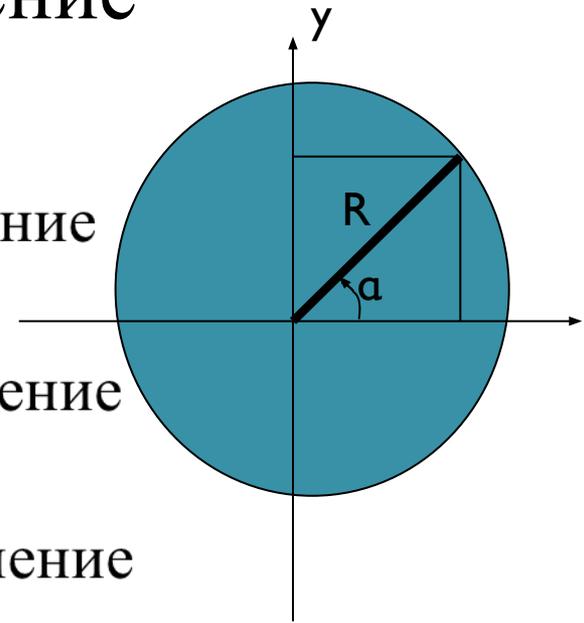


*Основные
тригонометрические
тождества*

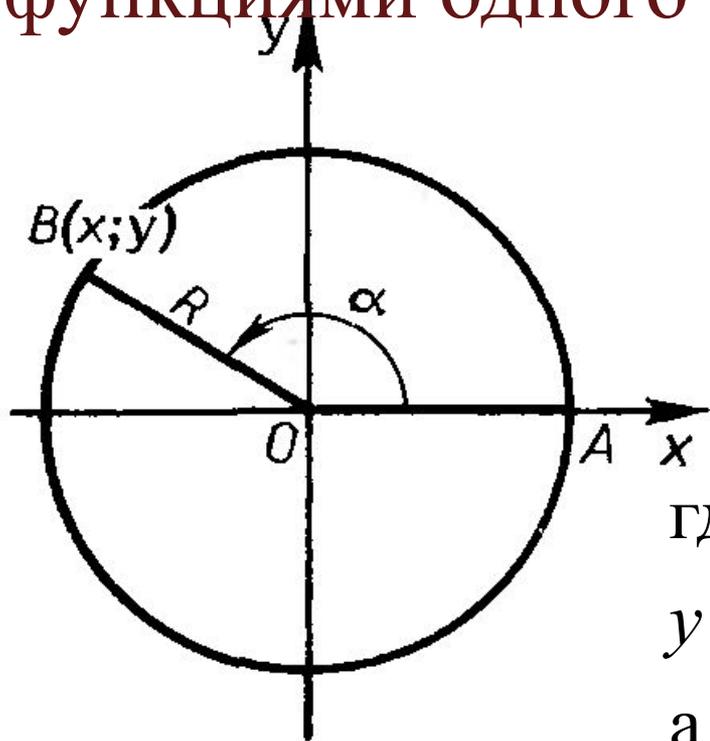
Основные тригонометрические формулы

Давайте вспомним определение \sin , \cos , tg , ctg .

- **Синусом** угла α называется отношение ординаты точки В (y) к R .
- **Косинусом** угла α называется отношение абсциссы точки В (x) к R .
- **Тангенсом** угла α называется отношение ординаты точки В к ее абсциссе $(\frac{y}{x})$.
- **Котангенсом** угла α называется отношение абсциссы точки В к ее ординате $(\frac{x}{y})$.



Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла



По определению:

$$\sin \alpha = \frac{y}{R}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{R},$$

где x – абсцисса точки B ,
 y ее ордината,

а R – длина радиуса OA .

$$x = R \cos \alpha, \quad y = R \sin \alpha.$$

Точка В принадлежит окружности, ее координаты удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Подставим x и y значения из (*), получим

$$(R \cos \alpha)^2 + (R \sin \alpha)^2 = R^2.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

(*)

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (1)$$

Это основное тригонометрическое тождество.

Из (1) следует $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$

$$1 - \cos^2 t = \sin^2 t$$

Равенство (1) верно при любых значениях α .

Основные тригонометрические тождества

По определению $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$. Так как $y = R \sin \alpha$, $x = R \cos \alpha$,
то

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{R \sin \alpha}{R \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (2)$$

Аналогично

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{R \cos \alpha}{R \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

т. е.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

Основные тригонометрические тождества

$$\mathbf{tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = 1.}$$

(4)

$$\mathbf{1 + tg^2\ \alpha = \frac{1}{\cos^2\ \alpha} .}$$

(5)

$$\mathbf{1 + ctg^2\ \alpha = \frac{1}{\sin^2\ \alpha} .}$$

(6)

Доказательство:

$$\mathbf{tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} .} \quad \mathbf{(2)}$$

$$\mathbf{ctg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} .} \quad \mathbf{(3)}$$

С помощью формул (1) — (3) можно получить другие формулы, выражающие соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла.

Из равенств (2) и (3) получим:

$$\mathbf{tg \alpha \cdot ctg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1,}$$

т. е.

$$\mathbf{tg \alpha \cdot ctg \alpha = 1.} \quad \mathbf{(4)}$$

Доказательство:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (1)$$

Разделив обе части равенства (1) на $\cos^2 \alpha$, получим:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

т. е.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \quad (5)$$

Доказательство:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (1)$$

Если обе части равенства (1) разделить на $\sin^2 \alpha$, то будем иметь:

$$1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

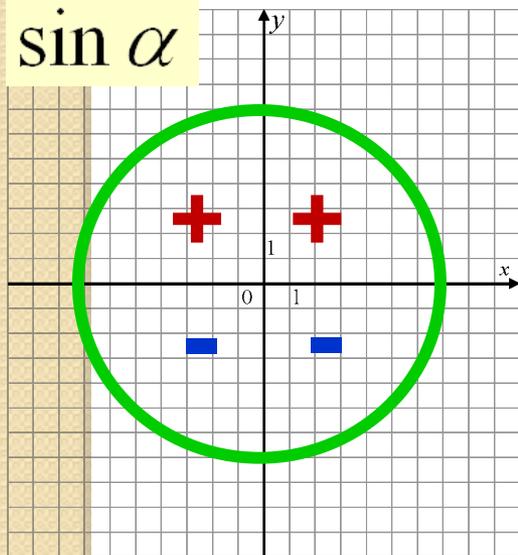
т. е.

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (6)$$

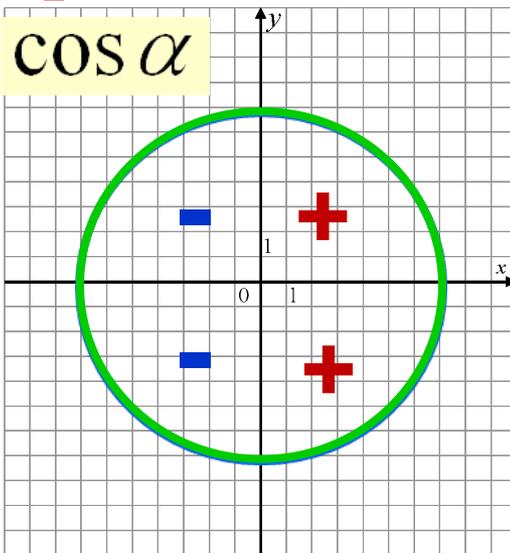
Равенство (5) верно, когда $\cos \alpha \neq 0$, а равенство (6), когда $\sin \alpha \neq 0$.

Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса в координатных четвертях

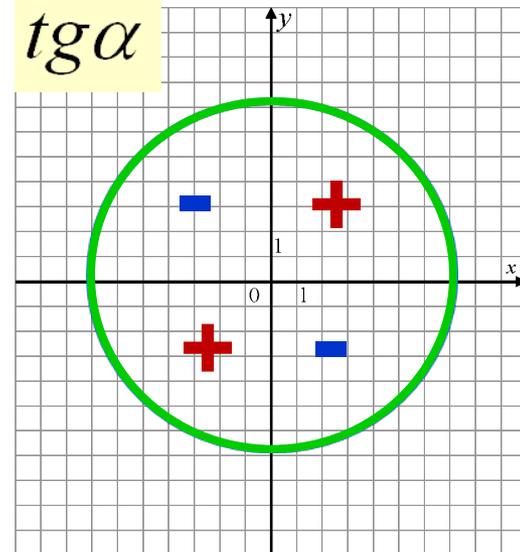
$\sin \alpha$



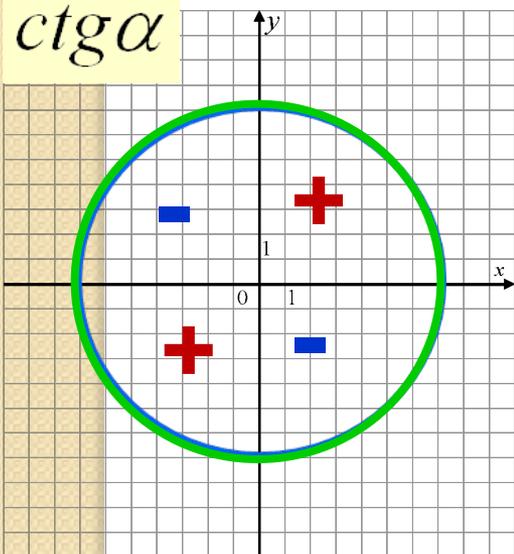
$\cos \alpha$



$\operatorname{tg} \alpha$



$\operatorname{ctg} \alpha$



$$\sin 68^\circ > 0$$

$$\sin 153^\circ > 0$$

$$\sin 249^\circ < 0$$

$$\sin 315^\circ < 0$$

$$\cos 76^\circ > 0$$

$$\cos 236^\circ < 0$$

$$\operatorname{tg} 127^\circ < 0$$

$$\operatorname{ctg} 195^\circ > 0$$

Пример . Найдем $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если известно, что $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Найдем сначала $\cos \alpha$. Из формулы $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ получаем, что $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$.

Так как α является углом II четверти, то его косинус отрицателен. Значит,

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}.$$

Зная синус и косинус угла α , можно найти его тангенс:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}.$$

Для отыскания котангенса угла α удобно воспользоваться формулой $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$. Имеем:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{12}{5} = -2 \frac{2}{5}.$$

Итак,

$$\cos \alpha = -\frac{12}{13}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = -2 \frac{2}{5}.$$

Формулы, которые нужно запомнить!

$$1 \quad \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$$

$$2. \operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$1 - \cos^2 t = \sin^2 t$$

$$3. \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

$$4. \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$$

$$5. \operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$6. \operatorname{ctg}^2 t + 1 = \frac{1}{\sin^2 t}$$

Задание I

Упростите выражения:

а) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha$;

б) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

Решение:

$$\text{а) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} ;$$

$$\text{б) } \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} .$$

Задание 2

Преобразуйте выражения:

а) $\sin \alpha \operatorname{ctg} \alpha$;

б) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - 1$;

в) $\frac{\sin^2 \alpha - 1}{1 - \cos^2 \alpha}$.

Решение:

а) $\sin \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \cos \alpha$.

б) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - 1 = 1 - 1 = 0$.

в) $\frac{\sin^2 \alpha - 1}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha - 1}{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -\operatorname{ctg}^2 \alpha$

Задание 3

Вычислите значения тригонометрических функция угла β зная, что:

$$\sin \beta = \frac{40}{41} \text{ и } \frac{\pi}{2} < \beta < \pi.$$

Решение:

$$1) \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1, \text{ значит, } \cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta; \cos^2 \beta = 1 - \left(\frac{40}{41}\right)^2 = \frac{81}{1681}$$

$$\cos \beta = \pm \sqrt{\frac{81}{1681}} = \pm \frac{9}{41}, \text{ но } \beta \in \text{II четверти; } \cos \beta < 0, \text{ поэтому } \cos \beta = -\frac{9}{41}.$$

$$2) \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}; \operatorname{tg} \beta = \frac{40}{41} : \left(-\frac{9}{41}\right) = -\frac{40 \cdot 41}{41 \cdot 9} = -4 \frac{4}{9}.$$

$$3) \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}; \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{-\frac{40}{9}} = -\frac{9}{40}.$$

4. Закрепление

Пример 1. Упростить выражение

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^4 \alpha} + \sin \alpha$$

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^4 \alpha} + \sin \alpha =$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^4 \alpha} + \sin \alpha =$$

$$\frac{1}{\cos^4 \alpha} - \frac{1}{\cos^4 \alpha} + \sin \alpha = \sin \alpha$$

Пример 2. Найдите значение

$\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ для острого угла α , если:

$$1) \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

Пример 2. Найдите значение $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ для острого угла α , если:

$$1) \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

1) (cos) Используя равенство $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ получим

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

Подставим значения, получим

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25 - 16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

2) (tg) Используя равенство

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

и, подставив значения, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

3) (ctg) Используя равенство

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{и, подставив значения, получим}$$

$$\text{т.к. } \sin\alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad \text{то}$$

$$ctg\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

- Выполнить ДЗ:
- 1-8 номер в списке делаю 1 вариант,
- 9-17 номер в списке делаю 2 вариант,
- 18-25 номер в списке делаю 3 вариант.

Вариант 1

Вариант 2

Вариант 3