

2) *Характеристическое уравнение имеет действительные кратные корни.*

В этом случае каждому вещественному корню k_i кратности m соответствует в общем решении слагаемое следующего вида

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_m x^{m-1}) e^{k_i x}.$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$(k + 1)^3 = 0,$$

то есть $k = -1$ – корень кратности 3. Следовательно, фундаментальная система решений состоит из функций

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = x e^{-x}, y_3 = x^2 e^{-x},$$

а общее решение можно записать в виде

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{-x}.$$

3) *Корни характеристического уравнения комплексные.*

3.1 *Дифференциальное уравнение второго порядка.*

В данном случае корни характеристического уравнения образуют пару комплексно сопряженных чисел

$$k_1 = \alpha + \beta i \text{ и } k_2 = \alpha - \beta i, \quad i^2 = -1,$$

фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x},$$

общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

Можно доказать, что фундаментальную систему решений можно записать в виде

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

а общее решение можно записать в виде

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 10 = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 - 6k + 10 = 0.$$

Следовательно, корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = 3 \pm i.$$

Фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1 = e^{3x} \cos x, \quad y_2 = e^{3x} \sin x.$$

Поэтому общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$y = e^{3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

3.2 Дифференциальное уравнение третьего и более высокого порядка

В данном случае каждой паре комплексно сопряженных корней $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$ кратности m соответствуют $2m$ частных решений

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, \quad x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, \quad x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^4 + 8k^2 + 16 = 0 \text{ или } (k^2 + 4)^2 = 0.$$

Следовательно, $k = \pm 2i$ – корни характеристического уравнения кратности $m = 2$, фундаментальная система решений имеет вид

$$\cos 2x, \quad x \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad x \sin 2x,$$

общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x.$$

§ 6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Частное и общее решения. Методы нахождения частного решения

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) n -го порядка и соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ)

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (6.1)$$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \quad (6.2)$$

Теорема. Общее решение y_n линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ) равно сумме общего решения y_o соответствующего линейного однородного уравнения (ЛОДУ) и какого-либо частного решения $y_ч$ линейного неоднородного уравнения:

$$y_n = y_o + y_ч. \quad (6.3)$$

Основной задачей в данном случае является нахождение частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ).

Подбор частного решения для линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (метод неопределенных коэффициентов).

В случае постоянных коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_{n-1} и некоторых видов правой части линейного неоднородного дифференциального уравнения (6.1) можно подобрать частное решение в виде функции с неопределенными коэффициентами, которые определяются путем подстановки этой функции в уравнение (6.1). Рассмотрим эти случаи.

1) $f(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s, (a_n \neq 0).$

В этом случае существует частное решение уравнения (6.1), имеющее вид:

$$y_{\text{ч}} = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s, (a_n \neq 0).$$

Действительно, подставив эту функцию в уравнение (6.1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x , получим имеющую единственное решение систему линейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов B_0, B_1, \dots, B_s .

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + 3y' + 2y = 3x - 5$.

1) Находим y_0 . Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 3k + 2 = 0$, следовательно, его корни имеют вид $k_1 = -1, k_2 = -3$.
Общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.

2) Находим $y_{\text{ч}}$. Будем искать частное решение в виде

$$y_{\text{ч}} = Ax + B.$$

Тогда получим

$$y'_{\text{ч}} = A, \quad y''_{\text{ч}} = 0.$$

Подставляя выражения для $y_{\text{ч}}, y'_{\text{ч}}, y''_{\text{ч}}$ в заданное дифференциальное уравнение, получим уравнение:

$$3A + 2Ax + 2B = 3x - 5,$$

из которого, после приравнивая коэффициентов при степенях x , имеем систему линейных уравнений $2A = 3, 3A + 2B = -5$. Решение системы дает

$$A = \frac{3}{2}, \quad B = -\frac{19}{4}, \quad y_{\text{ч}} = \frac{3}{2}x - \frac{19}{4}.$$

3) Общее решение $y_{\text{н}}$ исходного уравнения имеет вид:

$$y_{\text{н}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{19}{4}.$$

2) $a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-\alpha+1} = 0, a_{n-\alpha} \neq 0$, т.е. $k=0$ является α -кратным корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение имеет вид:

$$y_{\text{ч}} = (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \dots + B_s) x^\alpha.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' - 3y'' = 2x^2 + 5$.

1) Находим y_0 . Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^3 - 3k^2 = 0,$$

его корни имеют вид

$$k_1 = 0 \text{ кратность } \alpha = 2, k_2 = 3,$$

общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = (C_1 + C_2 x) + C_3 e^{3x}.$$

2) Находим $y_{\text{ч}}$. Будем искать $y_{\text{ч}}$ в виде

$$y_{\text{ч}} = (Ax^2 + Bx + C)x^2 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2,$$

Тогда получим

$$y'_{\text{ч}} = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, \quad y''_{\text{ч}} = 12Ax^2 + 6Bx + 2C, \quad y'''_{\text{ч}} = 24Ax + 6B.$$

Подставляя выражения для $y_{\text{ч}}, y'_{\text{ч}}, y''_{\text{ч}}, y'''_{\text{ч}}$ в заданное дифференциальное уравнение, получим уравнение:

$$24Ax + 6B - 36Ax^2 - 18Bx - 6C = 2x^2 + 5,$$

из которого, после приравнивая коэффициентов при степенях x , имеем систему линейных уравнений

$$-36A = 2,$$

$$24A - 18B = 0,$$

$$6B - 6C = 0.$$

Решая эту систему, получаем

$$A = -\frac{1}{18}, B = -\frac{2}{27}, C = -\frac{49}{54}.$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

$$y_{\text{н}} = C_1 + C_2x + C_3e^{3x} - \frac{1}{18}x^4 - \frac{2}{27}x^3 - \frac{49}{54}x^2.$$