ТРИГОНОМЕТРИЯ

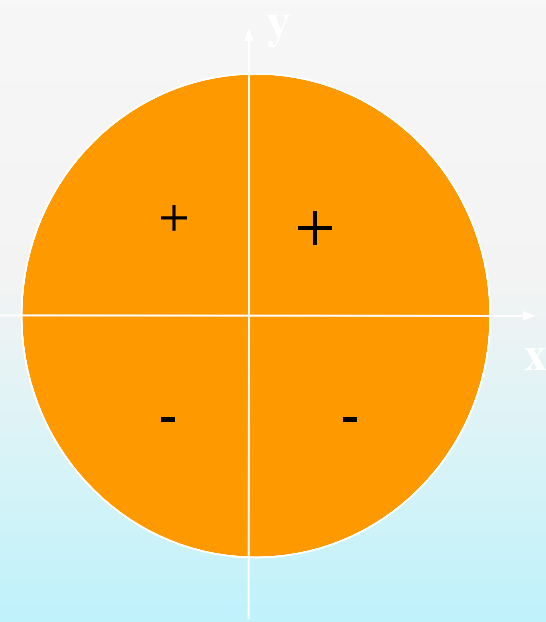
ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Тождественные преобразования тригонометрических выражений опираются на следующие основные формулы:

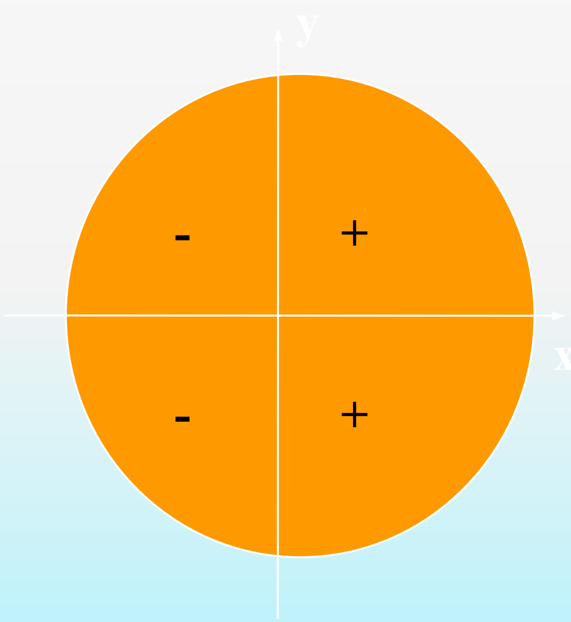
- *Формулы для тригонометрических функций одного и того же аргумента.*
- *Формулы сложения аргументов.*
- *Формулы двойного угла.*
- *Формулы половинного аргумента.*
- *Формулы преобразования суммы(разности) тригонометрических функций в произведение.*
- *Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму(разность).*
- *Формулы приведения.*

ЗНАКИ Sin, Cos, Tg, Ctg.

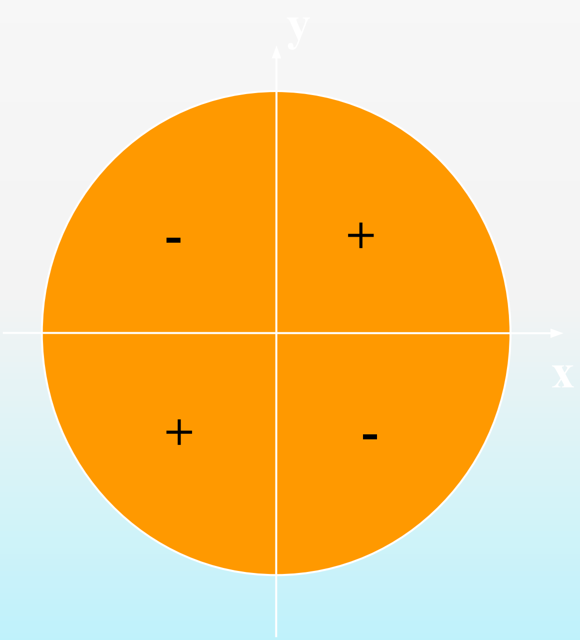
Знаки sin



Знаки cos



Знаки tg, ctg



$$\cos(-45^0) = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg(-60^0) = -tg\,60^0 = -\sqrt{3}$$

$$\sin 405^0 = \sin(360^0 + 45^0) = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(2\pi + 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(-765^0) = -\sin 765^0 = -\sin(2 \cdot 360^0 + 45^0) = -\sin 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ctg(-\frac{\pi}{6}) = -ctg\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$tg\frac{17\pi}{4} = tg(\frac{16\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = tg(4\pi + \frac{\pi}{4}) = tg\frac{\pi}{4} = 1$$

$$ctg(-\frac{13\pi}{6}) = -ctg(\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = -ctg(2\pi + \frac{\pi}{6}) = -ctg\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$\cos(-\frac{25\pi}{6}) = \cos\frac{25\pi}{6} = \cos(\frac{24\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Основные тригонометрические тождества

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

2. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

3. $\operatorname{tg}\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

4. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

5. $1 + c\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Основные тригонометрические тождества

Дано:

$$\sin\alpha = -\frac{3}{5}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

Вычислить $tg\alpha$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - (-\frac{3}{5})^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25};$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \quad \text{или} \quad \cos\alpha = -\frac{4}{5},$$

так как по условию $\alpha \in$ III четверти,

а $\cos\alpha < 0$ в III четверти,

то берем $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$,

тогда $tg\alpha = -\frac{3}{5} \div (-\frac{4}{5}) = \frac{3}{4}$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Формулы сложения

Пример 1. Вычислить $\cos 18° \cdot \cos 12° - \sin 18° \cdot \sin 12°$

$$\cos 18° \cdot \cos 12° - \sin 18° \cdot \sin 12° = \cos(18° + 12°) =$$

$$= \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Формулы сложения

Пример 2. Вычислить $\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{3\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$

$$\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{3\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\sin(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{12})=$$

$$=\sin\frac{10\pi}{12}=\sin\frac{5\pi}{6}=\sin(\frac{6\pi}{6}-\frac{\pi}{6})=$$

$$=\sin(\pi-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

Формулы сложения

Пример 3. Упростить: $\dfrac{\cos 4\alpha \cos\alpha + \sin 4\alpha \sin\alpha}{\sin 3\alpha}$

$$\frac{\cos 4\alpha \cos\alpha + \sin 4\alpha \sin\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{\cos(4\alpha - \alpha)}{\sin 3\alpha} =$$

$$\frac{\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha} = ctg 3\alpha$$

Пример 1

$$\textit{Вычислить}: \sin 75^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) =$$

$$= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Пример 2

$$\textit{Вычислить}: \cos 15^\circ$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) =$$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Примеры:

$$\sin 4x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$2\sin 10^0 \cdot \cos 10^0 = \sin 20^0$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Примеры:

$$\cos 100^0 = \cos^2 50^0 - \sin^2 50^0$$

$$\cos 8\alpha = \cos^2 4\alpha - \sin^2 4\alpha$$

$$\cos^2 25^0 - \sin^2 25^0 = \cos 50^0$$

Формулы двойного угла

Упростить:

$$\frac{\sin 80^0}{2\cos 40^0} = \frac{2\sin 40^0 \cos 40^0}{2\cos 40^0} = \sin 40^0$$

$$(\cos\frac{\alpha}{8} - \sin\frac{\alpha}{8})(\cos\frac{\alpha}{8} + \sin\frac{\alpha}{8}) = \cos^2\frac{\alpha}{8} - \sin^2\frac{\alpha}{8} = \cos 2\cdot\frac{\alpha}{8} = \cos\frac{\alpha}{4}$$

Литература

- Богомолов, Н. В. Математика : Учебник Для СПО . – 5-е изд, пер. и доп . – Электрон. дан. – Москва : Издательство Юрайт, 2019 . – 401 . – (Профессиональное образование) . – Режим доступа : https://www.biblio-online.ru/bcode/449006, httpshttps://https://wwwhttps://www.https://www.biblio https://www.biblio-https://www.biblio-online https://www.biblio-online.https://www.biblio-online.ruhttps://www.biblio-online.ru/https://www.biblio-online.ru/bookhttps://www.biblio-online.ru/book/https://www.biblio-online.ru/book/coverhtt