

Краснодарский университет МВД России

Кафедра информатики и математики

Учебно-наглядное пособие

по дисциплине «Численные методы

специальность 10.05.05 Безопасность информационных технологий в правоохранительной сфере специализация «Технологии защиты информации в правоохранительной сфере»

Тема №3

Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Лекция 2

Подготовил:

Заместитель начальника кафедры
канд. физико-математических наук
полковник полиции Е.В. Михайленко

Обсуждена и одобрена
на заседании кафедры
информатики и математики
Протокол № 20
от «01» июня 2022 г.

Краснодар
2022



Цель лекции: рассмотреть основные понятия систем линейных алгебраических уравнений, изучить матричный метод, метод Крамера и метод Гаусса решения таких систем, рассмотреть применение метода Гаусса для нахождения обратной матрицы, ознакомиться с понятиями и методами решения однородных систем алгебраических уравнений, фундаментальной системой решений.

Материально-техническое обеспечение: компьютер, видеопроектор, экран.

Учебно-методическое обеспечение: учебно-методический материал в электронном виде, программный комплекс «**Системы линейных уравнений**».

Основные вопросы

1. Метод итераций

2. Метод Зейделя

1. Метод итераций

Простейшим итерационным методом решения СЛАУ является *метод простой итерации*.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \boxtimes \quad \boxtimes \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Для того чтобы применить метод простой итерации, необходимо систему уравнений привести к виду: $x=Bx+c$.

Из первого уравнения системы (1) выразим неизвестную x_1 :

$x_1 = a_{11}^{-1}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n)$, из второго уравнения – неизвестную x_2 :

$x_2 = a_{22}^{-1}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n)$, и т. д. В результате получим систему:

$$b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad c_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i, j=1,2,\dots,n, \quad i \neq j.$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots + b_{1,n-1}x_{n-1} + b_{1n}x_n + c_1 \\ x_2 = b_{21}x_1 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2,n-1}x_{n-1} + b_{2n}x_n + c_2 \\ x_3 = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + \dots + b_{3,n-1}x_{n-1} + b_{3n}x_n + c_3 \\ \dots \quad \dots \\ x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + b_{n3}x_3 + \dots + b_{n,b-1}x_{n-1} + c_n \end{cases} \quad (2)$$

Очевидно, что диагональные элементы матрицы A должны быть отличны от нуля. Выберем произвольно начальное приближение. Обычно в качестве первого приближения берут $x_i^0 = c_i$. Подставим начальное приближение в правую часть (2). Вычисляя левые части, получим значения

Очевидно, что диагональные элементы матрицы A должны быть отличны от нуля. Выберем произвольно начальное приближение. Обычно в качестве первого приближения берут $x_i^0 = c_i$. Подставим начальное приближение в

Продолжая этот процесс дальше, получим последовательность приближений, причем приближение строится следующим образом:

$$\begin{cases} X_1^{k+1} = b_{12}X_2^k + b_{13}X_3^k + \dots + b_{1,n-1}X_{n-1}^k + b_{1n}X_n^k + c_1 \\ X_2^{k+1} = b_{21}X_1^k + b_{23}X_3^k + \dots + b_{2,n-1}X_{n-1}^k + b_{2n}X_n^k + c_2 \\ X_3^{k+1} = b_{31}X_1^k + b_{32}X_2^k + \dots + b_{3,n-1}X_{n-1}^k + b_{3n}X_n^k + c_3 \\ \dots \\ X_n^{k+1} = b_{n1}X_1^k + b_{n2}X_2^k + b_{n3}X_3^k + \dots + b_{n,n-1}X_{n-1}^k + c_n \end{cases} \quad (3)$$

Последняя система (3) представляет собой расчетные формулы метода простой итерации.

Полученную систему (3) можно использовать, как итерационные формулы, учитывая, что справа в равенствах стоят значения переменных x_j , полученные на предыдущем $n-1$ шаге вычислений, а слева - новые значения на n шаге.

Сходимость метода простой итерации. Известно следующее достаточное условие сходимости метода простой итерации. Если элементы матрицы удовлетворяют условию:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i=1,2,\dots,n,$$

то итерационная последовательность сходится к точному решению.

На практике для обеспечения сходимости итерационных методов необходимо, чтобы **значения диагональных элементов матрицы СЛАУ были преобладающими по абсолютной величине по сравнению с другими элементами.**

Критерий окончания.

Если требуется найти решение с точностью ε .

Зададим начальные приближения $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$

и вычислим правую часть каждого уравнения системы (3), получим новые приближения

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$$

Таким образом организуется итерационный процесс, который заканчивается по условию: вычисления ведутся до тех пор, пока все величины

$$|x_k^{(m+1)} - x_k^{(m)}| < \xi$$

Пример 1.

Решить систему уравнений методом простой итерации с точностью $\varepsilon=0,001$

$$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 21,70 \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 27,46 \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = 28,76 \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = 49,72 \end{cases}$$

Заметим, что метод простой итерации сходится, так как выполняется условие преобладания диагональных элементов:

$$\begin{aligned} |20,9| > |1,2| + |2,1| + |0,9|, & |21,2| > |1,2| + |1,5| + |2,5| \\ |19,8| > |2,1| + |1,5| + |1,3|, & |32,1| > |0,9| + |2,5| + |1,3|. \end{aligned}$$

Приведем систему к виду:

$$\begin{cases} x_1 = & & - 0,0574x_2 - 0,1005x_3 - 0,0431x_4 + 1,0383 \\ x_2 = -0,0566x_1 & & - 0,0708x_3 - 0,1179x_4 + 1,2953 \\ x_3 = -0,1061x_1 - 0,0758x_2 & & - 0,0657x_4 + 1,4525 \\ x_4 = -0,0280x_1 - 0,0709x_2 - 0,0405x_3 & & + 1,5489 \end{cases}$$

В качестве начального приближения возьмем элементы столбца свободных членов:

$$x_1^0 = 1,0383, \quad x_2^0 = 1,2953, \quad x_3^0 = 1,4525, \quad x_4^0 = 1,5489$$

Вычисления будем вести до тех пор, пока все величины не станут меньше

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \xi$$

Последовательно вычисляем при $k=1$:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= -0,0574x_2^0 - 0,1005x_3^0 - 0,0431x_4^0 + 1,0383 = 0,7512 \\ x_2^1 &= -0,0566x_1^0 - 0,0708x_3^0 - 0,1179x_4^0 + 1,2953 = 0,9511 \\ x_3^1 &= -0,1061x_1^0 - 0,0758x_2^0 - 0,0657x_4^0 + 1,4225 = 1,1423 \\ x_4^1 &= -0,0280x_1^0 - 0,0779x_2^0 - 0,0405x_3^0 + 1,5489 = 1,3601 \end{aligned}$$

При $k=2$:

$$x_1^2 = 0,8106, \quad x_2^2 = 1,0118, \quad x_3^2 = 1,2117, \quad x_4^2 = 1,4077.$$

при $k = 3$

$$x_1^3 = 0,7978, \quad x_2^3 = 0,9977, \quad x_3^3 = 1,1975, \quad x_4^3 = 1,3983.$$

при $k = 4$

$$x_1^4 = 0,8004, \quad x_2^4 = 1,0005, \quad x_3^4 = 1,2005, \quad x_4^4 = 1,4003.$$

Вычисляем модули разностей значений x_i^k при $k=3$ и $k=4$:

$$|x_1^4 - x_1^3| = 0,026, \quad |x_2^4 - x_2^3| = 0,028, \quad |x_3^4 - x_3^3| = 0,0030, \quad |x_4^4 - x_4^3| = 0,0020.$$

Так как все они больше заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$, продолжаем итерации.

$$\text{При } k=5: \quad x_1^5 = 0,7999, \quad x_2^5 = 0,9999, \quad x_3^5 = 1,1999, \quad x_4^5 = 1,3999.$$

Вычисляем модули разностей значений x_i^k при $k=4$ и $k=5$:

$$|x_1^5 - x_1^4| = 0,0005, \quad |x_2^5 - x_2^4| = 0,0006, \quad |x_3^5 - x_3^4| = 0,0006, \quad |x_4^5 - x_4^4| = 0,0004.$$

Все они меньше заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$, поэтому итерации заканчиваем. Приближенным решением системы являются следующие значения:

$$x_1 \approx 0,7999, \quad x_2 \approx 0,9999, \quad x_3 \approx 1,1999, \quad x_4 \approx 1,3999.$$

Для сравнения приведем точные значения переменных:

$$x_1 = 0,8, \quad x_2 = 1,0, \quad x_3 = 1,2, \quad x_4 = 1,4.$$

2. Метод Зейделя

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \boxtimes \quad \boxtimes \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \quad (1)$$

Разделим обе части каждого уравнения на диагональные элементы

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}/a_{11}x_2 + a_{13}/a_{11}x_3 + \dots + a_{1n}/a_{11}x_n = b_1/a_{11} \\ a_{21}/a_{22}x_1 + x_2 + a_{23}/a_{22}x_3 + \dots + a_{2n}/a_{22}x_n = b_2/a_{22} \\ a_{31}/a_{33}x_1 + a_{32}/a_{33}x_2 + x_3 + \dots + a_{3n}/a_{33}x_n = b_3/a_{33} \\ \boxtimes \quad \boxtimes \\ a_{n1}/a_{nn}x_1 + a_{n2}/a_{nn}x_2 + a_{n3}/a_{nn}x_3 + \dots + x_n = b_n/a_{nn} \end{array} \right.$$

Выразим из этой системы в каждом уравнении по одной неизвестной

$$\begin{cases} x_1 = b_1 / a_{11} - (a_{12} / a_{11} x_2 + a_{13} / a_{11} x_3 + \dots + a_{1n} / a_{11} x_n) \\ x_2 = b_2 / a_{22} - (a_{21} / a_{22} x_1 + a_{23} / a_{22} x_3 + \dots + a_{2n} / a_{22} x_n) \\ x_3 = b_3 / a_{33} - (a_{31} / a_{33} x_1 + a_{32} / a_{33} x_2 + a_{34} / a_{33} x_4 + \dots + a_{3n} / a_{33} x_n) \\ \boxtimes \quad \boxtimes \\ x_n = b_n / a_{nn} - (a_{n1} / a_{nn} x_1 + a_{n2} / a_{nn} x_2 + a_{n3} / a_{nn} x_3 + \dots + a_{n,n-1} / a_{nn} x_{n-1}) \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, систему уравнений можно записать в матричном виде

$$X = B' - A'X \quad (3), \quad \text{где}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B' = \begin{pmatrix} b_1 / a_{11} \\ b_2 / a_{22} \\ b_3 / a_{33} \\ \dots \\ b_n / a_{nn} \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} / a_{11} & a_{13} / a_{11} & \dots & a_{1n} / a_{11} \\ a_{21} / a_{22} & 0 & a_{23} / a_{22} & \dots & a_{2n} / a_{22} \\ a_{31} / a_{33} & a_{32} / a_{33} & 0 & \dots & a_{3n} / a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} / a_{nn} & a_{n2} / a_{nn} & a_{n3} / a_{nn} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя соответствующую полученной системе рекуррентную формулу

$$x_i^{(k)} = b'_i - \sum_{j=1}^n a'_{ij} x_j^{(k-1)} \quad (4)$$

на каждом k -том шаге получим новое значение i -той переменной.

Основная идея метода **Зейделя** состоит в том, что новые полученные значения x_i используются сразу же по мере получения для расчета следующих переменных $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}$.

Последовательно выполняя вычисления по строкам, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = b'_1 - (a'_{12} x_2^{(k)} + a'_{13} x_3^{(k)} + \dots + a'_{1n} x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = b'_2 - (a'_{21} x_1^{(k+1)} + a'_{23} x_3^{(k)} + \dots + a'_{2n} x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = b'_3 - (a'_{31} x_1^{(k+1)} + a'_{32} x_2^{(k+1)} + a'_{34} x_4^{(k)} + \dots + a'_{3n} x_n^{(k)}) \\ \boxtimes \quad \boxtimes \\ x'_n = b'_n - (a'_{n1} x_1^{(k+1)} + a'_{n2} x_2^{(k+1)} + a'_{n3} x_3^{(k+1)} + \dots + a'_{n,n-1} x_{n-1}^{(k+1)}) \end{array} \right. \quad (5)$$

Задания для самоподготовки

1. Решить систему $X = CX + d$ методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 0,00001$.

	C	d		C	d
1	$\begin{pmatrix} 0 & 0,3 & -0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & -0,21 & 0,2 \\ 0,3 & -0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,3 & -0,1 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 0 & 0,13 & -0,4 & 0,2 \\ 0,25 & 0 & -0,14 & 0,2 \\ 0,3 & -0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,3 & -0,4 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 0,27 & -0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & -0,26 & 0,2 \\ 0,3 & -0,1 & 0 & 0,5 \\ 0,2 & -0,1 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 0 & 0,23 & -0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & -0,24 & -0,1 \\ 0,2 & -0,1 & 0 & 0,2 \\ 0,23 & -0,4 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0 & 0,3 & -0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & -0,2 \\ 0,3 & -0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & -0,14 & 0,14 \\ 0,1 & 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,3 & -0,4 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 0 & 0,3 & -0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & -0,14 & -0,1 \\ 0,1 & -0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,3 & -0,4 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 0 & 0,1 & -0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & -0,2 & 0,1 \\ 0,13 & -0,2 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & -0,1 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 0 & 0,1 & -0,4 & 0,2 \\ 0,15 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & -0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & -0,14 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 0 & 0,3 & -0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,1 & -0,2 \\ 0,1 & -0,2 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$

2. Решить систему $AX = b$ методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0,00001$.

	A	b		A	b
1	$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 & -0,1 & 0,2 \\ 0,2 & -2 & 0 & -0,2 \\ 0,1 & -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 9 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & -1 & 0 & -0,2 \\ 0,1 & -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 0,23 & -0,1 & 0,2 \\ 0,2 & -1 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & -0,2 & 1 & 0 \\ 0,14 & 0,2 & -0,2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 11 & -2 \\ 11 & 2 & -2 & -19 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 2 & 0,3 & -0,1 & 0,2 \\ 0,2 & -3 & 0,1 & -0,2 \\ 0,1 & -0,52 & 2 & -0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 4 & 0,2 & -0,1 & 0,3 \\ -0,1 & 3 & 0,2 & -0,3 \\ 0,1 & -0,5 & 2 & -0,1 \\ 0,3 & 0,2 & -0,2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0,1 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$