«ЭЛЕКТРОТЕХНИКА» И «ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ»

Кафедра ФМПК, ФТИ УрФУ

6 Переходные процессы

6.1 Установившиеся и переходные процессы. Законы коммутации

Установившейся режим

Установившимся режимом *называется такой режим, при котором токи и напряжения в цепи являются постоянными величинами или периодическими функциями времени.*

Режим покоя, когда все токи и напряжения в цепи равны нулю также считается установившимся.

В установившемся режиме каждый ток или напряжение имеет постоянную величину (режим постоянного тока) или постоянную амплитуду, частоту и начальную фазу (режим гармонического тока).

Переходный процесс

Переходным процессом *называется режим, при котором токи и напряжения в цепи изменяются от одних установившихся значений до других.*

Во время переходного процесса токи и напряжения в цепи не могут быть постоянными или периодическими.

Задача анализа *переходных процессов заключается в определении переходных токов и напряжений как функций времени.*

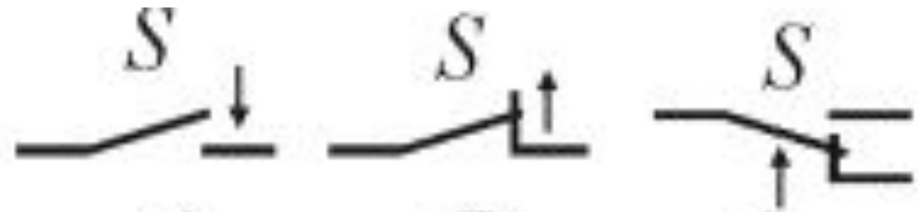
Причины переходных процессов

- ✔ При изменении действующих в электрической цепи задающих функций источников питания
- ✔ При изменении параметров самой цепи
  - – включение / отключение источника
  - – короткое замыкание участка цепи

Коммутация *– процесс скачкообразного (мгновенного) изменения какого-либо параметра электрической цепи*

Идеальный ключ

- Коммутация происходит с помощью идеального ключевого элемента

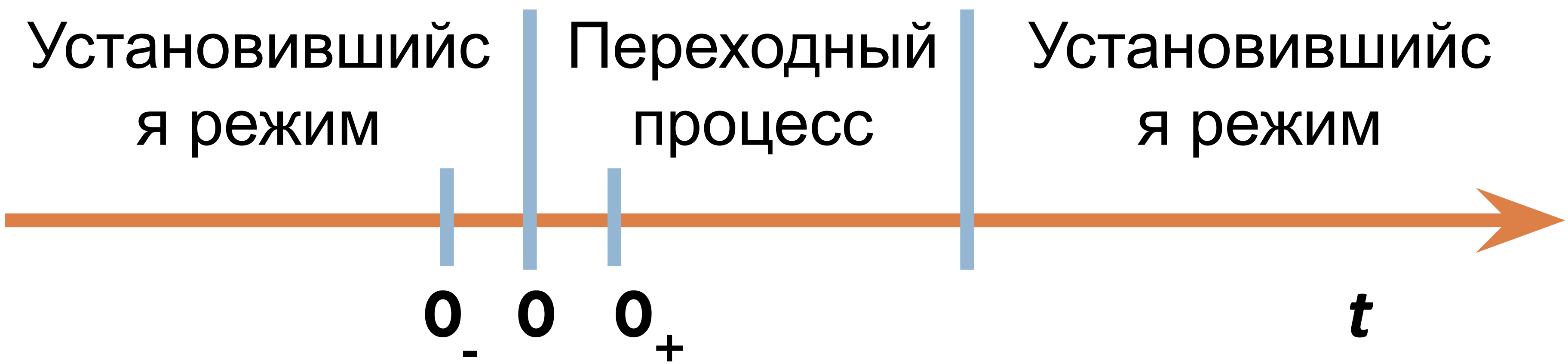


- Типы ключей
  - замыкающий
  - размыкающий
  - переключающий

- Свойства идеального ключа
  - в замкнутом состоянии $R = 0$ (идеальный проводник)
  - в разомкнутом состоянии $R = \propto$ (разрыв цепи)
  - переходит из одного состояния в другое мгновенно

Моменты коммутации

- ✔ $t = 0$ – момент коммутации
- ✔ $t = 0_-$ – последний момент перед коммутацией
- ✔ $t = 0_+$ – первый момент после коммутации



Переходный процесс занимает некоторое время (теоретически бесконечно большое)

Энергия в электрической цепи

- Установившийся режим характеризуется определенным запасом энергии магнитного и электрического полей

$$W = \sum_k \frac{L_k i_k^2(t)}{2} + \sum_l \frac{C_l u_l^2(t)}{2}$$

i_k – мгновенный ток в катушке L_k
u_l – мгновенное напряжение на конденсаторе C_l
k и l – индексы суммирования

- В переходном режиме происходит изменение запасенной в цепи энергии и это изменение не может происходить скачкообразно. Для мгновенного изменение энергии требуется бесконечно большая мощность $P = dW/dt$ в электрической цепи, что лишено физического смысла

Законы коммутации

- ✔ Ток в любом индуктивном элементе является непрерывной функцией времени и не может изменяться скачком (для момента коммутации $t = 0$)

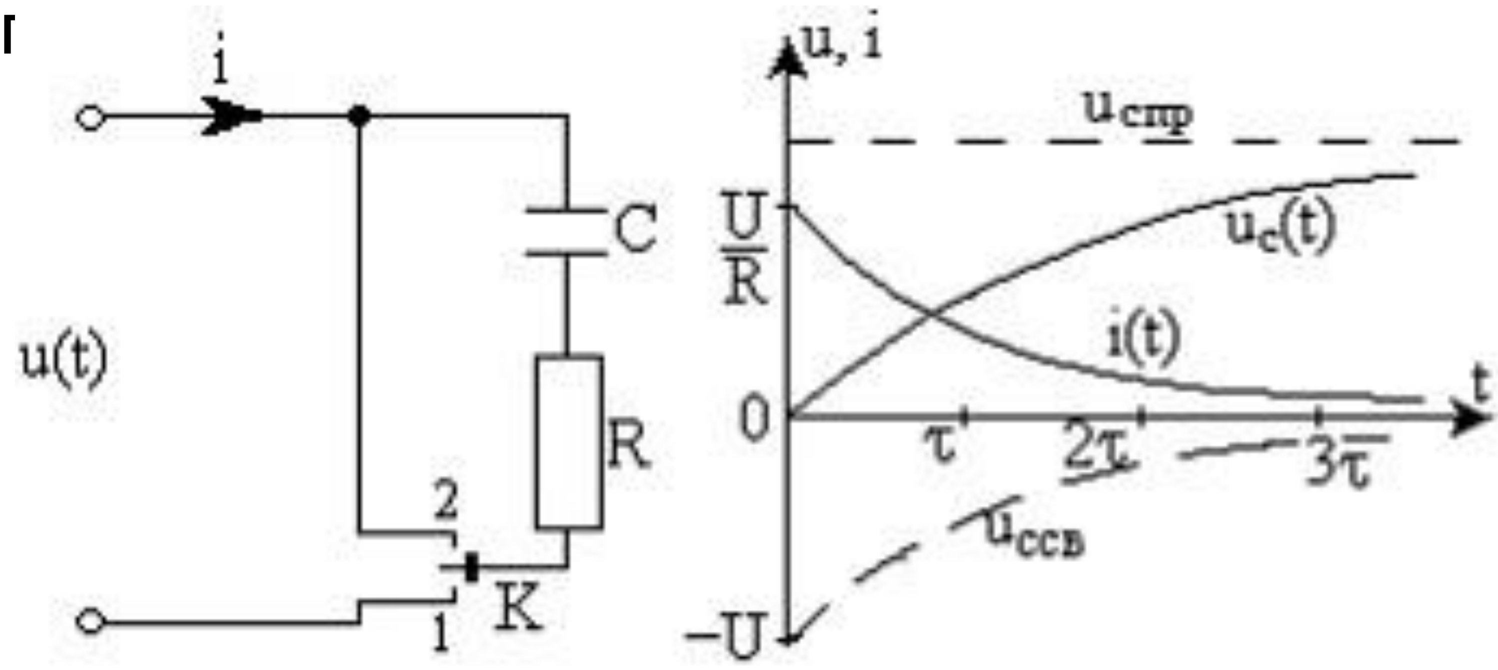
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0)$$

- ✔ Напряжение на любом емкостном элементе является непрерывной функцией времени и не может изменяться скачком (для момента коммутации $t = 0$)

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0)$$

Выводы

- ✔ i_L и u_C в начальный момент после коммутации имеют те же значения, что и перед коммутацией и затем плавно изменяются
- ✔ i_R и u_R, а также i_C и u_L могут изменяться ми



6 Переходные процессы

6.2 Общий подход к анализу переходных процессов

Анализ переходных процессов

- Задача заключается в определении мгновенных значений токов и напряжений в любой момент после коммутации
- Задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$a_\nu \frac{d^\nu y}{dt^\nu} + a_{\nu-1} \frac{d^{\nu-1} y}{dt^{\nu-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

$f(t)$ – воздействие на электрическую цепь

$y(t)$ – отклик на воздействие

Решение задачи

- ✔ Определение начальных условий

$$y(0), y'(0), \ldots, y^{\nu-1}(0)$$

из законов коммутации

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0) \qquad u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0)$$

- ✔ Решение дифференциального уравнения
  - – классическим методом
  - – операторным методом

6 Переходные процессы

6.2 Общий подход к анализу переходных процессов

6.2.1 Классический метод анализа

Суть метода

- Метод основан на составлении системы дифференциальных и алгебраических уравнений с использованием уравнений для элементов и законов Кирхгофа для мгновенных токов и напряжений в цепи

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}, u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}, u_R(t) = Ri_R(t), \sum_k \pm i_k(t) = 0, \sum_l \pm u_l(t) = 0$$

- Для определения интересующей реакции систему исходных уравнений путем исключения остальных переменных приводят к одному линейному дифференциальному уравнению ν-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_\nu \frac{d^\nu y}{dt^\nu} + a_{\nu-1}\frac{d^{\nu-1} y}{dt^{\nu-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

Вид решения ЛДУ

$$y(t) = y_{СВ}(t) + y_{ПР}(t)$$

$y_{СВ}(t)$ – **свободная или собственная составляющая** – это общее решение соответствующего однородного ДУ цепи, которое получается при $f(t) = 0$ (в цепи отсутствует внешнее воздействие, т.е. источник)

$y_{ПР}(t)$ – **принужденная или вынужденная составляющая** – это частное решение ДУ цепи, которое находится при анализе установившегося режима в цепи после коммутации и определяется воздействием $f(t)$

Свободная составляющая

- ✔ определяется свойствами самой цепи
- ✔ существует во время переходного процесса
- ✔ $y_{CB}(t) \to 0$ при $t \to \infty \Rightarrow y(t) \to y_{ПР}(t)$

Характеристическое уравнение

$$a_\nu p^\nu + a_{\nu-1} p^{\nu-1} + \ldots + a_1 p^1 + a_0 = 0$$

$$y_{CB_K}(t) = A_K e^{P_K t}$$

P_K – корни уравнения

A_K – постоянные интегрирования

$$y_{CB}(t) = \left(A_1 + A_2 t + \ldots + A_n t^{n-1}\right) e^{P_K t}$$

для корней кратности n

Принужденная составляющая

- вид частного решения определяется видом воздействия
  - если $f(t) = const$, то $y_{ПР}(t) = const$
  - если $f(t) = \mathrm{f}(A_{in}, \phi_{in}, \sin(\omega t))$, то $y_{ПР}(t) = \mathrm{f}(A_{out}, \phi_{out}, \sin(\omega t))$
- обусловлена воздействием источников в цепи $y(t) \longrightarrow y_{ПР}(t)$ при $t \longrightarrow \infty$
- принужденная составляющая называется установившейся $y_{ПР}(t) = y_{УСТ}(t)$
  - установившееся значение (в случае постоянной вынуждающей силы)
  - установившаяся функция (в случае гармонической вынуждающей силы)

Этапы расчета

1. **Анализ цепи до коммутации**
   Определяются токи через индуктивности и напряжения на емкостях в последний момент перед коммутацией.
2. **Определение независимых начальных условий**
   В соответствии с законами коммутации определяются токи через индуктивности и напряжения на ёмкостях в первый момент после коммутации.
3. **Составление ДУ цепи после коммутации**
   Составляется система уравнений электрического равновесия для цепи после коммутации. Методом последовательного исключения неизвестных система сводится к одному дифференциальному уравнению цепи.

Этапы расчета (продолжение)

4. **Определение свободной составляющей**
   По дифференциальному уравнению цепи определяется характеристическое уравнение, находятся корни этого уравнения и с точностью до постоянных интегрирования определяется свободная составляющая
5. **Определение принужденной составляющей**
   Анализируется цепь для установившегося режима после коммутации
6. **Запись общего вида решения ДУ**
7. **Определение постоянных интегрирования**
   Использование начальных условий
8. **Нахождение решения ДУ**
   Подстановка постоянных интегрирования

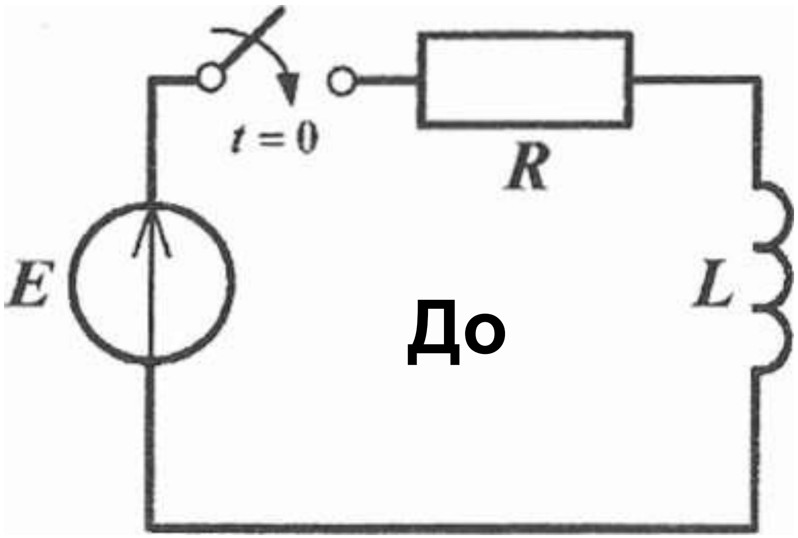
6 Переходные процессы

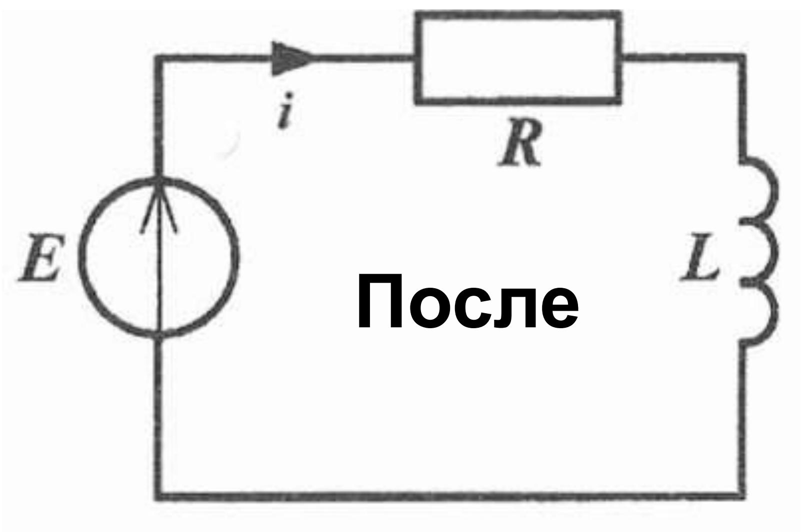
6.2 Общий подход к анализу переходных процессов

6.2.1 Классический метод анализа

6.2.2 Переходные процессы в RL-цепи

Подключение постоянной ЭДС





1. **До коммутации** $i_L(0_-) = 0$
2. **Начальные условия** $i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0) = 0$
3. **После коммутации**

   из II закона Кирхгофа $U_L + U_R = E; \;\; L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$

Анализ RL-цепи (продолжение)

4. Определение свободной составляющей

Характеристическое уравнение $LP + R = 0$

Корень $P = -R/L$

$$i_{CB}(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\tau = \dfrac{L}{R}$ – постоянная времени ЭЦ

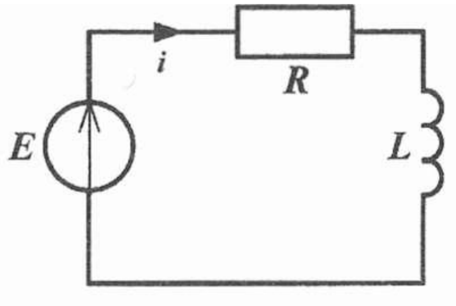
Постоянная времени *– это время, в течение которого свободная составляющая процесса уменьшается в e≈2,72 раз по сравнению с начальным значением.*

Определяет скорость протекания переходного процесса: чем меньше постоянная времени, тем быстрее заканчивается переходный процесс.

Анализ RL-цепи (продолжение)

5. **Определение принужденной составляющей**

   Анализ режима по постоянному току для установившегося режима после



$$i_{ПР}(t) = \frac{E}{R}$$

6. **Запись общего вида решения ДУ**

$$i(t) = i_{СВ}(t) + i_{ПР}(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

7. **Определение постоянных интегрирования**

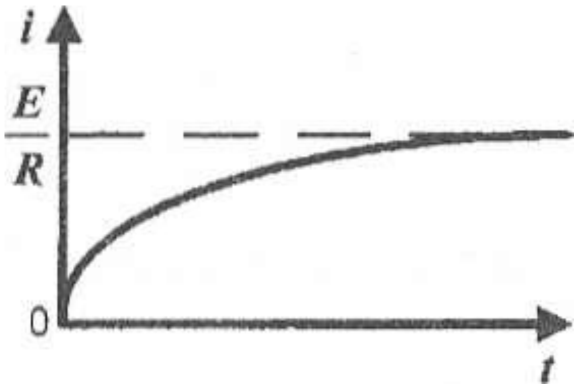
$$i(0) = 0 \qquad 0 = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{0}{\tau}} \Rightarrow A = -\frac{E}{R}$$

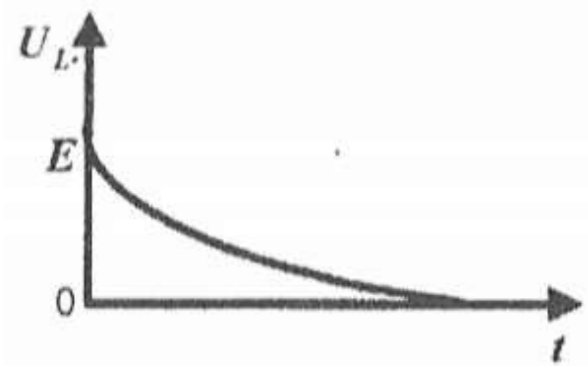
Анализ RL-цепи (продолжение)

8. Нахождение решения ДУ

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad U_L(t) = L\frac{di}{dt} = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

При $t \to \infty$, $i_{CB} \to 0$ и $i \to i_{ПР}$

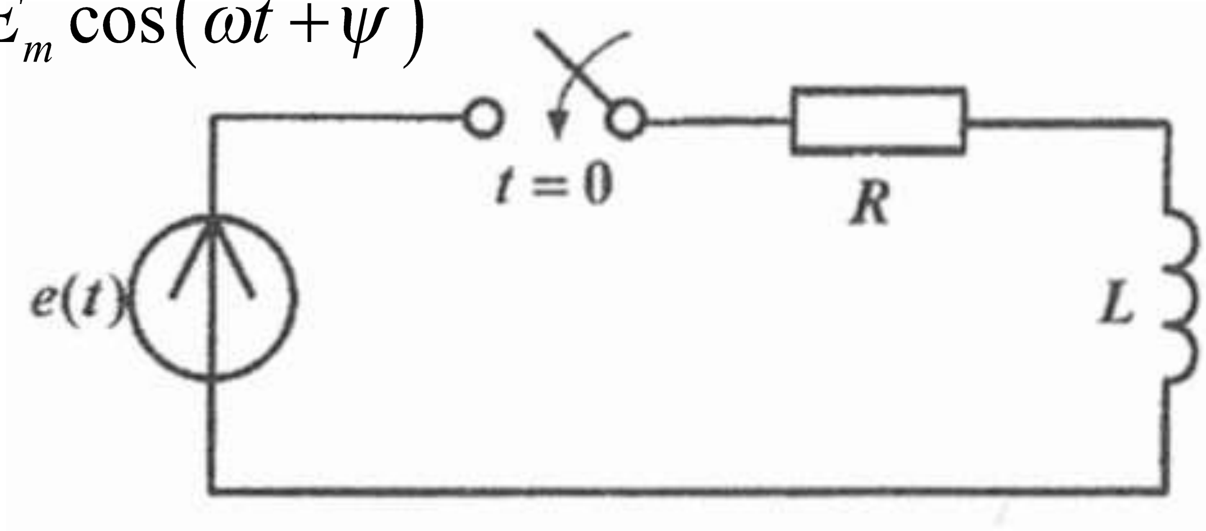




Напряжение на индуктивности в отличие от тока может изменяться скачком

Подключение гармонической ЭДС

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi)$$



1. **До коммутации** $i_L(0_-) = 0$
2. **Начальные условия** $i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0) = 0$
3. **После коммутации**

   из II закона Кирхгофа $U_L + U_R = e(t);\ \ L\dfrac{di}{dt} + Ri = e(t)$

Анализ RL-цепи (продолжение)

4. Определение свободной составляющей

Характеристическое уравнение $LP + R = 0$

Корень $P = -R/L$

$$i_{CB}(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\tau = \dfrac{L}{R}$ – постоянная времени ЭЦ

5. Определение принужденной составляющей

Используется метод комплексных амплитуд

$$i_{ПР}(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t + \psi - \varphi)$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Анализ RL-цепи (продолжение)

6. **Запись общего вида решения ДУ**

$$i(t) = i_{CB}(t) + i_{\Pi P}(t) =$$

$$= \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

7. **Определение постоянных интегрирования**

$$i(0) = 0 \qquad 0 = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\psi - \varphi) + A$$

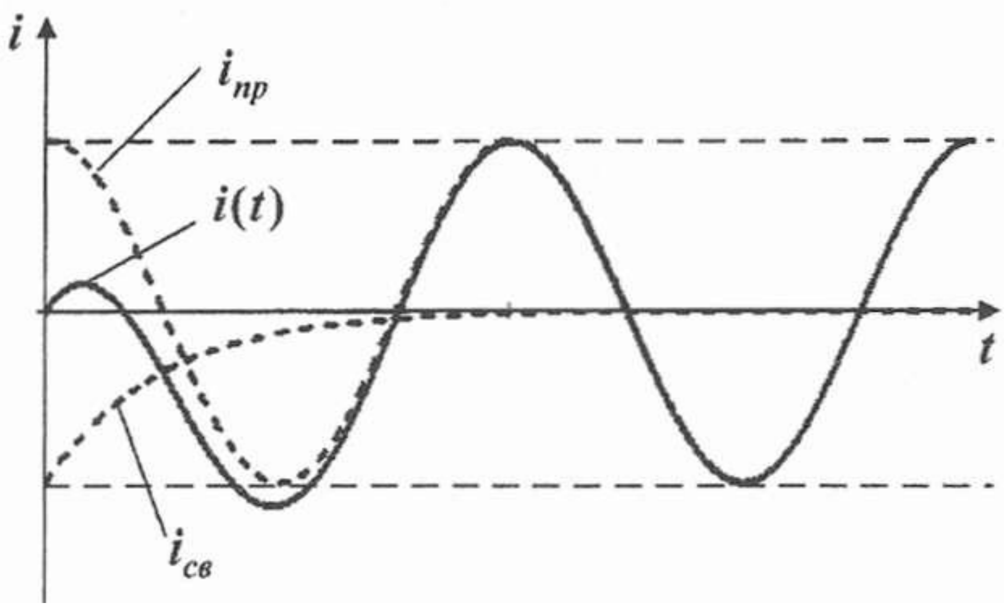
$$A = -\frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\psi - \varphi)$$

Анализ RL-цепи (продолжение)

8. Нахождение решения ДУ

$$i(t)=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\left[\cos(\omega t+\psi-\varphi)-\cos(\psi-\varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

При $t \to \infty$, $i_{CB} \to 0$ и $i \to i_{ПР}$



6 Переходные процессы

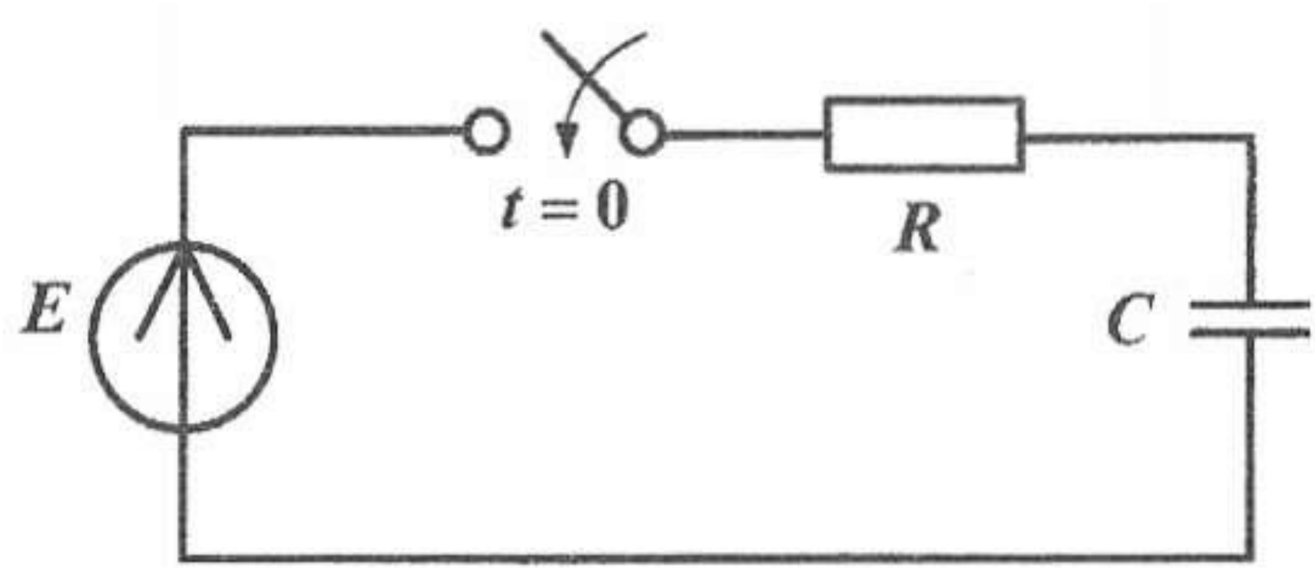
6.2 Общий подход к анализу переходных процессов

6.2.1 Классический метод анализа

6.2.2 Переходные процессы в RL-цепи

6.2.3 Переходные процессы в RC-цепи

Подключение постоянной ЭДС



1. **До коммутации** $u_C\left(0_-\right)=U$
2. **Начальные условия** $u_C\left(0_+\right)=u_C\left(0_-\right)=u_C\left(0\right)=U$
3. **После коммутации**

   из II закона Кирхгофа $U_C+U_R=E;\ U_C+RC\dfrac{dU_C}{dt}=E$

Анализ RC-цепи (продолжение)

4. **Определение свободной составляющей**

Характеристическое уравнение $RCP+1=0$

Корень $P=-\dfrac{1}{RC}$ $\qquad \tau = RC$ – постоянная времени ЭЦ

$$u_{C_{CB}}(t)=Ae^{pt}=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

5. **Определение принужденной составляющей**

Анализ режима по постоянному току для установившегося режима после коммутации

$$u_{C_{ПР}}(t)=E$$

Анализ RC-цепи (продолжение)

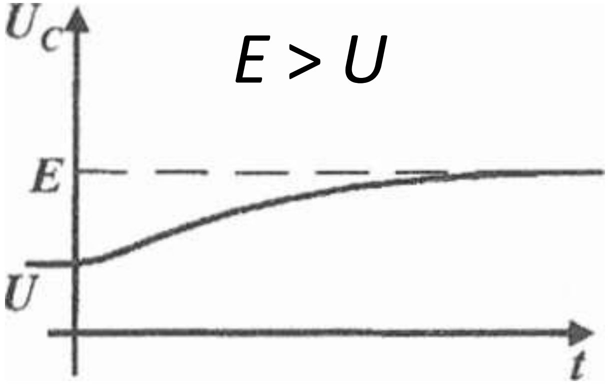
6. Запись общего вида решения ДУ

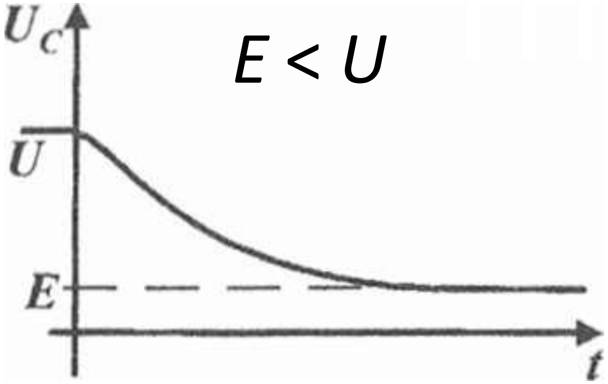
$$u_C(t) = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

7. Определение постоянных интегрирования

$$u_C(0) = U \qquad U = E + Ae^{-\frac{0}{\tau}} \Rightarrow A = U - E$$

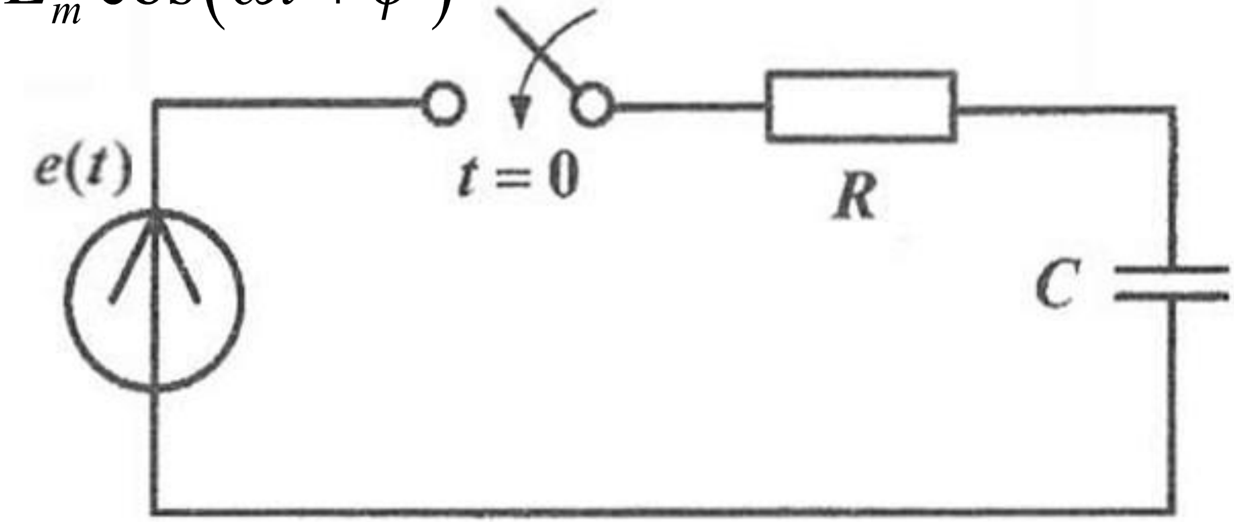
8. Нахождение решения ДУ $u_C(t) = E + (U - E)e^{-\frac{t}{\tau}}$





Подключение гармонической ЭДС

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \psi)$$



1. **До коммутации** $u_C(0_-) = 0$
2. **Начальные условия** $u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0) = 0$
3. **После коммутации** $U_C + U_R = e(t)$

   из II закона Кирхгофа

$$U_C + RC\frac{dU_C}{dt} = e(t)$$

Анализ RC-цепи (продолжение)

4. Определение свободной составляющей

Характеристическое уравнение $RCP+1=0$

Корень $P=-1/RC$

$$u_{C_{CB}}(t)=Ae^{pt}=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\tau = RC$ – постоянная времени ЭЦ

5. Определение принужденной составляющей

Используется метод комплексных амплитуд

$$u_{C_{\Pi P}}(t)=\frac{I_m}{\omega C}\cos\left(\omega t+\psi-\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_m=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\varphi = arctg\left(-\frac{1}{\omega CR}\right)$$

Анализ RC-цепи (продолжение)

6. Запись общего вида решения ДУ

$$u_C(t) = \frac{I_m}{\omega C}\cos\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

7. Определение постоянных интегрирования

$$u_C(0) = 0 \qquad\qquad 0 = \frac{I_m}{\omega C}\cos\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A$$

$$A = -\frac{I_m}{\omega C}\cos\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{I_m}{\omega C}\sin(\psi - \varphi)$$

Анализ RC-цепи (продолжение)

8. Нахождение решения ДУ

$$u_C(t) = \frac{I_m}{\omega C}\left[\cos\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\psi - \varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

6 Переходные процессы

6.2 Общий подход к анализу переходных процессов

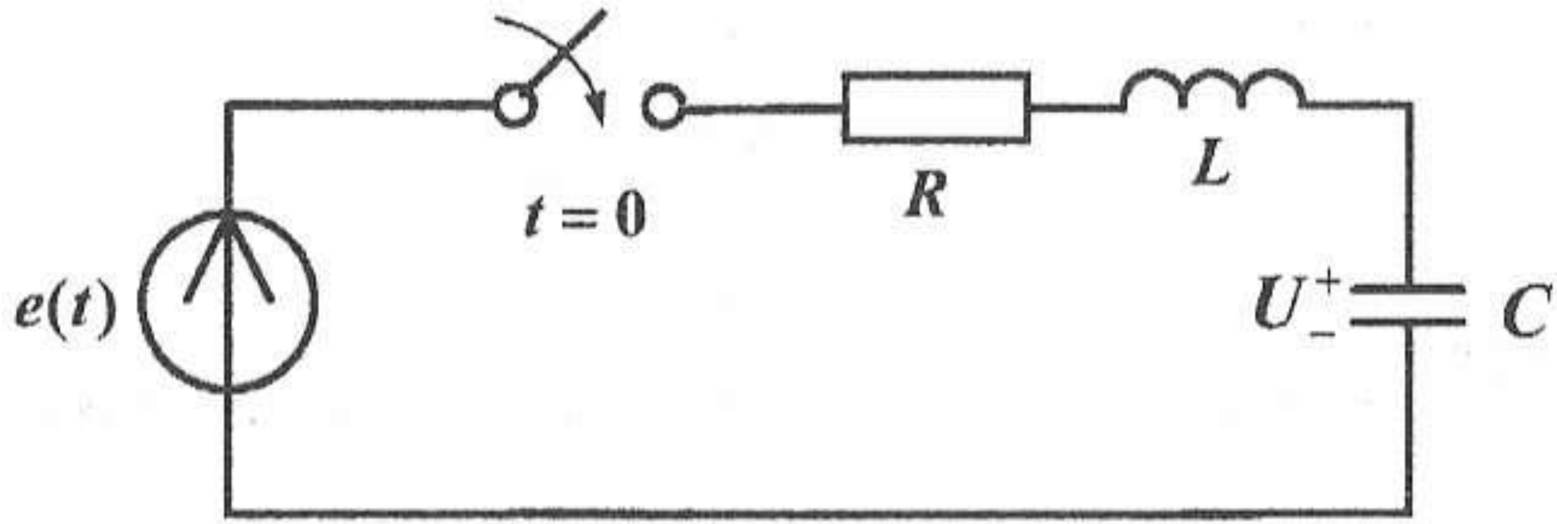
6.2.1 Классический метод анализа

6.2.2 Переходные процессы в RL-цепи

6.2.3 Переходные процессы в RC-цепи

6.2.4 Переходные процессы в RLC-цепи

Подключение постоянной ЭДС



1. **До коммутации** $i_L(0_-) = 0 \qquad u_C(0_-) = U$
2. **Начальные условия** $i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0) = 0$

   $u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0) = U$
3. **После коммутации**

   из II закона Кирхгофа $L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}\int idt + Ri = E = const$

Анализ RLC-цепи (продолжение)

4. Определение свободной составляющей

Характеристическое уравнение $Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0$

Корни

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

или $$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

где

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ – частота резонанса

$$\delta = \frac{R}{2L}$$ – коэффициент затухания

Анализ RLC-цепи (продолжение)

5. **Определение принужденной составляющей**
   Анализ режима по постоянному току для установившегося режима после коммутации

$$i_{ПР}(t) = 0$$

6. **Запись общего вида решения ДУ**

$$i(t) = i_{СВ}(t) + i_{ПР}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Анализ RLC-цепи (продолжение)

7. Определение постоянных интегрирования

$$\left.\begin{aligned} i_L(0) = 0 &\Rightarrow A_1 + A_2 = 0 \\ u_C(0) = U &\Rightarrow A_1 p_1 + A_2 p_2 = \frac{E-U}{L} \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} A_1 = -A_2 = \\ = \frac{E-U}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \end{aligned}$$

т.к. $\left.\dfrac{di(t)}{dt}\right|_{t=0} \Rightarrow \dfrac{di(0)}{dt} = A_1 p_1 + A_2 p_2$

$$L\frac{di(0)}{dt} + u_C(0) = E \Rightarrow \frac{di(0)}{dt} = \frac{E-U}{L}$$

Анализ RLC-цепи (продолжение)

8. Нахождение решения ДУ $i(t) = \frac{E-U}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}\left[e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right]$

- **Апериодический** ($\delta > \omega_0$, p_1 и $p_2 \in$ R)

$$i(t) = \frac{E-U}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}\left[e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right]$$

- **Критический** ($\delta = \omega_0$, $p_1 = p_2 = -\delta \in$ R)

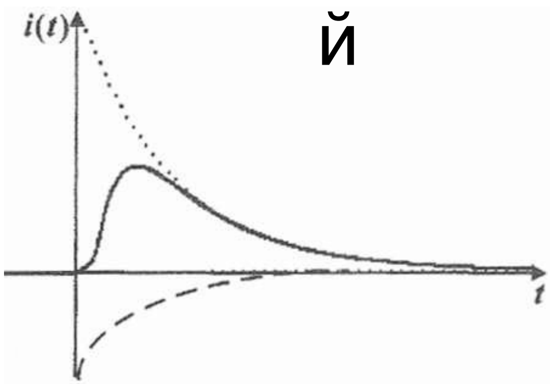
$$i(t) = \frac{E-U}{L} t e^{-\delta t}, \quad i_{кр}(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{pt}, \quad \text{где } A_1 = 0; \; A_2 = \frac{E-U}{L}$$

- **Колебательный** ($\delta < \omega_0$, $p_1 = p_2 = -\delta \pm j\omega_{CB} \in$ C)

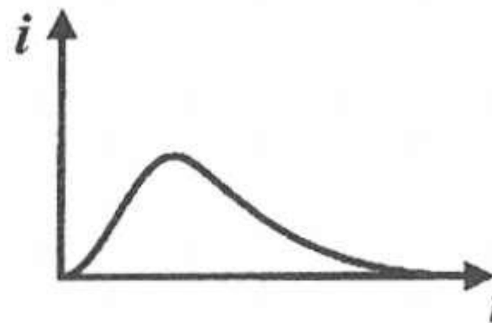
$$i(t) = \frac{E-U}{L\omega_{CB}} e^{-\delta t} \sin(\omega_{CB} t)$$

Анализ RLC-цепи (продолжение)

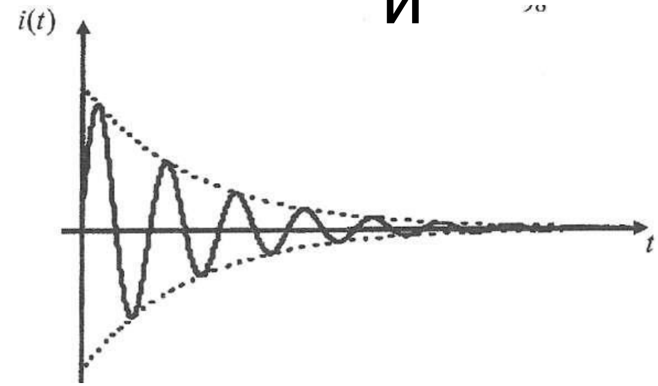
Апериодически
й



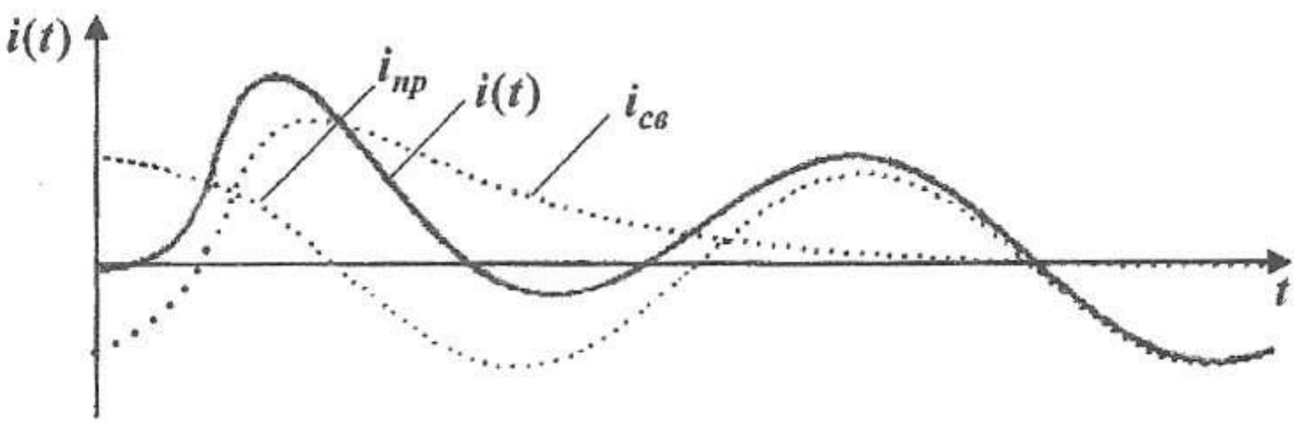
Критический



Колебательны
й



Подключение гармонической ЭДС



6 Переходные процессы

6.2 Общий подход к анализу переходных процессов

6.2.5 Операторный метод анализа

Преобразование Лапласа

- Прямое преобразование

$$A(p) = L\left[a(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-pt} a(t)\,dt \qquad \left|a(t)\right| \le k e^{\sigma_0 t}$$

A(p) – операторное изображение функции *a*(*t*)

k и σ_0 – вещественные числа

- Обратное преобразование

$$a(t) = L^{-1}\left[A(p)\right] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} A(p) e^{pt}\,dp$$

a(*t*) – оригинал

$$a(t) \risingdotseq A(p)$$

Свойства преобразования Лапласа

- Свойство линейности

$$\sum_{i=1}^{n} k_i a_i(t) \doteq \sum_{i=1}^{n} k_i A_i(p),\ a_i(t) \doteq A_i(p)$$

- Теорема дифференцирования

$$\frac{da(t)}{dt} \doteq pA(p) - a(0_+)$$

- Теорема интегрирования

$$\int_0^x a(t)dt \doteq \frac{A(p)}{p}$$

- Теорема смещения

$$e^{-\lambda t} a(t) \doteq A(p+\lambda)$$

- Теорема подобия

$$a(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} A\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

- Теорема запаздывания

$$a(t-t_0) \doteq e^{-pt_0} A(p)$$

- Теорема

$$\int_0^x a_1(\tau) a_2(t-\tau) d\tau \doteq A_1(p) A_2(p)$$

Свойства преобразования Лапласа

- Предельные соотношения

$$\lim_{t\to 0} a(t) \square \lim_{p\to\infty} pA(p) \qquad \lim_{t\to\infty} a(t) \square \lim_{p\to 0} pA(p)$$

- Теорема разложения

$$A(p)=\frac{N(p)}{M(p)}=\frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1 p+b_0}$$

p_k – простые корни знаменателя

$$A(p)=\frac{N(p)}{M(p)} \square \sum_{k=1}^{n}\frac{N(p_k)}{\left.\frac{dM(p)}{dp}\right|_{p=p_k}} e^{p_k t}$$

Изображения некоторых функций

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$t^n,\ n\in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$t^\alpha(\alpha>-1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$

$te^{\lambda t}$	$\frac{1}{(p-\lambda)^2}$	$\frac{\sin t}{t}$	$\operatorname{arcctg} p$
$t^n e^{\lambda t},\ n\in N$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	$\frac{1}{t}(1-e^{-t})$	$\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$
$t^\alpha e^{\lambda t}, \alpha>-1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$	$\delta(t)$	1
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\delta(t-a), a>0$	e^{-ap}
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$		

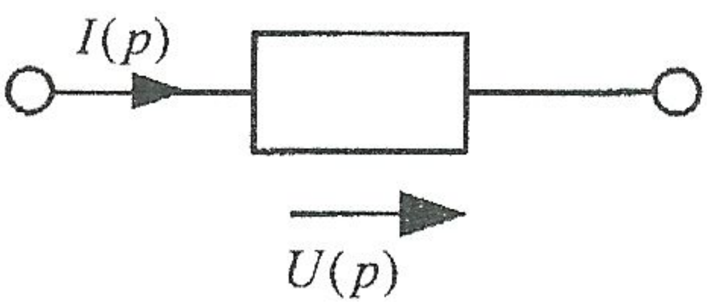
Уравнения равновесия цепи в операторной форме

- Первый закон Кирхгофа

$$\sum_k I_k(p) = 0$$

- Второй закон Кирхгофа

$$\sum_n U_n(p) = \sum_m E_m(p)$$



$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)}$$ – операторное сопротивление

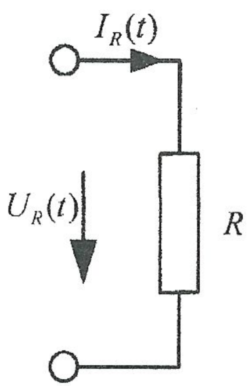
$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$$ – операторная проводимость

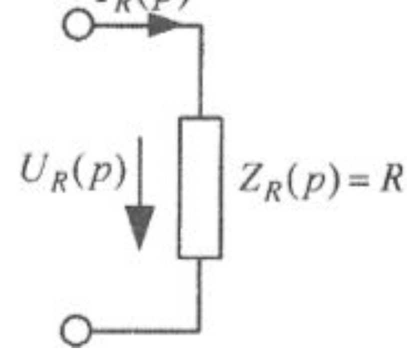
Операторным сопротивлением *называется отношение операторного изображения напряжения к операторному изображению тока при нулевых начальных условиях*

Операторная схема замещения R

Эквивалентная схема сопротивления

Операторная схема замещения сопротивления





$$U_R(p) = RI_R(p)$$

$$I_R(p) = GU_R(p)$$

$$u_R(t) = Ri_R(t)$$

$$i_R(t) = Gu_R(t)$$

$$G = \frac{1}{R}$$

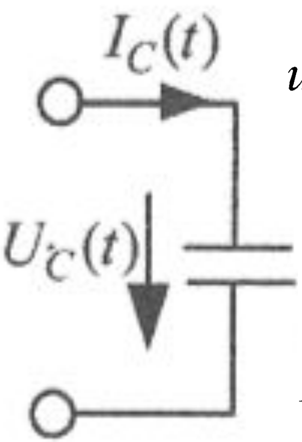
$$Z_R(p) = \frac{U_R(p)}{I_R(p)} = R$$

$$Y_R(p) = \frac{I_R(p)}{U_R(p)} = \frac{1}{R} = G$$

Операторная схема замещения С

Эквивалентная схема емкости

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$



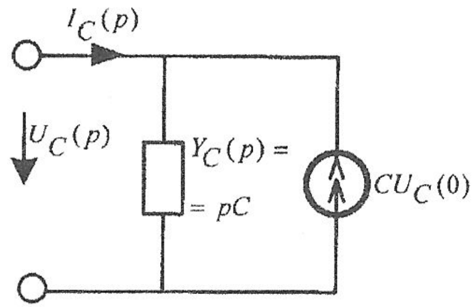
$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)d\tau$$

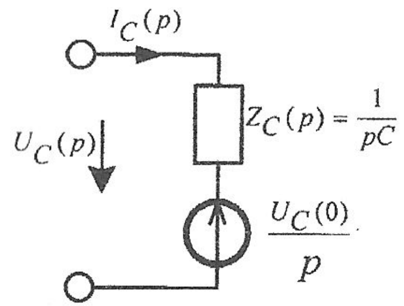
$$I_C(p) = pCU_C(p) - Cu_C(0)$$

$$U_C(p) = \frac{u_C(0)}{p} + \frac{I_C(p)}{pC}$$

Операторная схема замещения емкости

с источником тока с источником ЭДС



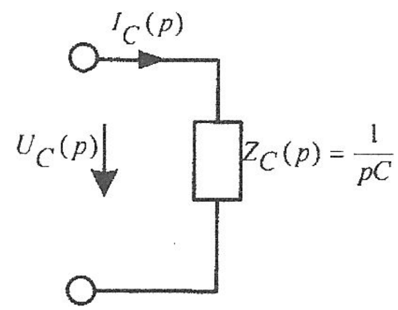


$$Y_C(p) = \frac{I_C(p)}{U_C(p)} = pC \qquad Z_C(p) = \frac{U_C(p)}{I_C(p)} = \frac{1}{pC}$$

При $u_C(0) = 0$

$$I_C(p) = pCU_C(p)$$

$$U_C(p) = \frac{I_C(p)}{pC}$$

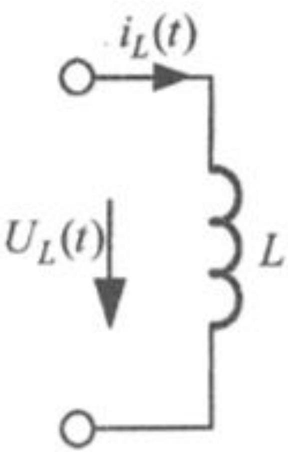


Операторная схема замещения L

Эквивалентная схема индуктивности

$$u_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_L(t)=i_L(0)+\frac{1}{L}\int_0^t u_L(\tau)d\tau$$

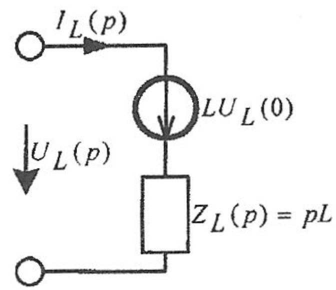


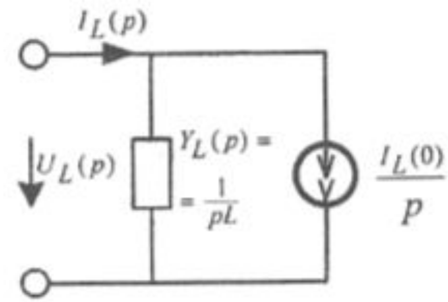
$$U_L(p)=pLI_L(p)-pi_L(0)$$

$$I_L(p)=\frac{i_L(0)}{p}+\frac{U_L(p)}{pL}$$

Операторная схема замещения индуктивности

с источником ЭДС с источником тока





$$Z_L(p)=\frac{U_L(p)}{I_L(p)}=pL \qquad Y_L(p)=\frac{I_L(p)}{U_L(p)}=\frac{1}{pL}$$

При $i_L(0)=0$

$$U_L(p)=pLI_L(p)$$

$$I_L(p)=\frac{U_L(p)}{pL}$$

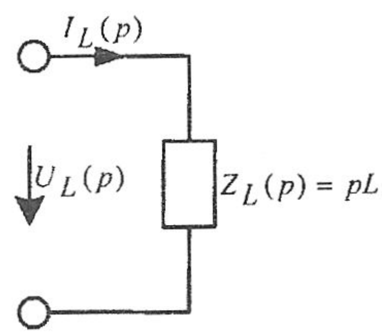


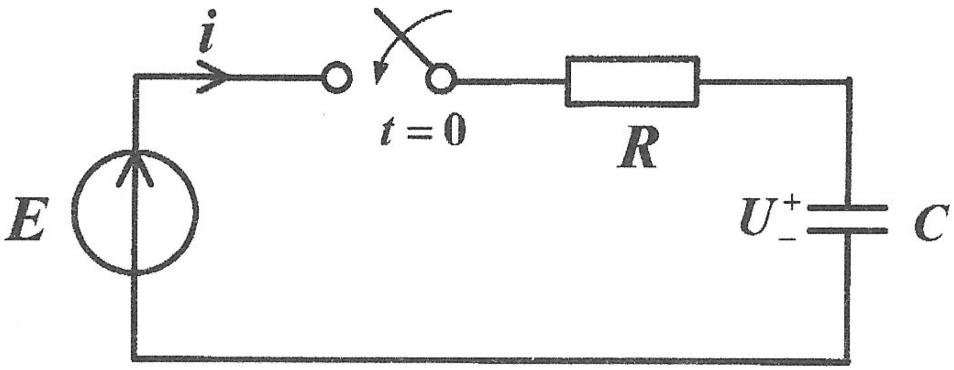
Схема применения метода

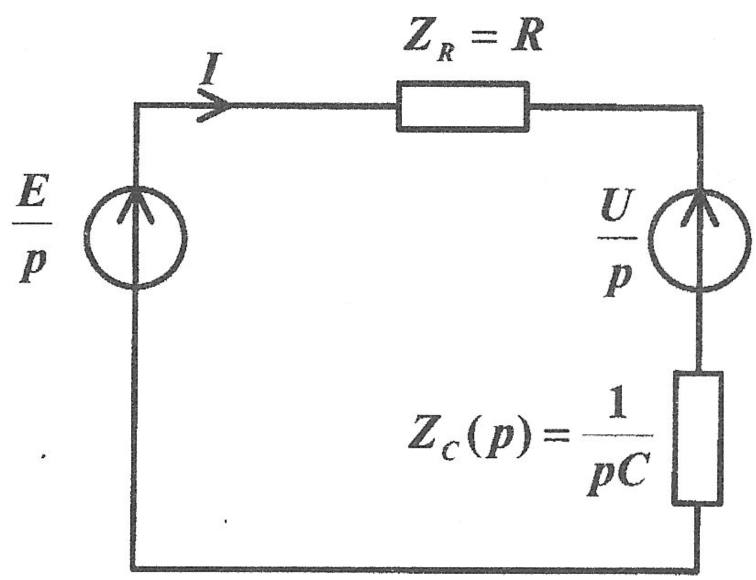
1. Анализ цепи до коммутации. Определение независимых начальных условий
2. Составление операторной эквивалентной схемы электрической цепи после коммутации
3. Составление системы уравнений электрического равновесия цепи в операторной форме
4. Решение уравнений электрического равновесия цепи относительно изображений искомых токов и напряжений
5. Определение оригиналов искомых токов и напряжений

Анализ последовательной RC-цепи

1. Анализ цепи до коммутации. Определение независимых начальных условий

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0) = U$$



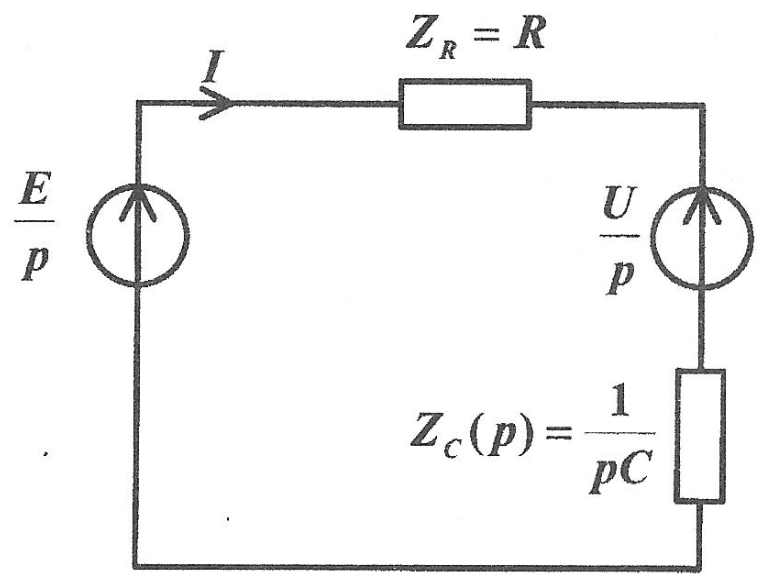


2. Составление операторной схемы замещения цепи после коммутации

Анализ RC-цепи (продолжение)

3. Запись уравнения электрического равновесия цепи в операторной форме

$$\frac{E}{p} - \frac{U}{p} = IR + \frac{I}{pC}$$



4. Решение уравнения

$$I = \frac{\frac{E}{p} - \frac{U}{p}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{E - U}{pR + \frac{1}{C}} \Rightarrow$$

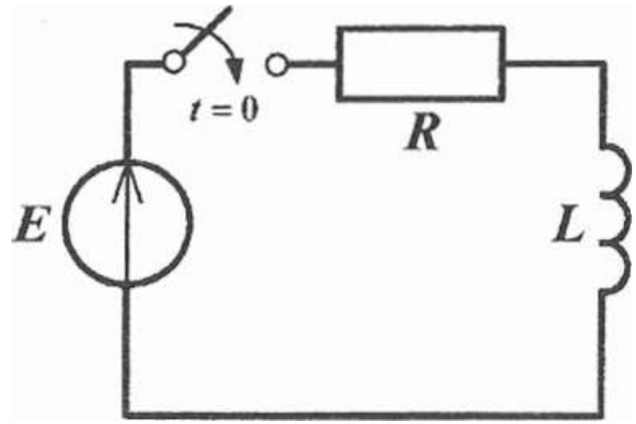
$$\Rightarrow p = -\frac{1}{RC}$$ – единственный корень знаменателя

5. Определение оригинала $i(t) = \frac{E-U}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$

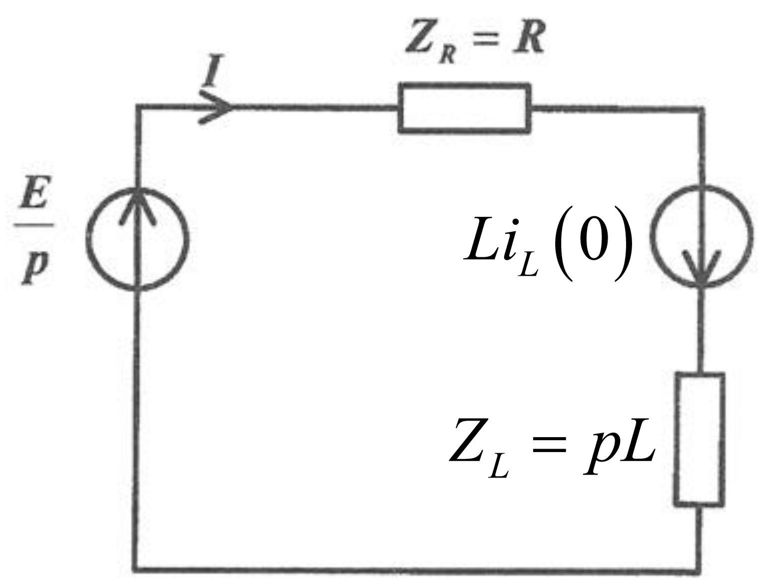
Анализ последовательной RL-цепи

1. Анализ цепи до коммутации. Определение независимых начальных условий

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0) = 0$$



2. Составление операторной схемы замещения цепи после коммутации



Анализ RL-цепи (продолжение)

3. Запись уравнения электрического равновесия цепи в операторной форме

$$\frac{E}{p}+Li_L(0)=I(p)R+I(p)pL$$

4. Решение уравнения

$$I(p)=\frac{E}{p(Lp+R)}\Rightarrow p_1=0;\ p_2=-\frac{R}{L}$$ – корни знаменателя

$$I(p)=\frac{N(p)}{M(p)}\doteq\sum_k\frac{N(p_k)}{\left.\frac{dM(p)}{dp}\right|_{p=p_k}}e^{p_k t}$$

$$N(p_1)=N(p_2)=E$$

$$\left.\frac{dM(p)}{dp}\right|_{p=p_1}=2Lp_1+R=R$$

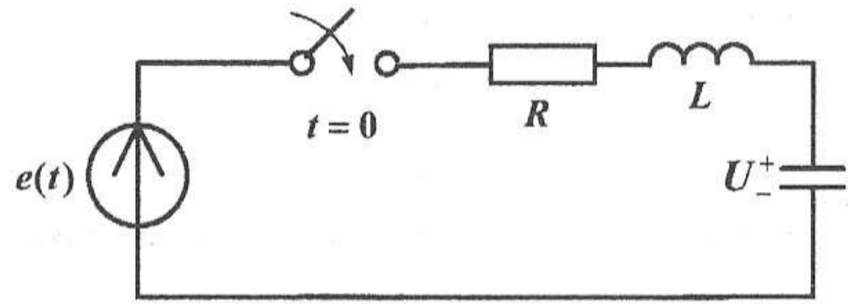
$$\left.\frac{dM(p)}{dp}\right|_{p=p_2}=2Lp_2+R=-R$$

5. Определение оригинала

$$i(t)=\frac{E}{R}e^{0t}-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Анализ последовательной RLC-цепи

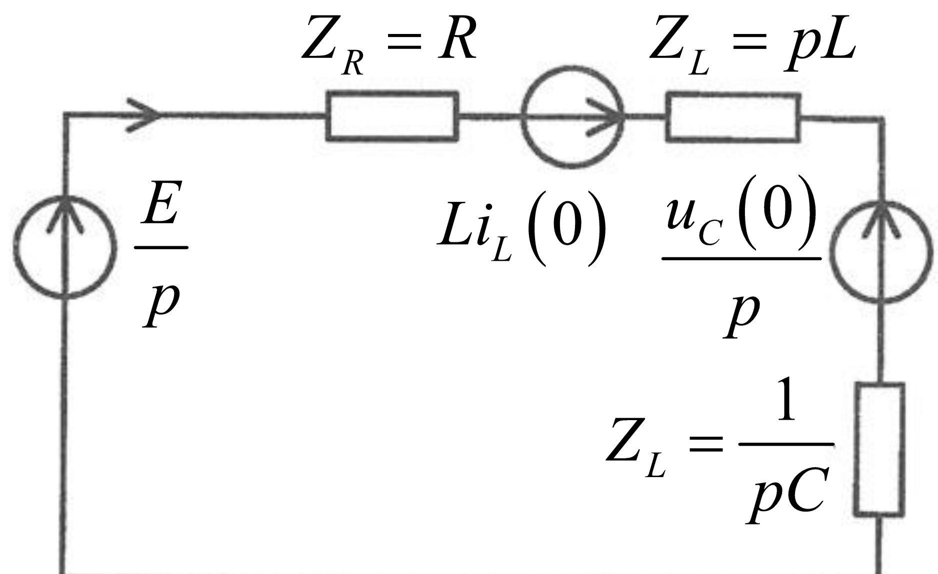
1. Анализ цепи до коммутации. Определение независимых начальных условий



$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0) = U$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0) = 0$$

2. Составление операторной схемы замещения цепи после коммутации



Анализ RLC-цепи (продолжение)

3. Запись уравнения электрического равновесия цепи в операторной форме

$$\frac{E}{p}-\frac{u_C(0)}{p}+Li_L(0)=I(p)R+I(p)pL+\frac{I(p)}{pC}$$

4. Решение уравнения

$$I(p)=\frac{\dfrac{E}{p}-\dfrac{U}{p}}{R+pL+\dfrac{1}{pC}}=\frac{C(E-U)}{LCp^2+RCp+1}=\frac{N(p)}{M(p)}\Rightarrow$$

$\Rightarrow p_{1,2}=-\delta\pm\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}$ – корни знаменателя

$\delta=\dfrac{R}{2L}$ – коэффициен т

$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ – частота резонанса

Режимы работы RLC-цепи

5. Определение оригинала
   - Апериодический ($\delta > \omega_0$, p_1 и $p_2 \in$ R)

$$A(p)=\frac{N(p)}{M(p)}=\sum_k \frac{N(p_k)}{\left.\frac{dM(p)}{dp}\right|_{p=p_k}}e^{p_k t}$$

$$N(p_1)=N(p_2)=C(E-U)$$

$$\left.\frac{dM(p)}{dp}\right|_{p=p_{1,2}}=2LCp_{1,2}+R$$

$$i(t)=\frac{E-U}{2L\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}}\left(e^{p_1 t}-e^{p_2 t}\right)$$

   - Критический ($\delta = \omega_0$, $p_1 = p_2 = -\delta \in$ R)

$$I(p)=\frac{E-U}{L(p-\delta)^2}$$

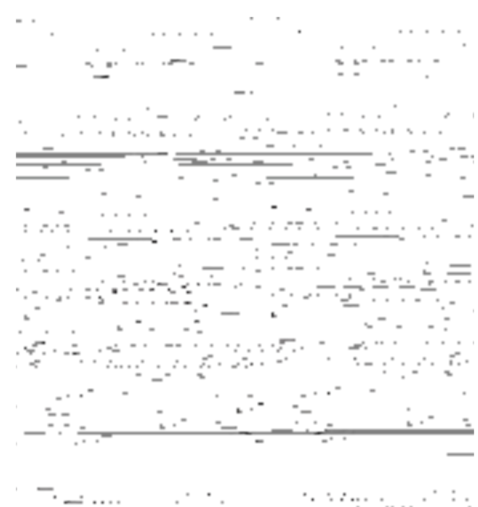
$$i(t)=\frac{E-U}{L}te^{-\delta t}$$

   - Колебательный ($\delta < \omega_0$, $p_1 = p_2 = -\delta \pm j\omega_{CB} \in$ C)

$$I(t)=\frac{E-U}{2L\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}}\left(e^{p_1 t}-e^{p_2 t}\right)=\frac{E-U}{2L\omega_{CB}}e^{-\delta t}\left(e^{j\omega_{CB}t}-e^{-j\omega_{CB}t}\right)=\frac{E-U}{2L\omega_{CB}}e^{-\delta t}\sin\left(\omega_{CB}t\right)$$

Эквивалентные операторные схемы

- Источники тока и напряжений $i(t)$ и $u(t)$ заменяются соответствующими изображениями $I(p)$ и $U(p)$
- Сопротивление R заменяется на R
- При нулевых начальных условиях:
  - индуктивность L заменяется на pL
  - емкость C заменяется на $1/pC$
- При не нулевых начальных условиях
  - индуктивность L заменяется на pL с источником напряжения $Li(0)$
  - емкость C заменяется на $1/pC$ с источник напряжения $u_C(0)/p$



Преимущества

- ✔ простота
- ✔ отсутствие громоздких операций по определению постоянных интегрирования
- ✔ можно рассчитать переходный процесс любым из ранее рассмотренных методов:
  - контурных токов
  - узловых напряжений
  - и др.

Операторные характеристики

Операторной характеристикой *линейной электрической цепи называется отношение операторного изображения реакции цепи к операторному изображению воздействия при нулевых начальных условиях*

$$H_{nm}(p) = \frac{Y_n(p)}{X_m(p)}$$

$x_m(t) \doteq X_m(p)$ – воздействие

$y_n(t) \doteq Y_n(p)$ – реакция

Комплексную частотную характеристику (КЧХ) можно рассматривать как частный случай операторной при Re(p) = 0

Виды операторных характеристик

- Операторный коэффициент передачи по напряжению

$$K_U(p)=\frac{U_2(p)}{U_1(p)}$$

$u_1(t) \risingdotseq U_1(p)$ – воздействие

$u_2(t) \risingdotseq U_2(p)$ – реакция

- Операторный коэффициент передачи по току

$$K_I(p)=\frac{I_2(p)}{I_1(p)}$$

$i_1(t) \risingdotseq I_1(p)$ – воздействие

$i_2(t) \risingdotseq I_2(p)$ – реакция

- Операторное сопротивление

$$Z(p)=\frac{U(p)}{I(p)}$$

- Операторная проводимость

$$Y(p)=\frac{I(p)}{U(p)}$$

Нули и полюса

Любая операторная характеристика линейной электрической цепи, не содержащей независимых источников энергии, является рациональной функцией переменной *p* с вещественными коэффициентами

$$H_{nm}(p)=\frac{N(p)}{M(p)}=\frac{a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0}{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1 p+b_0}$$

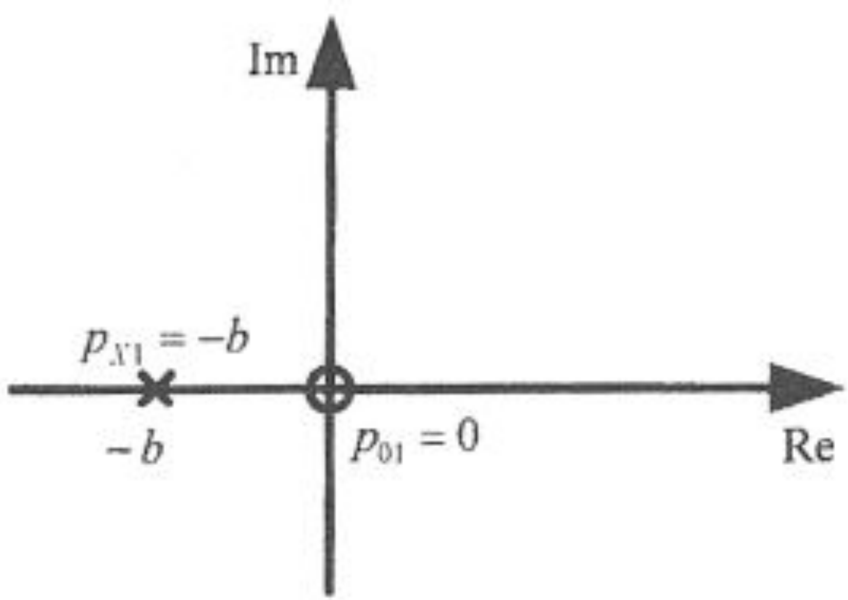
Нули p_{0i} – значения *p*, при которых $N(p_{0i})=0$, $M(p_{0i})\neq 0$

Полюса p_{xi} – значения *p*, при которых $N(p_{xi})\neq 0$, $M(p_{xi})=0$

$K=\dfrac{a_n}{b_m}$ – масштабный коэффициент

Полюсно-нулевая диаграмма

Нули и полюса характеризуют $H_{nm}(p)$ с точностью до постоянного множителя K. По ним можно найти реакцию цепи на заданное воздействие



$$H_{nm}(p) = \frac{Y_n(p)}{X_m(p)}$$

$x_m(t) \doteq X_m(p)$ – воздействие

$y_n(t) \doteq Y_n(p)$ – реакция

6 Переходные процессы

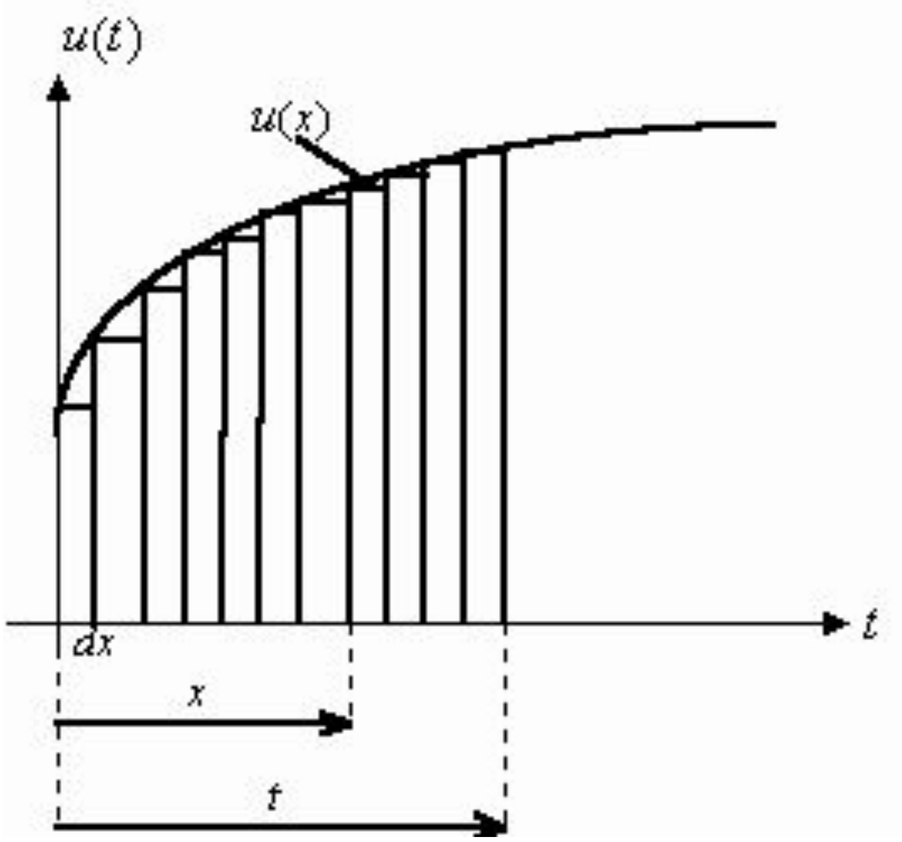
6.2 Общий подход к анализу переходных процессов

6.2.6 Метод наложения (интегралы наложения)

Применение принципа

Пусть внешнее воздействие $x(t)$ представлено в виде взвешенной суммы некоторых элементарных воздействий

$$x(t) = \sum \alpha_k x_k(t)$$



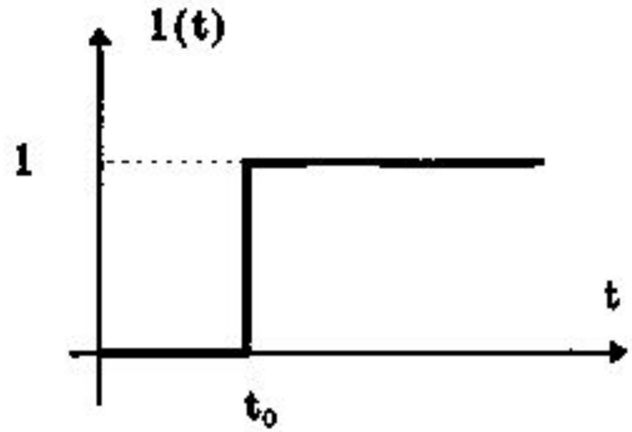
По принципу суперпозиции отклик электрической цепи $y(t)$

$$y(t) = \sum \alpha_k y_k(t)$$

Типовые импульсные воздействия

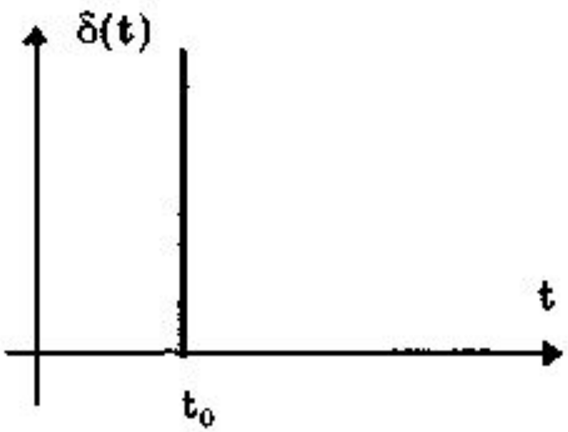
При исследовании динамических свойств линейных цепей в качестве типовых элементарных воздействий используется единичная ступенчатая функция $1(t)$ и дельта-функция $\delta(t)$.

Функция Хевисайда



$$1(t-t_0)=\begin{cases}0, & t<t_0\\ 1, & t\ge t_0\end{cases}$$

δ -функция Дирака



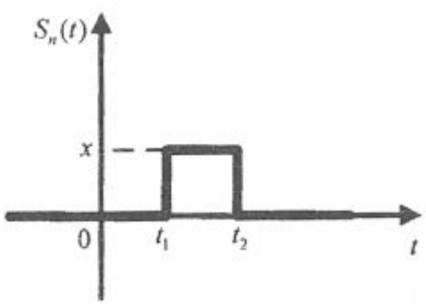
$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}+\infty, & t=t_0\\ 0, & t\ne t_0\end{cases}$$

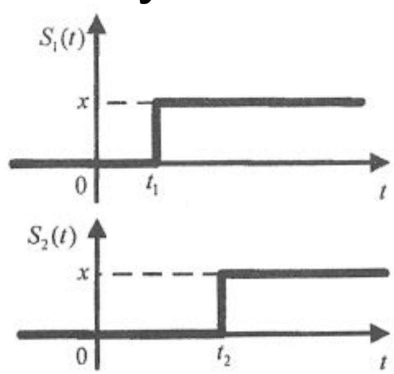
Свойства и применение 1(*t*)

- Коммутация электрических цепей

$$f(t)1(t-t_0)=\begin{cases}0, & t<t_0\\ f(t), & t\ge t_0\end{cases}$$

- Представление прямоугольного импульса





$$S_1=x\cdot 1(t-t_1)$$

$$S_2=x\cdot 1(t-t_2)$$

$$S_n=x\cdot\left[1(t-t_1)-1(t-t_2)\right]$$

- Преобразование Лапласа

$$L\left[1(t-t_0)\right]=\int_0^\infty 1(t-t_0)e^{-pt}dt=\int_{t_0}^\infty e^{-pt}dt=\frac{e^{-pt_0}}{p}$$

Переходная характеристика

***Переходной характеристикой $h^1(t\text{-}t_0)$** линейной цепи, не содержащей независимых источников энергии, называется отношение реакции этой цепи на воздействие неединичного скачка тока или напряжения к высоте этого сигнала при нулевых начальных условиях*

$x(t) = x \cdot 1(t - t_0)$ – воздействие в виде неединичного скачка

$y(t)$ – реакция цепи

$$h^1(t - t_0) = \frac{y(t)}{x}$$

При $x = 1$ $h^1(t - t_0) = y(t)$

Переходная характеристика цепи численно равна реакции цепи на воздействие единичного скачка тока или напряжения

Переходная характеристика

$$x(t) = x \cdot 1(t - t_0) \doteqdot \frac{xe^{-pt_0}}{p} = X(p)$$ – воздействие на цеп

$$y(t) \doteqdot Y(p)$$ – реакция цепи

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$ – операторная характеристика цепи

$$h^1(t - t_0) \doteqdot \frac{Y(p)}{x} = \frac{H(p)X(p)}{x} = \frac{H(p)xe^{-pt_0}}{xp} = \frac{H(p)e^{-pt_0}}{p}$$

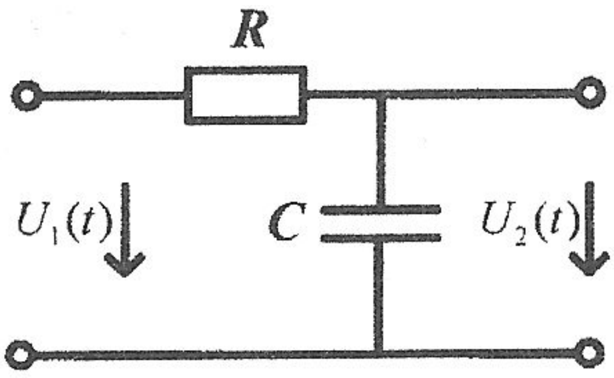
При $t_0 = 0$ $\quad h^1(t) \doteqdot \dfrac{H(p)}{p}$

Порядок нахождения $h^1(t)$

1. Составление операторной схемы замещения цепи для нулевых начальных условий
2. Нахождение операторной характеристики $H(p)$
3. Определение переходной характеристики

$$h^1(t) \doteq \frac{H(p)}{p}$$

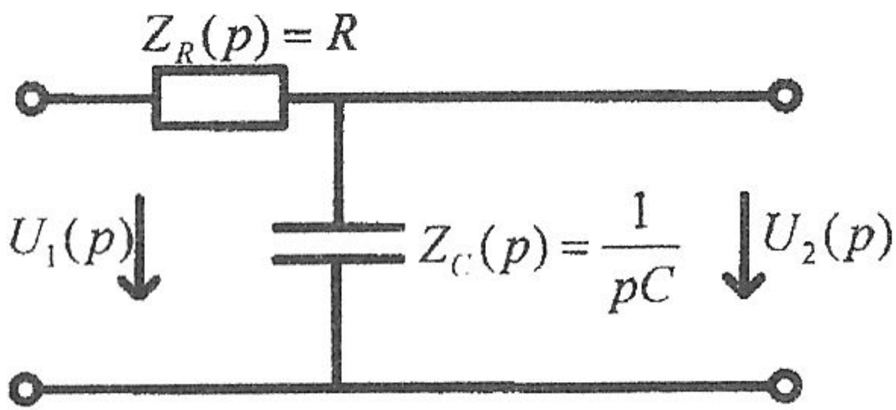
Пример 1
RC-цепь с емкостью на выходе



$x(t) = U_1(t)$ – воздействие на цепь

$y(t) = U_2(t)$ – реакция цепи

1. Составление операторной схемы замещения цепи для нулевых начальных условий



Пример 1 (продолжение) RC-цепь с емкостью на выходе

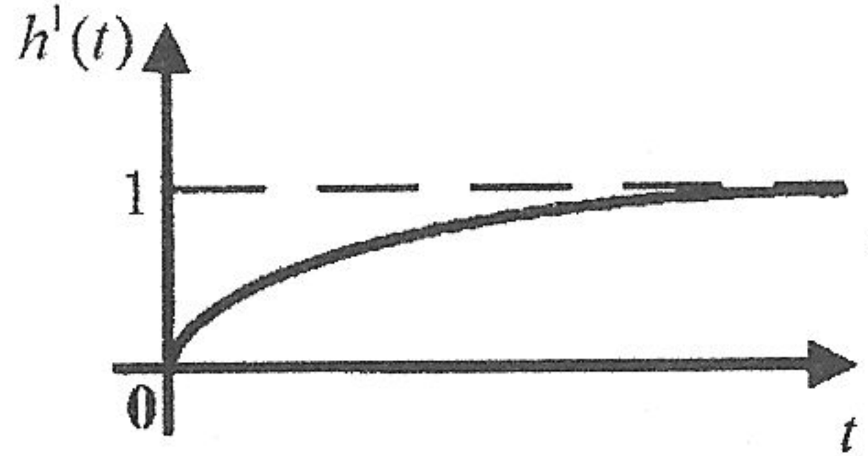
2. Нахождение операторного коэффициента передачи по напряжению
$$H(p) = K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1/pC}{R + 1/pC} = \frac{1}{RCp + 1}$$

3. Определение переходной характеристики

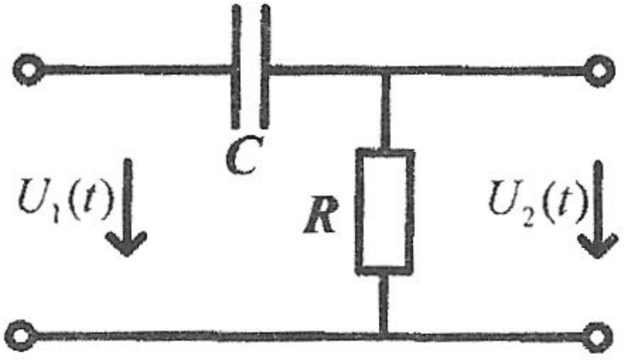
$$h^1(t) \doteq \frac{H(p)}{p} = \frac{1}{p(RCp+1)}$$

$$h^1(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$\tau = RC$ – постоянная времени цепи



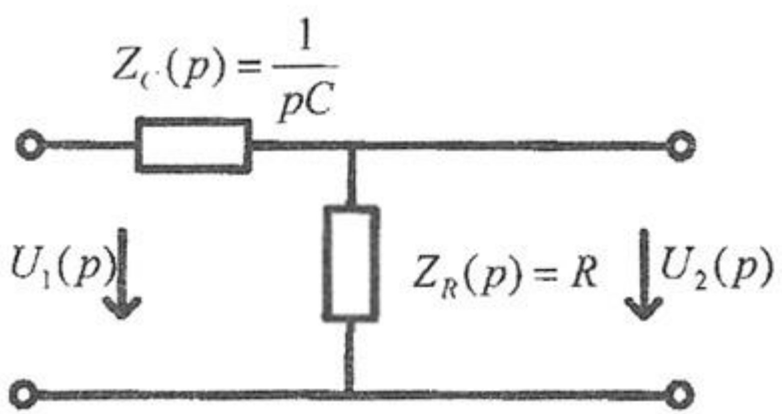
Пример 2
RC-цепь с сопротивление на выходе



$x(t)=U_1(t)$ – воздействие на цепь

$y(t)=U_2(t)$ – реакция цепи

1. Составление операторной схемы замещения цепи для нулевых начальных условий



Пример 2 (продолжение) RC-цепь с сопротивление на выходе

2. Нахождение операторного коэффициента передачи по напряжению

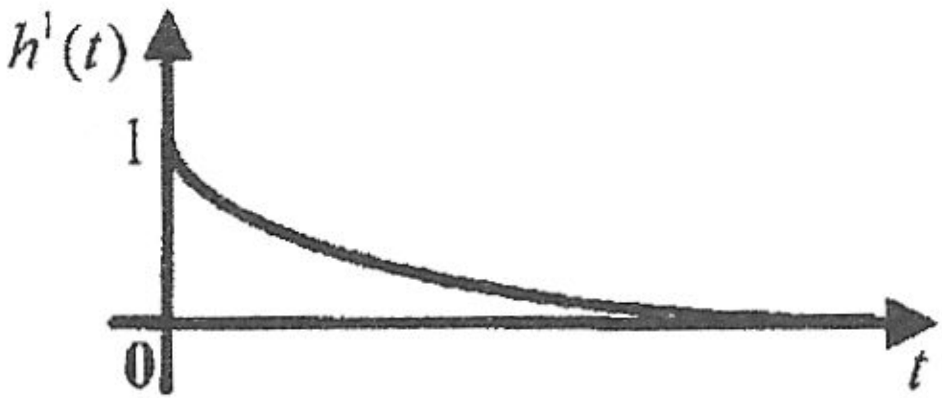
$$H(p)=K_U(p)=\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=\frac{R}{R+1/pC}=\frac{RCp}{RCp+1}$$

3. Определение переходной характеристики

$$h^1(t)\doteq\frac{H(p)}{p}=\frac{RC}{RCp+1}$$

$$h^1(t)=\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$\tau=RC$ – постоянная времени цепи



Интеграл Дюамеля

Интеграл Дюамеля — метод расчета отклика линейных пассивных систем на произвольно меняющийся во времени входной сигнал.

Основан на принципе суперпозиции.

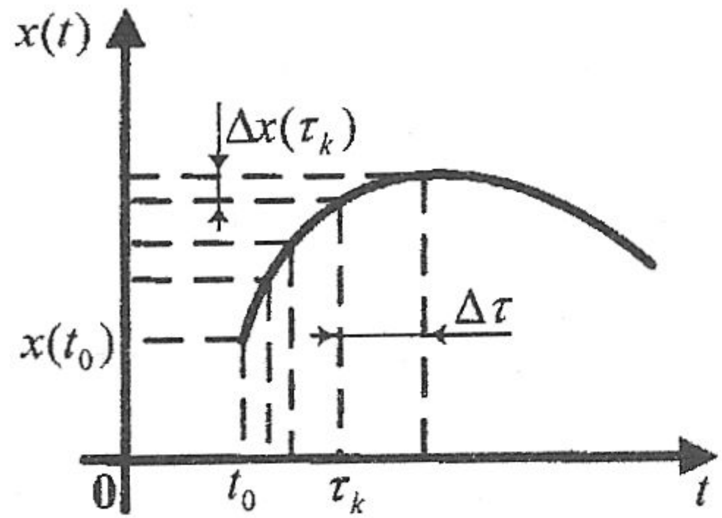
Отклик линейной пассивной системы на составной сигнал, равный сумме нескольких сигналов, представляет собой сумму откликов от каждого из слагаемых сигналов.

$h^1(t)$ – переходная характеристика

$x(t)$ – воздействие, $x(t)=0$ при $t<t_0$

$$x(t) \cong x(t_0)1(t-t_0)+\sum_k \Delta x(\tau_k)1(t-\tau_k)$$

$$\Delta x(\tau_k) \approx \Delta\tau \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\tau_k}$$



Интеграл Дюамеля (продолжение)

По принципу суперпозиции:

$$y(t) = x(t_0)h^1(t - t_0) + \sum_k \Delta\tau \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\tau_k} h^1(t - \tau_k)$$

При $\Delta\tau \to 0$

$$y(t) = x(t_0)h^1(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dx(\tau)}{d\tau} h^1(t - \tau)\,d\tau$$ – интеграл Дюамеля

Отклик системы выражается в виде интеграла от произведения задержанной переходной характеристики на входное воздействие (свертка функций), который носит название интеграла Дюамеля

Импульсная характеристика

Импульсной характеристикой *цепи называют реакцию цепи на воздействие единичной импульсной функции (δ-функции)*

$$h^{\delta}(t) = h^{1}(0)\delta(t) + \frac{dh^{1}(t)}{dt}$$

$$h^{1}(t) = \int_{+0}^{t} h^{\delta}(t)dt + h^{1}(0) = \int_{-0}^{t} h^{\delta}(t)dt$$

Контрольная работа № 1

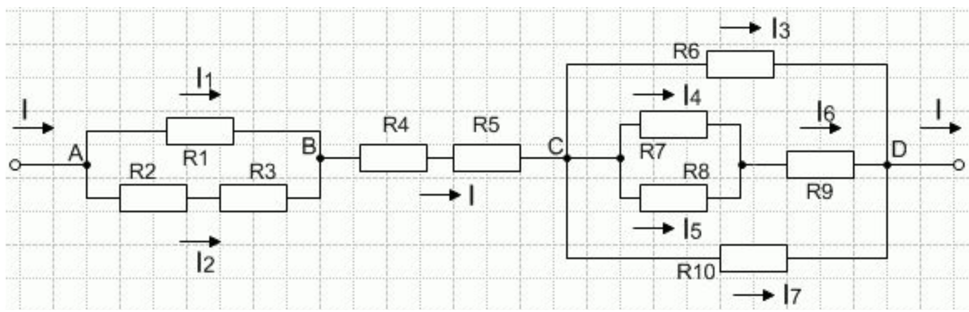
Вариант 1	Вариант 2

1. Найти эквивалентное сопротивление между узлами **A** и **D** , а также определить ток I для следующей цепи

Вариант 1:

$R_i = 1\ \text{кОм}$

$U_{AD} = 5\ \text{В}$



Вариант 2:

$R_i = 2\ \text{кОм}$

$U_{AD} = 10\ \text{В}$

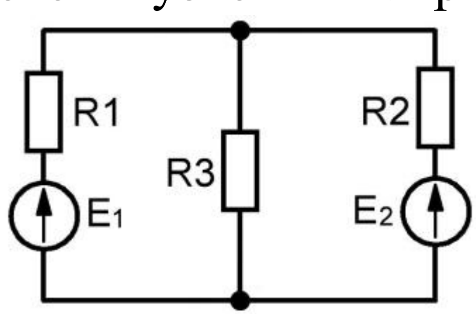
2. Определить значения токов для всех ветвей цепи. Расчет произвести методами контурных токов и узловых напряжений.

Вариант 1:

$R_1 = R_2 = 1\ \text{кОм}$

$R_3 = 3\ \text{кОм}$

$E_1 = 5\ \text{В}, \quad E_2 = 12\ \text{В}$



Вариант 2:

$R_1 = R_2 = 3\ \text{кОм}$

$R_3 = 1\ \text{кОм}$

$E_1 = 12\ \text{В}, \quad E_2 = 5\ \text{В}$

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Записать в показательной и тригонометрической форме комплексные амплитуды напряжения и тока. Определить угол сдвига фаз между напряжением и током, комплексное сопротивление и проводимость цепи; активную, реактивную, полную и комплексную мощности.

$$\dot{U} = 3 + j4 \ B \qquad \dot{I} = 5 - j \ A$$

2. К последовательной RL-цепи подключен гармонический источник ЭДС

$$u(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t).$$

Определить R и L если действующее значение тока в цепи I = 2.2 А, а сдвиг фаз между напряжением и током равен 45°. Построить векторную диаграмму напряжений и тока. Чему равны активная, реактивная и полная мощности цепи?

Вариант 2

1. Записать в показательной и тригонометрической форме комплексные амплитуды напряжения и тока. Определить угол сдвига фаз между напряжением и током, комплексное сопротивление и проводимость цепи; активную, реактивную, полную и комплексную мощности.

$$\dot{U} = 3 - j4 \ B \qquad \dot{I} = 2 + j7 \ A$$

2. К последовательной RC-цепи подключен гармонический источник ЭДС

$$u(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t).$$

Определить R и C если действующее значение тока в цепи I = 2.2 А, а сдвиг фаз между напряжением и током равен 45°. Построить векторную диаграмму напряжений и тока. Чему равны активная, реактивная и полная мощности цепи?