = X^T \text{прогн}$	43
	12

$$R^2 = 0,93$$

$$R^2 = 0,89; \quad R = 6,942$$

$$R = 25,4; \quad R^2 = 6,94; \quad R^3 = 2,78$$

$$X_0 = 43; 12 = 21,39 + 1,39 \times 43 - 1,26 \times 12 = 65,89$$

$$X_{\text{прогн}} = X_0 = X_{\text{прогн}} (X^T X)^{-1} X^T_{\text{прогн}} = 6,942 \times 9,167 = 21,01$$

$$7,457 \times X_0 = 124,32$$

$$X_{\text{прогн}} = X_0 + X_{\text{прогн}} (X^T X)^{-1} X^T_{\text{прогн}} = 22,135$$

$$4,352 \times X_0 = 127,43$$

?

$$A=(X^T X)^{-1} \begin{vmatrix} 50,375 & -0,55331 & -3,97572 \\ -0,553 & 0,006588 & 0,042281 \\ -3,976 & 0,042281 & 0,3193 \end{vmatrix}$$

$$X_{\text{прогн}}^T = \begin{vmatrix} 1 \\ 43 \\ 12 \end{vmatrix} \quad \boxed{\boxed{\text{прогн}}} (\boxed{\boxed{\boxed{\text{прогн}}})^{-1} \boxed{\boxed{\text{прогн}}}^T$$

$$X_{\text{прогн}} = \begin{vmatrix} 1 & 43 & 12 \end{vmatrix}$$

$$X_{\text{прогн}} * A = \begin{vmatrix} -21,13 & 0,237354 & 1,673977 \end{vmatrix}$$

$$X_{\text{прогн}} * A * X_{\text{прогн}}^T = 9,1677$$



**Задача 4.** Дать прогноз для  $x_{1\text{макс}}$ ,  $x_{2\text{макс}}$  для уравнения множественной линейной регрессии по данным, приведенным в таблице

x1	x2	y
5	8	6
7	12	8
5	8	5
8	11	10
8	12	10
5	9	7
7	8	5
8	8	6
6	9	6
4	9	5

**Самостоятельно!**



$$X_1 = -3,539 + 0,367X_{10} + 0,854X_{20}$$

$$X_2^2 = 0,812$$

$$X_{10}^2 = 0,758$$

$$X_{20} = 15,08$$

$$X_{10} = 9,644$$

$X_0^T =$	1
	8
	12

$F_{кр} =$	4,74
$t_{кр} =$	2,36

$$X_{10} = 0,95 \times (0,397^{0,5}) = 0,598$$

$$8,231 \times X_{10} = 11,06$$

$$delta = 1,414$$

$S =$	0,951
-------	-------

$$X_{10} = 0,95 \times (1 + 0,397)^{0,5} = 1,123$$

$$6,992 \times X_{10} = 12,3 \blacktriangleleft$$

$$delta = 2,652$$

**Задача 5.** Дать прогноз для  $x_{1\text{макс}}$ ,  $x_{2\text{макс}}$  и  $x_{3\text{макс}}$  для уравнения множественной линейной регрессии по данным, приведенным в таблице

x1	x2	x3	y
10	12	8	20
15	10	5	35
20	9	4	30
25	9	3	45
40	8	7	60
37	8	6	70
43	6	9	75

Самостоятельно!

$$\hat{x}_1 = 23,47 + 1,333x_{1\text{н}} - 1,541x_{2\text{н}} + 0,308x_{3\text{н}}$$

$$x_2^2 = 0,928$$

$$x_2^2 = 0,856$$

$$x_2 = 12,86$$

$$x_0 = 65,08$$

$$x_0^2 = 24,54$$

$$\text{delta} = 78,07$$

$$- 12,99 \times x_0 \times 143,1$$

$$x_0^2 = 25,813$$

$$\text{delta} = 82,08$$

$$- 17 \times x_0 \times 147,2 \blacktriangleleft$$

	1
$x_0^T =$	43
	12
	9

S=	7,972
----	-------

Гкр=	9,28
ткр=	3,18

Спасибо за внимание!