

# Лекция № 2

## ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

### Учебные вопросы

1. **Функция, способы задания функции.**
2. **Основные характеристики функции.**
3. **Сложные и обратные функции.**

.

## В1. Функция, способы задания функции

Рассмотрим два множества  $X$  и  $Y$  с элементами, соответственно,  $x$  и  $y$ .

**Определение 1.** Если каждому элементу  $x$  из множества  $X$  по некоторому правилу поставлен в соответствие **единственный** элемент  $y$  из множества  $Y$ , то говорят, что задана функция  $y=f(x)$ , где  $x$  – аргумент (независимая переменная),  $y$  – значение функции (зависимая переменная), буква  $f$  обозначает правило, по которому получается значение  $y$ , отвечающее заданному  $x$ .

Если  $X$  и  $Y$  – числовые множества, то отображение множества  $X$  на множество  $Y$  называют **числовой функцией**.

**Определение 2.** Совокупность значений независимой переменной  $x$ , для которых определяются значения функции  $y$ , называется областью определения функции (или областью существования функции) и обозначается  **$D$** .

**Определение 3.** Совокупность значений  $y$ , соответствующих всем значениям  $x \in D$ , называется областью изменения (значений) функции и обозначается  $E$ .

**Пример функции.** Площадь  $S$  круга, есть функция его радиуса  $r$ , выражаемая

формулой  $S = \pi r^2$

$$S = S(r).$$

**Определение 4.** Множество тех значений аргумента, при которых закон соответствия  $f$  имеет смысл, то есть функция имеет определенное, конечное значение, называется **естественной областью определения функции**.

**Пример 1.** Записать области определения функций  $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  и  $y = x + 1$ .

**Решение.**  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty), \quad (-\infty, +\infty)$ .

## Пример 2.

**Пример 2.** Построить графики функций, если известны области определения.

$$y = x^2, \quad X = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$y = x^2, \quad X = [0, +\infty)$$

$$y = x^2, \quad X = (-\infty, +\infty)$$

Это разные функции, так как области определения различны.

# Графики функций

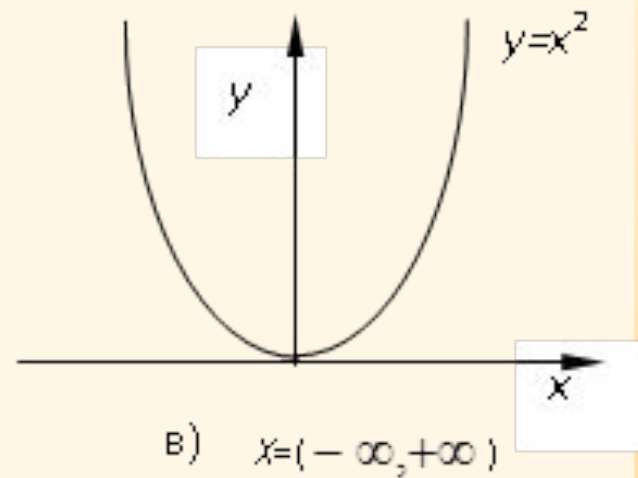
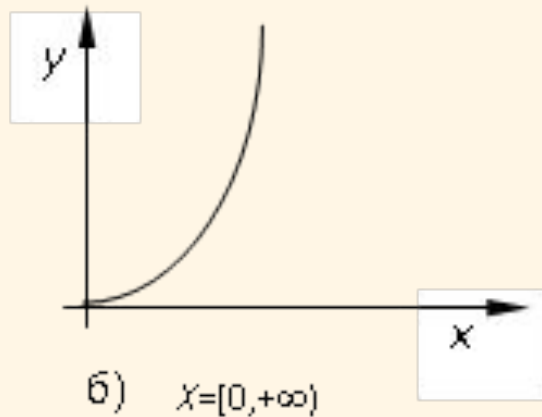
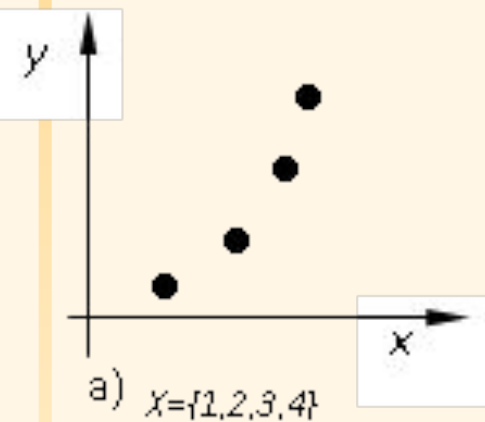


Рисунок 1

# СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Функция может быть задана различными способами:

- аналитически – в виде формулы (явно, неявно, параметрически),
- табличным способом,
- графически,
- с помощью словесной формулировки,
- программно.



## 4. Словесный (описательный) способ

В математике функция может быть задана словесно. Такова, например, функция Дирихле, которая определяется следующим образом:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число.} \end{cases}$$

## 2. Основные характеристики функции.

**Определение 4.** Функция  $f(x)$  называется **четной (нечетной)**, если она определена на множестве, симметричном относительно нулевой точки и обладает на нем свойством

$$f(-x) = f(x) \quad ( f(-x) = -f(x) ).$$

График четной функции симметричен относительно оси  $Oy$ , а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

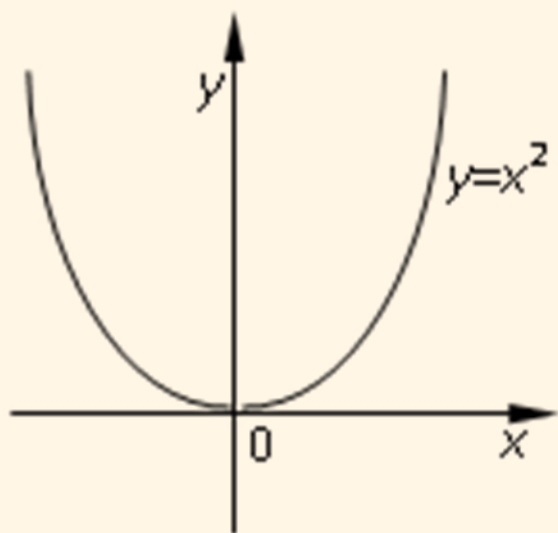


Рисунок 5

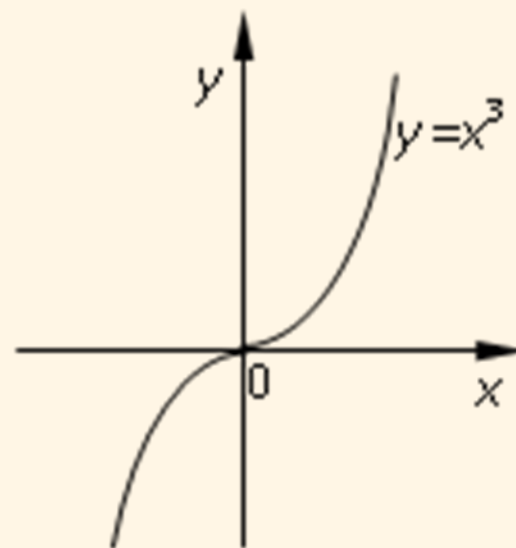


Рисунок 6

**Определение 5.** *Функция  $f(x)$ , определенная на всей вещественной оси, называется **периодической** с периодом  $T > 0$ , если*

$$f(x) = f(x+T) = f(x-T), \text{ для } \forall x \in D.$$

Функции  $\sin x$ ,  $\cos x$ , являются периодическими с периодом  $2\pi$ , а функции  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$  имеют период  $\pi$ .

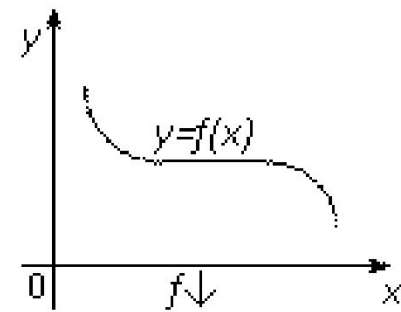
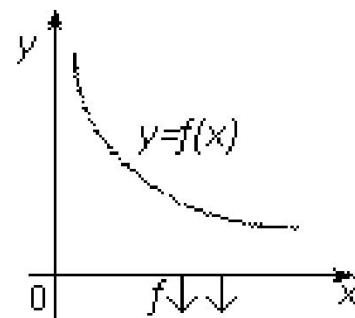
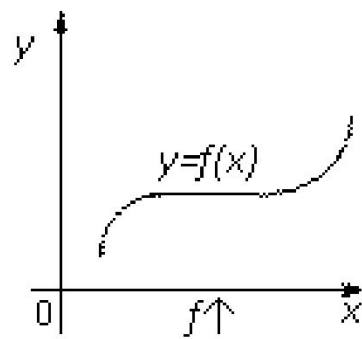
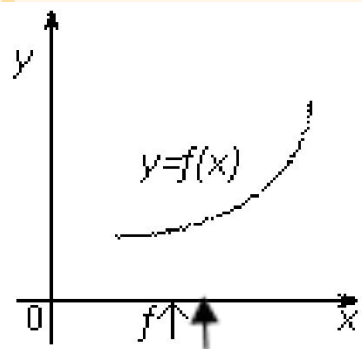
**Определение 6.** Функция  $y=f(x)$  называется **возрастающей (неубывающей)** на множестве  $X$ , если для любых двух значений  $x_1$  и  $x_2$  выполняется условие

$f(x_2) \geq f(x_1)$  ( $f(x_2) > f(x_1)$ ), если  $x_1 < x_2$  и обозначают  $f \uparrow \uparrow (f \uparrow)$ .

**Определение 7.** Функция  $y=f(x)$   
называется **убывающей**  
**(невозрастающей)** на множестве  $X$ , если  
выполняется условие

$f(x_2) < f(x_1)$  (  $f(x_2) \leq f(x_1)$  ), если  $x_2 > x_1$  и  
обозначают  $f \downarrow \downarrow (f \downarrow)$ .

**Определение 8.** *Функция  $y=f(x)$  называется (строго) монотонной на множестве  $X$ , если она является (убывающей или возрастающей) неубывающей или невозрастающей на множестве  $X$ .*





**Определение 9.** Функция  $y=f(x)$   
называется **ограниченной** на множестве  
 $X$ ,  $\exists M>0$  такое, что  $\forall x \in X$

$$|f(x)| < M.$$

## 3. Сложные и обратные функции.

### СЛОЖНЫЕ ФУНКЦИИ

В математике аналогом сложных систем, состоящих из элементов, выполняющих сравнительно простые действия, является композиция функций (сложная функция).

.

# Композиция функций

Понятие композиции функций заключается в том, что вместо аргумента одной функции подставляется другая функция, зависящая от другого аргумента.

Например,  $y = \sin x$ ,  $z = \lg y$ , то есть композиция функций  $z = \lg(\sin x)$ .

## Обратные функции

**Определение 10.** Пусть  $Y$ - множество значений функции  $y=f(x)$ , заданной в области  $X$ . Если  $\forall y \in Y$ , соответствует единственное значение  $x \in X$ , такое, что  $f(x)=y$ , то определенная таким образом функция  $x=\phi(y)$  называется **обратной** по отношению к функции  $y=f(x)$ .

**Определение 11.** Пусть  $y=f(z)$  и  $z=\phi(x)$ , определены соответственно на множествах  $Z$  и  $X$ . Если значениями функции  $z=\phi(x)$  является множество  $Z$ , то данными функциями  $z=\phi(x)$  и  $y=f(z)$  каждому значению  $x$  ставится в соответствие единственное значение  $y$ . Полученную таким образом функцию называют **сложной функцией (композицией или суперпозицией функций)** и записывают в виде  $y=f(\phi(x))$ . Функция  $z=\phi(x)$  называется промежуточным аргументом.

**Определение 12.** Пусть  $Y$ - множество значений функции  $y=f(x)$ , заданной в области  $X$ . Если  $\forall y \in Y$ , соответствует единственное значение  $x \in X$ , такое, что  $f(x)=y$ , то определенная таким образом функция  $x=\phi(y)$  называется **обратной** по отношению к функции  $y=f(x)$ .

Очевидно, что графики функций  $y=f(x)$  и  $x=\phi(y)$ , совпадают.

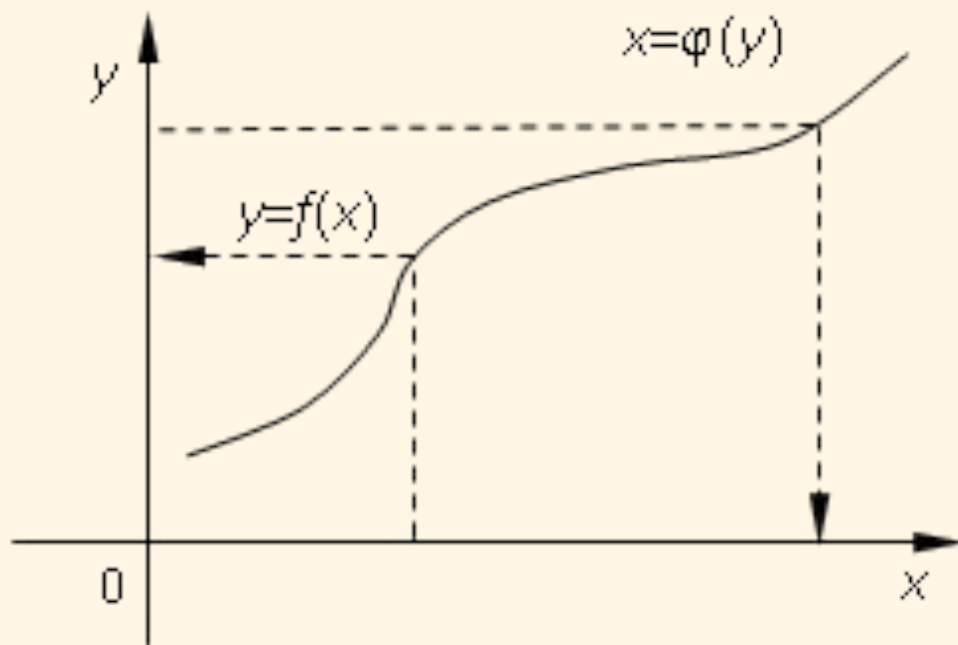
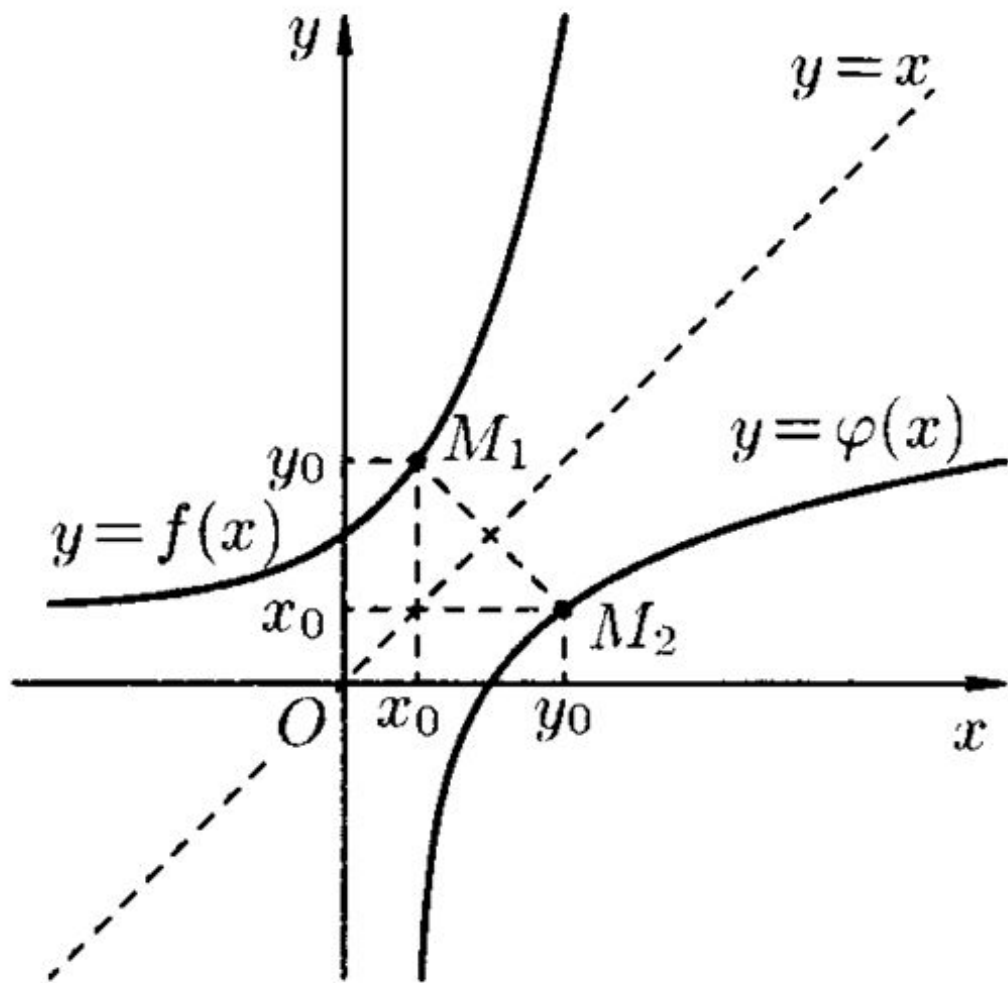


Рисунок 7





## Теорема 1 (существование обратной функции).

Если функция  $y=f(x)$  **строго монотонна** на множестве  $X$ , то в соответствующем промежутке  $Y$  значений этой функции существует однозначная обратная функция  $x=\varphi(y)$ , также строго монотонная.

## Литература

1. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, Е. В. Шикин, В. И. Заляпин  
Вся высшая математика. Том 1. Учебник.  
(линейная алгебра и аналитическая  
геометрия, введение в математический  
анализ). (рекомендовано Минобразования)-  
М.: Едиториал УРСС, 2012, стр.174 – 176.