Лекция № 2
ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

Учебные вопросы

1. **Функция, способы задания функции.**
2. **Основные характеристики функции.**
3. **Сложные и обратные функции.**

.

В1. Функция, способы задания функции

Рассмотрим два множества X и Y с элементами, соответственно, x и y.

Определение 1. Если каждому элементу x из множества X по некоторому правилу поставлен в соответствие **единственный** элемент y из множества Y, то говорят, что задана функция $y=f(x)$, где x – аргумент (независимая переменная), y – значение функции (зависимая переменная), буква f обозначает правило, по которому получается значение y, отвечающее заданному x.

Если X и Y – числовые множества, то отображение множества X на множество Y называют **числовой функцией.**

Определение 2. Совокупность значений независимой переменной x, для которых определяются значения функции y, называется областью определения функции (или областью существования функции) и обозначается $\boldsymbol{D}$.

Определение 3. Совокупность значений y, соответствующих всем значениям $x \in D$, называется областью изменения (значений) функции и обозначается $\boldsymbol{E}$.

Пример функции. Площадь S круга, есть функция его радиуса r, выражаемая формулой $S = \pi r^2$

$$S = S(r).$$

Определение 4. Множество тех значений аргумента, при которых закон соответствия *f* имеет смысл, то есть функция имеет определенное, конечное значение, называется **естественной областью определения функции**.

Пример 1. Записать области определения функций $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ и $y = x + 1$.

Решение. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$.

Пример 2.

Пример 2. Построить графики функций, если известны области определения.

$y = x^2, \quad X = \{1,2,3,4\},$

$y = x^2, \quad X = [0, +\infty),$

$y = x^2, \quad X = (-\infty, +\infty)$

Это разные функции, так как области определения различны.

Графики фУНКЦИЙ

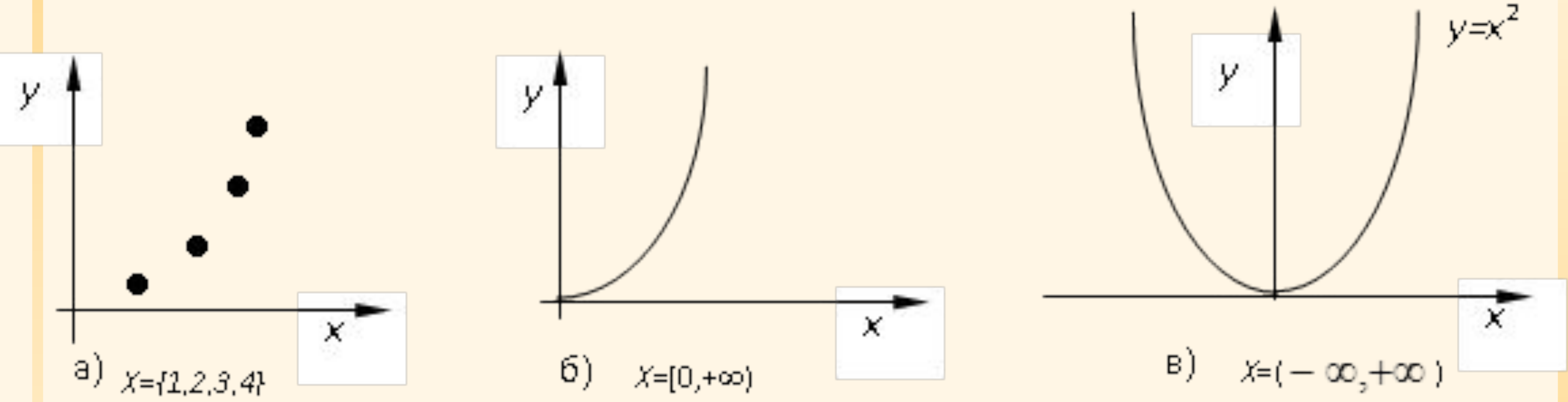


Рисунок 1

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Функция может быть задана различными способами:

- аналитически – в виде формулы (явно, неявно, параметрически),
- табличным способом,
- графически,
- с помощью словесной формулировки,
- программно.

4. Словесный (описательный) способ

В математике функция может быть задана словесно. Такова, например, функция Дирихле, которая определяется следующим образом:

$$D(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x - \text{рациональное число.} \end{cases}$$

2. Основные характеристики функции.

Определение 4. *Функция* f(*x*) *называется* ***четной (нечетной)****, если она определена на множестве, симметричном относительно нулевой точки и обладает на нем свойством*

$$\boldsymbol{f(-x) = f(x) \quad (\, f(-x) = -\, f(x) \,).}$$

График четной функции симметричен относительно оси *Оу*, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

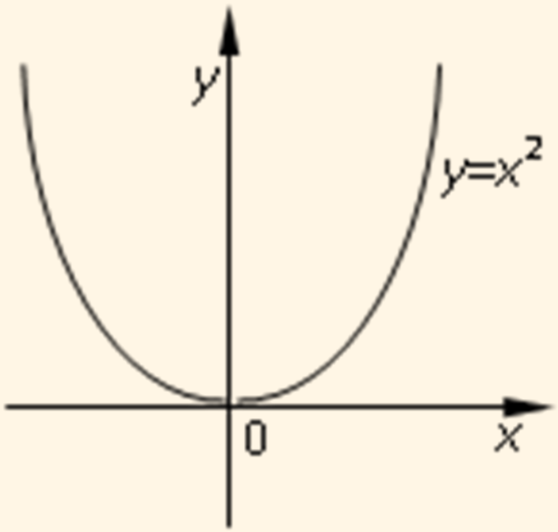


Рисунок 5

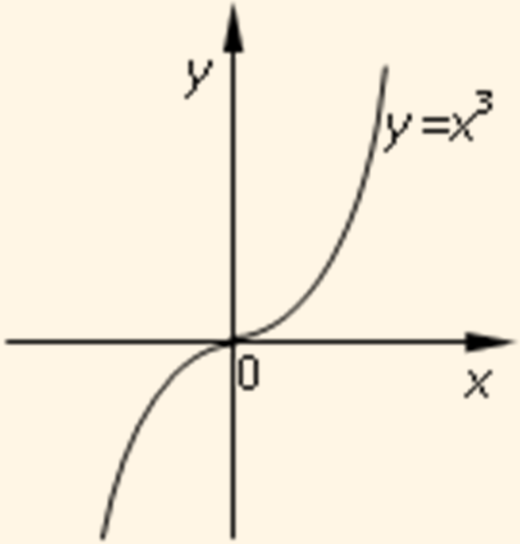


Рисунок 6

Определение 5. *Функция* $f(x)$, *определенная на всей вещественной оси, называется* ***периодической*** *с периодом* $T > 0$, *если*

$$f(x) = f(x+T) = f(x-T), \text{ для } \forall x \in D.$$

Функции $\sin x$, $\cos x$, являются периодическими с периодом 2π, а функции $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$ имеют период π.

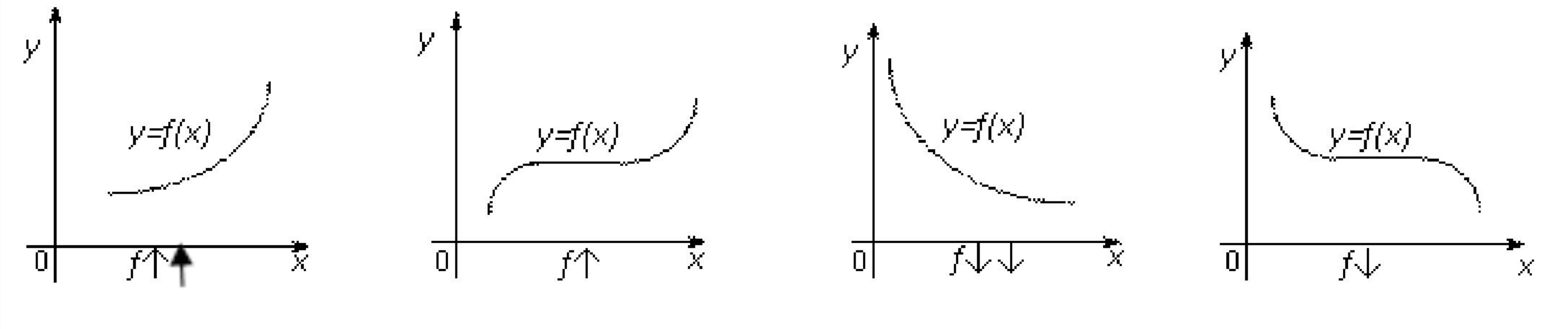
Определение 6. *Функция* $y=f(x)$ *называется* ***возрастающей (неубывающей)*** *на множестве X, если для любых двух значений* x_1 *и* x_2 *выполняется условие*

$f(x_2)>f(x_1)$ ($f(x_2) \geq f(x_1)$) , *если* $x_1<x_2$ *и обозначают* $f\uparrow\uparrow(f\uparrow)$.

Определение 7. *Функция* $y=f(x)$ *называется* ***убывающей (невозрастающей)*** *на множестве X, если выполняется условие*

$f(x_2)<f(x_1)$ ($f(x_2) \le f(x_1)$), *если* $x_2>x_1$ *и обозначают* $f{\downarrow\downarrow}$ ($f{\downarrow}$).

Определение 8. *Функция $y=f(x)$ называется* ***(строго) монотонной*** *на множестве X, если она является (убывающей или возрастающей) неубывающей или невозрастающей на множестве X.*


y
y=f(x)
0
f↑
x
y
y=f(x)
0
f↑
x
y
y=f(x)
0
f↓ ↓
x
y
y=f(x)
0
f↓
x

Определение 9. *Функция y=f(x) называется* ***ограниченной*** *на множестве X,* $\exists M>0$ такое, что $\forall x \in X$

$$\left| f\left(x\right) \right| < M.$$

3. Сложные и обратные функции.

СЛОЖНЫЕ ФУНКЦИИ

В математике аналогом сложных систем, состоящих из элементов, выполняющих сравнительно простые действия, является композиция функций (сложная функция).

.

Композиция функций

Понятие композиции функций заключается в том, что вместо аргумента одной функции подставляется другая функция, зависящая от другого аргумента.

Например, $y = \sin x$, $z = \lg y$, то есть композиция функций $z = \lg(\sin x)$.

Обратные функции

Определение 10. *Пусть Y- множество значений функции y=f(x), заданной в области X. Если* $\forall y \in Y$, *соответствует единственное значение* $x \in X$, *такое, что f(x)=y, то определенная таким образом функция x=ϕ(y) называется* ***обратной*** *по отношению к функции y=f(x).*

Определение 11. *Пусть y=f(z) и z=ϕ(x), определены соответственно на множествах Z и X. Если значениями функции z=ϕ(x) является множество Z, то данными функциями z=ϕ(x) и y=f(z) каждому значению x ставится в соответствие единственное значение y. Полученную таким образом функцию называют* ***сложной функцией (композицией или суперпозицией функций****)* *и записывают в виде y=f(ϕ(x)). Функция z=ϕ(x)- называется промежуточным аргументом.*

Определение 12. *Пусть Y- множество значений функции y=f(x), заданной в области X. Если* $\forall y \in Y$, *соответствует единственное значение* $x \in X$, *такое, что f(x)=y, то определенная таким образом функция x=ϕ(y) называется* ***обратной*** *по отношению к функции y=f(x).*

Очевидно, что графики функций $y=f(x)$ и $x=\phi(y)$, совпадают.

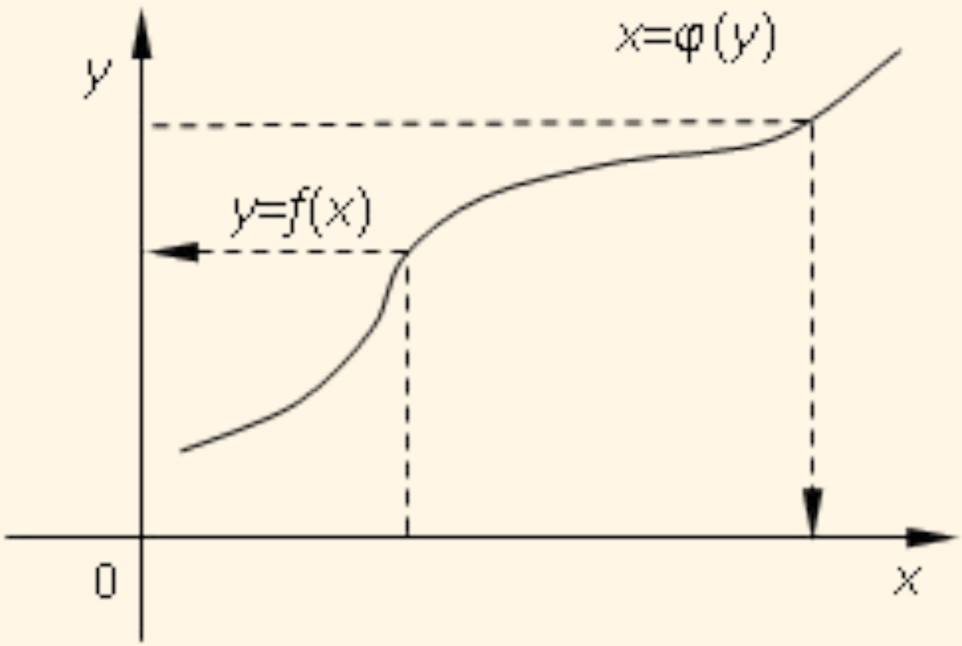
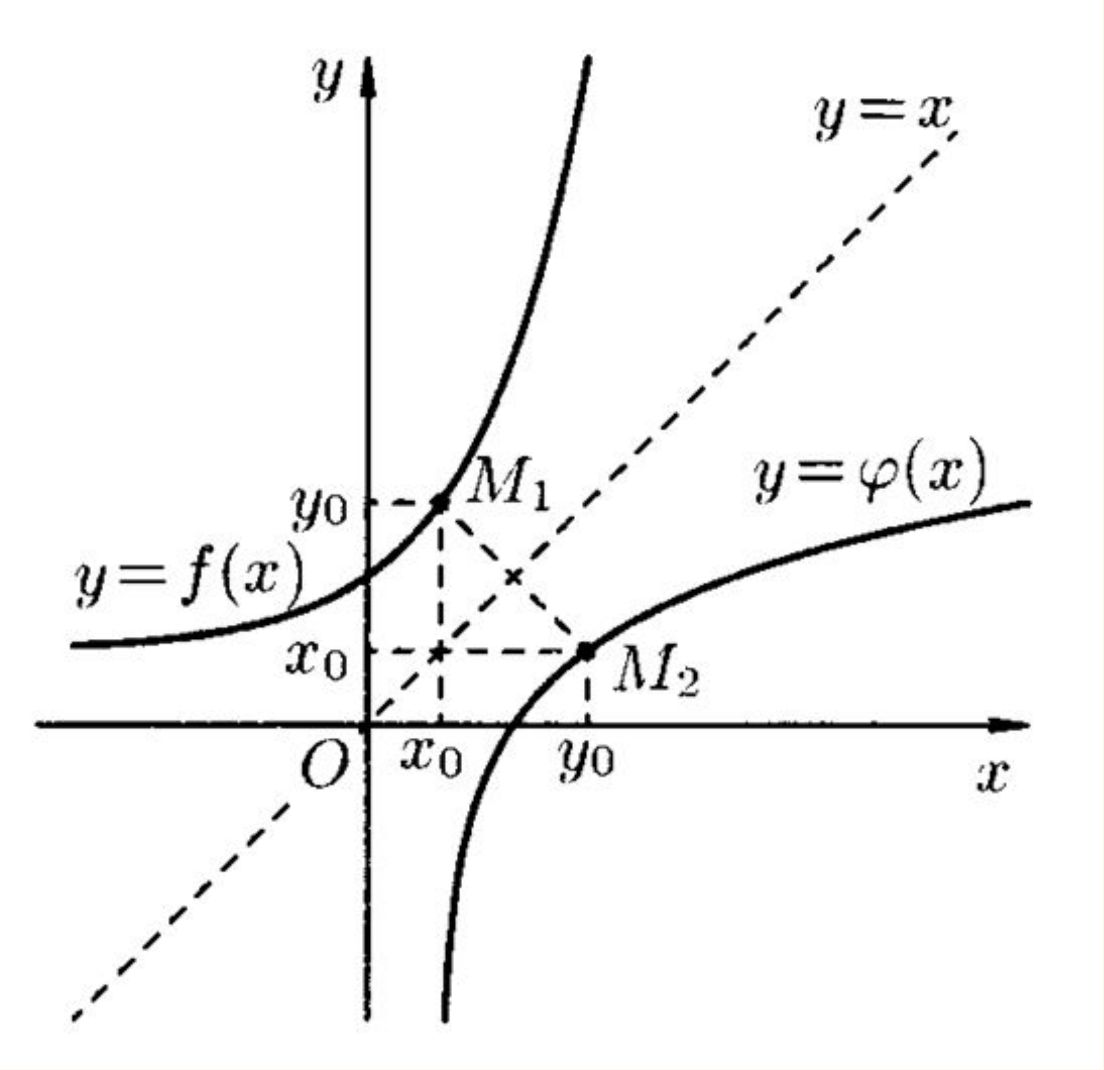


Рисунок 7



y
$y=x$
M_1
$y=\varphi(x)$
y_0
$y=f(x)$
x_0
M_2
O
x_0
y_0
x

Теорема 1 (существование обратной функции).

Если функция $y=f(x)$ **строго монотонна** на множестве X, то в соответствующем промежутке Y значений этой функции существует однозначная обратная функция $x=\varphi(y)$, также строго монотонная.

Литература

1. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, Е. В. Шикин, В. И. Заляпин Вся высшая математика. Том 1. Учебник. (линейная алгебра и аналитическая геометрия, введение в математический анализ). (рекомендовано Минобразования)- М.: Едиториал УРСС, 2012, стр.174 – 176.