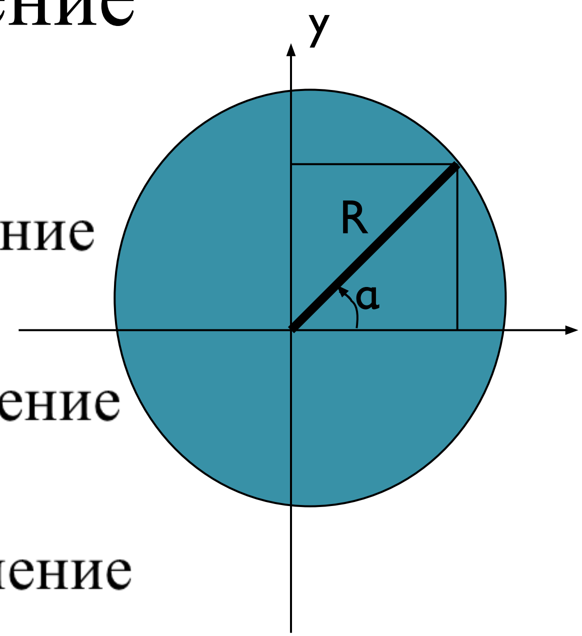
Основные тригонометрические тождества

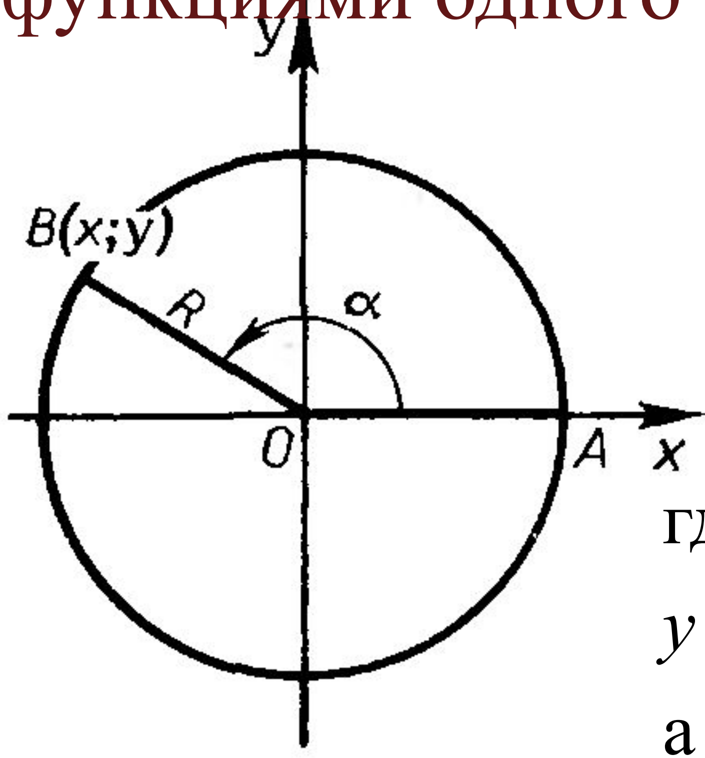
Основные тригонометрические формулы

Давайте вспомним определение sin, cos, tg, ctg.



- **Синусом** угла α называется отношение ординаты точки В (у) к R.
- **Косинусом** угла α называется отношение абсциссы точки В (х) к R.
- **Тангенсом** угла α называется отношение ординаты точки В к ее абсциссе ($\frac{y}{x}$).
- **Котангенсом** угла α называется отношение абсциссы точки В к ее ординате ($\frac{x}{y}$).

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла



По определению:

$$\sin\alpha = \frac{y}{R}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{R},$$

где x – абсцисса точки B,

y ее ордината,

а R – длина радиуса OA.

$$x = R\cos\alpha, \qquad y = R\sin\alpha.$$

Точка B принадлежит окружности, ее координаты   удовлетворяют уравнению

$$x^2+y^2=R^2.$$

Подставим *x* и *y* значения из (*), получим

$$(R\cos\alpha)^2+(R\sin\alpha)^2=R^2.$$

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.}\qquad(*)$$

Основные тригонометрические тождества

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.} \qquad (1)$$

Это основное тригонометрическое тождество.

Из (1) следует $, 1 - sin^2 t = cos^2 t$

$$1 - cos^2 t = sin^2 t$$

Равенство (1) верно при любых значениях α.

Основные тригонометрические тождества

По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$. Так как $y = R\sin\alpha$, $x = R\cos\alpha$, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.} \qquad (2)$$

Аналогично

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{R\cos\alpha}{R\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

т. е.

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.} \qquad (3)$$

Основные тригонометрические тождества

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1. \qquad (4)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \qquad (5)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \qquad (6)$$

Доказательство:

$$\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (2)$$

$$\mathbf{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (3)$$

С помощью формул (1) — (3) можно получить другие формулы, выражающие соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла.

Из равенств (2) и (3) получим:

$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1,$$

т. е.

$$\mathbf{tg}\,\alpha \cdot \mathbf{ctg}\,\alpha = 1. \qquad (4)$$

Доказательство:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (1)$$

Разделив обе части равенства (1) на $\cos^2\alpha$, получим:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

т. е.

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (5)$$

Доказательство:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (1)$$

Если обе части равенства (1) разделить на $\sin^2\alpha$, то будем иметь:

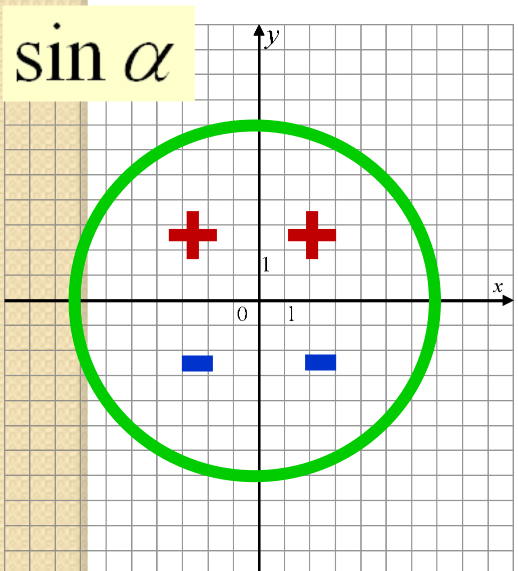
$$1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha},$$

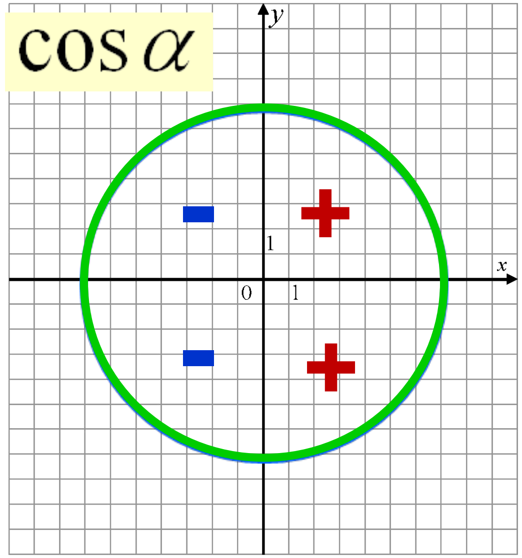
т. е.

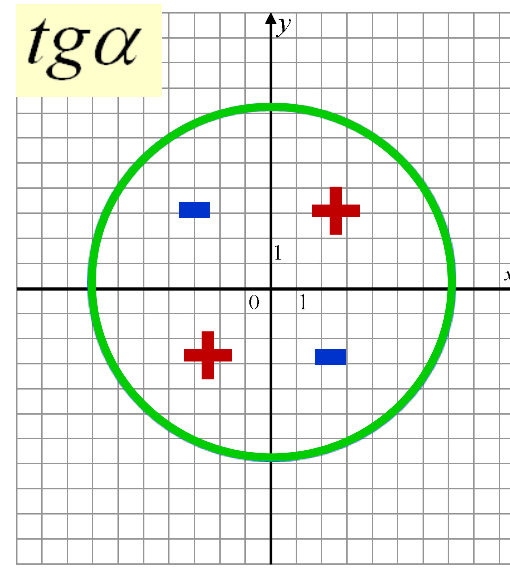
$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (6)$$

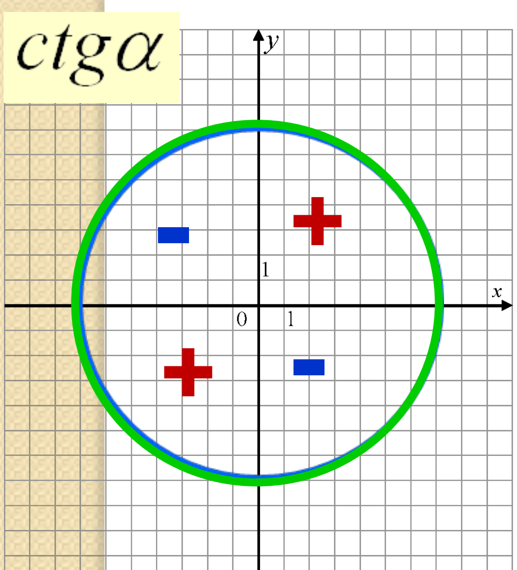
Равенство (5) верно, когда $\cos\alpha \neq 0$, а равенство (6), когда $\sin\alpha \neq 0$.

Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса в координатных четвертях









$\sin 68^\circ > 0$

$\sin 153^\circ > 0$

$\sin 249^\circ < 0$

$\sin 315^\circ < 0$

$\cos 76^\circ > 0$

$\cos 236^\circ < 0$

$tg 127^\circ < 0$

$ctg 195^\circ > 0$

П р и м е р . Найдем $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Найдем сначала $\cos\alpha$. Из формулы $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ получаем, что $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$.

Так как α является углом II четверти, то его косинус отрицателен. Значит,

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{25}{169}}=-\frac{12}{13}.$$

Зная синус и косинус угла α, можно найти его тангенс:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12}.$$

Для отыскания котангенса угла α удобно воспользоваться формулой $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$. Имеем:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{12}{5}=-2\frac{2}{5}.$$

Итак,

$$\cos\alpha=-\frac{12}{13},\ \operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12},\ \operatorname{ctg}\dot{\alpha}=-2\frac{2}{5}.$$

Формулы, которые нужно запомнить!

1 $sin^2t + cos^2t = 1$ $1 - sin^2t = cos^2t$

$1 - cos^2t = sin^2t$

2. $tgt = \dfrac{sint}{cost}$

3. $ctgt = \dfrac{cost}{sint}$

4. $tgt \cdot ctgt = 1$

5. $tg^2t + 1 = \dfrac{1}{cos^2t}$

6. $ctg^2t + 1 = \dfrac{1}{sin^2t}$

Задание 1

Упростите выражения:

а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

Решение:

а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Задание 2

Преобразуйте выражения:

а) $\sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha - 1$;

в) $\dfrac{\sin^2\alpha - 1}{1 - \cos^2\alpha}$.

Решение:

а) $\sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha.$

б) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha - 1 = 1 - 1 = 0.$

В) $\dfrac{\sin^2\alpha - 1}{1 - \cos^2\alpha} = \dfrac{1 - \cos^2\alpha - 1}{1 - \cos^2\alpha} = - \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = -ctg^2\alpha$

Задание 3

Вычислите значения тригонометрических функция угла ***в*** зная, что:

$$\sin\beta = \frac{40}{41} \text{ и } \frac{\pi}{2} < \beta < \pi.$$

Решение:

1) $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, значит, $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$; $\cos^2\beta = 1 - \left(\frac{40}{41}\right)^2 = \frac{81}{1681}$

$\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{81}{1681}} = \pm\frac{9}{41}$, но $\beta \in$ II четверти; $\cos\beta < 0$, поэтому $\cos\beta = -\frac{9}{41}$.

2) $\mathrm{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$; $\mathrm{tg}\beta = \frac{40}{41} : \left(-\frac{9}{41}\right) = -\frac{40\cdot 41}{41\cdot 9} = -4\frac{4}{9}$.

3) $\mathrm{ctg}\beta = \frac{1}{\mathrm{tg}\beta}$; $\mathrm{ctg}\beta = \frac{1}{-\frac{40}{9}} = -\frac{9}{40}$.

4. Закрепление

Пример 1. Упростить выражение

$$(1+tg^2\alpha)\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\cos^4\alpha}+\sin\alpha$$

$$(1+tg^2\alpha)\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\cos^4\alpha}+\sin\alpha=$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\cos^4\alpha}+\sin\alpha=$$

$$\frac{1}{\cos^4\alpha}-\frac{1}{\cos^4\alpha}+\sin\alpha=\quad\sin\alpha$$

Пример 2. Найдите значение

$\cos\alpha,\ tg\alpha,\ ctg\alpha$ *дляострого угла* α, если:

$$1)\ \sin\alpha = \frac{4}{5}$$

Пример 2. Найдите значение $\cos\alpha,\ tg\alpha,\ ctg\alpha$ *для острого угла* α, если:

$$1)\ \sin\alpha = \frac{4}{5}$$

1) (cos) Используя равенство $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ получим

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \implies \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

Подставим значения, получим

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25-16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

2) (tg) Используя равенство

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

и, подставив значения, получим

$$tg\alpha = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

3) (ctg) Используя равенство

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$ и, подставив значения, получим

$$т.к.\ \sin\alpha = \frac{4}{5},\ \cos = \frac{3}{5}\ ,\text{то}$$

$$ctg\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

- Выполнить ДЗ:
- 1-8 номер в списке делают 1 вариант,
- 9-17 номер в списке делают 2 вариант,
- 18-25 номер в списке делают 3 вариант.

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3