Краснодарский университет МВД России

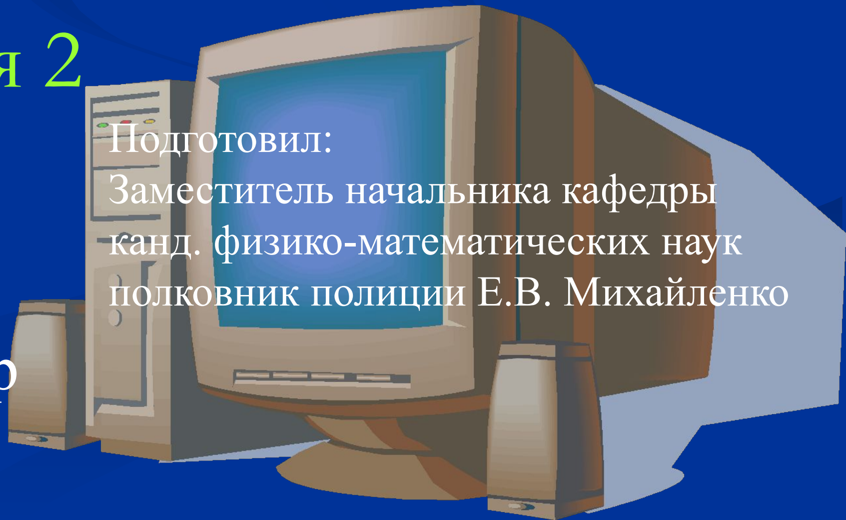
Кафедра информатики и математики

Учебно-наглядное пособие
по дисциплине «Численные методы
специальность 10.05.05 Безопасность информационных технологий в правоохранительной сфере специализация «Технологии защиты информации в правоохранительной сфере»

Тема №3
Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Лекция 2

Обсуждена и одобрена
на заседании кафедры
информатики и математики
Протокол № 20
от «01» июня 2022 г.



Подготовил:
Заместитель начальника кафедры
канд. физико-математических наук
полковник полиции Е.В. Михайленко

Краснодар
2022

Цель лекции: *рассмотреть основные понятия систем линейных алгебраических уравнений, изучить матричный метод, метод Крамера и метод Гаусса решения таких систем, рассмотреть применение метода Гаусса для нахождения обратной матрицы, ознакомиться с понятиями и методами решения однородных систем алгебраических уравнений, фундаментальной системой решений.*

Материально-техническое обеспечение: *компьютер, видеопроектор, экран.*

Учебно-методическое обеспечение: *учебно-методический материал в электронном виде, программный комплекс «**Системы линейных уравнений**».*

Основные вопросы

1. Метод итераций

2. Метод Зейделя

1. Метод итераций

Простейшим итерационным методом решения СЛАУ является ***метод простой итерации***.

Пусть дана система ***n*** линейных уравнений с ***n*** неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Для того чтобы применить метод простой итерации, необходимо систему уравнений привести к виду: ***x=Bx+c.***

Из первого уравнения системы (1) выразим неизвестную x_1:

$x_1 = a_{11}^{-1}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n)$, из второго уравнения – неизвестную x_2:

$x_2 = a_{22}^{-1}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n)$, и т. д. В результате получим систему:

$$b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad c_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i,\ j = 1,2,\ldots,n, \quad i \neq j.$$

$$\begin{cases} \begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & = & b_{12}x_2 & + & b_{13}x_3 & + & \ldots & + & b_{1,n-1}x_{n-1} & + & b_{1n}x_n & + & c_1 \\ x_2 & = & b_{21}x_1 & + & b_{23}x_3 & + & \ldots & + & b_{2,n-1}x_{n-1} & + & b_{2n}x_n & + & c_2 \\ x_3 & = & b_{31}x_1 & + & b_{32}x_2 & + & \ldots & + & b_{3,n-1}x_{n-1} & + & b_{3n}x_n & + & c_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & = & b_{n1}x_1 & + & b_{n2}x_2 & + & b_{n3}x_3 & + & \ldots & + & b_{n,b-1}x_{n-1} & + & c_n \end{array} \end{cases} \qquad (2)$$

Очевидно, что диагональные элементы матрицы А должны быть отличны от нуля. Выберем произвольно начальное приближение. Обычно в качестве первого приближения берут $x_i^0 = c_i$. Подставим начальное приближение в правую часть (2). Вычисляя левые части, получим значения

Очевидно, что диагональные элементы матрицы А должны быть отличны
нуля. Выберем произвольно начальное приближение. Обычно в качестве
рвого приближения берут $x_i^0=c_i$. Подставим начальное приближение в

Продолжая этот процесс дальше, получим последовательность приближений, причем приближение строится следующим образом:

$$\begin{cases}
x_1^{k+1} = b_{12}x_2^k + b_{13}x_3^k + \dots + b_{1,n-1}x_{n-1}^k + b_{1n}x_n^k + c_1 \\
x_2^{k+1} = b_{21}x_1^k + b_{23}x_3^k + \dots + b_{2,n-1}x_{n-1}^k + b_{2n}x_n^k + c_2 \\
x_3^{k+1} = b_{31}x_1^k + b_{32}x_2^k + \dots + b_{3,n-1}x_{n-1}^k + b_{3n}x_n^k + c_3 \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
x_n^{k+1} = b_{n1}x_1^k + b_{n2}x_2^k + b_{n3}x_3^k + \dots + b_{n,b-1}x_{n-1}^k + c_n
\end{cases} \qquad (3)$$

Последняя система (3) представляет собой расчетные формулы метода простой итерации.

Полученную систему (3) можно использовать, как итерационные формулы, учитывая, что справа в равенствах стоят значения переменных x_i, полученные на предыдущем n-1 шаге вычислений, а слева - новые значения на n щаге.

Сходимость метода простой итерации. Известно следующее достаточное условие сходимости метода простой итерации. Если элементы матрицы удовлетворяют условию:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i=1,2,\ldots,n,$$

то итерационная последовательность сходится к точному решению.

На практике для обеспечения сходимости итерационных методов необходимо, чтобы ***значения диагональных элементов матрицы СЛАУ были преобладающими по абсолютной величине по сравнению с другими элементами***.

Критерий окончания.

Если требуется найти решение с точностью ε.

Зададим начальные приближения $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}$

и вычислим правую часть каждого уравнения системы (3), получим новые приближения

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots x_n^{(1)}$$

Таким образом организуется итерационный процесс, который заканчивается по условию: вычисления ведутся до тех пор, пока все величины

$$\left| x_k^{(m+1)} - x_k^{(m)} \right| < \xi$$

Пример 1.

Решить систему уравнений методом простой итерации с точностью ε=0,001

$$\begin{cases} 20{,}9x_1 + 1{,}2x_2 + 2{,}1x_3 + 0{,}9x_4 = 21{,}70 \\ 1{,}2x_1 + 21{,}2x_2 + 1{,}5x_3 + 2{,}5x_4 = 27{,}46 \\ 2{,}1x_1 + 1{,}5x_2 + 19{,}8x_3 + 1{,}3x_4 = 28{,}76 \\ 0{,}9x_1 + 2{,}5x_2 + 1{,}3x_3 + 32{,}1x_4 = 49{,}72 \end{cases}.$$

Заметим, что метод простой итерации сходится, так как выполняется условие преобладания диагональных элементов:

$$|20{,}9| > |1{,}2| + |2{,}1| + |0{,}9|,\ |21{,}2| > |1{,}2| + |1{,}5| + |2{,}5|$$

$$|19{,}8| > |2{,}1| + |1{,}5| + |1{,}3|,\ |32{,}1| > |0{,}9| + |2{,}5| + |1{,}3|.$$

Приведем систему к виду:

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}0574x_2 - 0{,}1005x_3 - 0{,}0431x_4 + 1{,}0383 \\ x_2 = -0{,}0566x_1 - 0{,}0708x_3 - 0{,}1179x_4 + 1{,}2953 \\ x_3 = -0{,}1061x_1 - 0{,}0758x_2 - 0{,}0657x_4 + 1{,}4525 \\ x_4 = -0{,}0280x_1 - 0{,}0709x_2 - 0{,}0405x_3 + 1{,}5489 \end{cases}$$

В качестве начального приближения возьмем элементы столбца свободных членов:

$$x_1^0=1{,}0383,\quad x_2^0=1{,}2953,\quad x_3^0=1{,}4525,\quad x_4^0=1{,}5489$$

Вычисления будем вести до тех пор, пока все величины не станут меньше

$$\left|x_k^{\{m+1\}}-x_k^{\{m\}}\right|<\xi$$

Последовательно вычисляем при k=1:

$$\begin{array}{lcrcrcrcrcr}
x_1^1 & = & & - & 0{,}0574x_2^0 & - & 0{,}1005x_3^0 & - & 0{,}0431x_4^0 & + & 1{,}0383 & = & 0{,}7512\\
x_2^1 & = & -0{,}0566x_1^0 & & & - & 0{,}0708x_3^0 & - & 0{,}1179x_4^0 & + & 1{,}2953 & = & 0{,}9511\\
x_3^1 & = & -0{,}1061x_1^0 & - & 0{,}0758x_2^0 & & & - & 0{,}0657x_4^0 & + & 1{,}4225 & = & 1{,}1423\\
x_4^1 & = & -0{,}0280x_1^0 & - & 0{,}0779x_2^0 & - & 0{,}0405x_3^0 & & & + & 1{,}5489 & = & 1{,}3601
\end{array}$$

При k=2:

$$x_1^2=0{,}8106,\quad x_2^2=1{,}0118,\quad x_3^2=1{,}2117,\quad x_4^2=1{,}4077.$$

при $k=3$

$$x_1^3=0{,}7978,\quad x_2^3=0{,}9977,\quad x_3^3=1{,}1975,\quad x_4^3=1{,}3983.$$

при $k=4$

$$x_1^4=0{,}8004,\quad x_2^4=1{,}0005,\quad x_3^4=1{,}2005,\quad x_4^4=1{,}4003.$$

Вычисляем модули разностей значений x_i^k при $k=3$ и $k=4$:

$\left|x_1^4 - x_1^4\right| = 0,026$, $\left|x_2^4 - x_2^3\right| = 0,028$, $\left|x_3^4 - x_3^3\right| = 0,0030$, $\left|x_4^4 - x_4^3\right| = 0,0020$.

Так как все они больше заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$, продолжаем итерации.

При $k=5$: x_1^5=0,7999, x_2^5=0,9999, x_3^5=1,1999, x_4^5=1,3999.

Вычисляем модули разностей значений x_i^k при $k=4$ и $k=5$:

$\left|x_1^5 - x_1^4\right| = 0,0005$, $\left|x_2^5 - x_2^4\right| = 0,0006$, $\left|x_3^5 - x_3^4\right| = 0,0006$, $\left|x_4^5 - x_4^4\right| = 0,0004$.

Все они меньше заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$, поэтому итерации заканчиваем. Приближенным решением системы являются следующие значения:

$x_1 \approx 0,7999$, $x_2 \approx 0,9999$, $x_3 \approx 1,1999$, $x_4 \approx 1,3999$.

Для сравнения приведем точные значения переменных:

$x_1 = 0,8$, $x_2 = 1,0$, $x_3 = 1,2$, $x_4 = 1,4$.

2. Метод Зейделя

Пусть дана система ***n*** линейных уравнений с ***n*** неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Разделим обе части каждого уравнения на диагональные элементы

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}/a_{11}x_2 + a_{13}/a_{11}x_3 + \ldots + a_{1n}/a_{11}x_n = b_1/a_{11} \\ a_{21}/a_{22}x_1 + x_2 + a_{23}/a_{22}x_3 + \ldots + a_{2n}/a_{22}x_n = b_2/a_{22} \\ a_{31}/a_{33}x_1 + a_{32}/a_{33}x_2 + x_3 + \ldots + a_{3n}/a_{33}x_n = b_3/a_{33} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}/a_{nn}x_1 + a_{n2}/a_{nn}x_2 + a_{n3}/a_{nn}x_3 + \ldots + x_n = b_n/a_{nn} \end{cases}$$

Выразим из этой системы в каждом уравнении по одной неизвестной

$$\begin{cases} x_1 + = b_1 / a_{11} - (a_{12} / a_{11} x_2 + a_{13} / a_{11} x_3 + \ldots + a_{1n} / a_{11} x_n) \\ x_2 = b_2 / a_{22} - (a_{21} / a_{22} x_1 + a_{23} / a_{22} x_3 + \ldots + a_{2n} / a_{22} x_n) \\ x_3 = b_3 / a_{33} - (a_{31} / a_{33} x_1 + a_{32} / a_{33} x_2 + a_{34} / a_{33} x_4 + \ldots + a_{3n} / a_{33} x_n) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n = b_n / a_{nn} - (a_{n1} / a_{nn} x_1 + a_{n2} / a_{nn} x_2 + a_{n3} / a_{nn} x_3 + \ldots + a_{n,n-1} / a_{nn} x_{n-1}) \end{cases} \qquad (2)$$

Таким образом, систему уравнений можно записать в матричном виде

$$\boxed{X = B' - A'X} \qquad (3)$$

, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B' = \begin{pmatrix} b_1 / a_{11} \\ b_2 / a_{22} \\ b_3 / a_{33} \\ \\ b_n / a_{nn} \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} / a_{11} & a_{13} / a_{11} & \ldots & a_{1,n} / a_{11} \\ a_{21} / a_{22} & 0 & a_{23} / a_{22} & \ldots & a_{2n} / a_{22} \\ a_{31} / a_{33} & a_{32} / a_{33} & 0 & \ldots & a_{3n} / a_{33} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} / a_{nn} & a_{n2} / a_{nn} & a_{n3} / a_{nn} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя соответствующую полученной системе рекуррентную формулу

$$x_i^{(k)} = b_i' - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}' x_j^{(k-1)} \qquad (4)$$

на каждом ***k***-том шаге получим новое значение ***i***-той переменной.

Основная идея метода **Зейделя** состоит в том, что новые полученные значения $\boldsymbol{x_i}$ используются сразу же по мере получения для расчета следующих переменных $\boldsymbol{x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}}$.

Последовательно выполняя вычисления по строкам, получим:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_1' - (a_{12}' x_2^{(k)} + a_{13}' x_3^{(k)} + \ldots + a_{1n} x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = b_2' - (a_{21}' x_1^{(k+1)} + a_{23}' x_3^{(k)} + \ldots + a_{2n}' x_n) \\ x_3^{(k+1)} = b_3' - (a_{31}' x_1^{(k+1)} + a_{32}' x_2^{(k+1)} + a_{34}' x_4^{(k)} + \ldots + a_{3n}' x_n^{(k)}) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n' = b_n' - (a_{n1}' x_1^{(k+1)} + a_{n2}' x_2^{(k+1)} + a_{n3}' x_3^{(k+1)} + \ldots + a_{n,n-1}' x_{n-1}^{(k+1)}) \end{cases} \qquad (5)$$

Задания для самоподготовки

1. Решить систему $x = Cx + d$ методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 0{,}00001$.

	C	d		C	d
1	$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & -0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0 & -0{,}21 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & -0{,}1 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}13 & -0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0 & -0{,}14 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & -0{,}1 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}4 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}27 & -0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0 & -0{,}26 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & -0{,}1 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & -0{,}1 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}23 & -0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0 & -0{,}24 & -0{,}1 \\ 0{,}2 & -0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}23 & -0{,}4 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & -0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}3 & -0{,}1 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0 & -0{,}14 & 0{,}14 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}4 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & -0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0 & -0{,}14 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & -0{,}1 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}4 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0 & -0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}13 & -0{,}2 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & -0{,}1 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & -0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & -0{,}1 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & -0{,}14 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & -0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & -0{,}2 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$

2. Решить систему $Ax = b$ методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0,00001$.

	A	b		A	b
1	$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 & -0,1 & 0,2 \\ 0,2 & -2 & 0 & -0,2 \\ 0,1 & -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$	**2**	$\begin{pmatrix} 9 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & -1 & 0 & -0,2 \\ 0,1 & -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$	**4**	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 0,23 & -0,1 & 0,2 \\ 0,2 & -1 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & -0,2 & 1 & 0 \\ 0,14 & 0,2 & -0,2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	**6**	$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 11 & -2 \\ 11 & 2 & -2 & -19 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 2 & 0,3 & -0,1 & 0,2 \\ 0,2 & -3 & 0,1 & -0,2 \\ 0,1 & -0,52 & 2 & -0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$	**8**	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 4 & 0,2 & -0,1 & 0,3 \\ -0,1 & 3 & 0,2 & -0,3 \\ 0,1 & -0,5 & 2 & -0,1 \\ 0,3 & 0,2 & -0,2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0,1 \end{pmatrix}$	**10**	$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$