2) Характеристическое уравнение имеет действительные кратные корни.

В этом случае каждому вещественному корню k_i кратности m соответствует в общем решении слагаемое следующего вида

$$\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_m x^{m-1}\right)e^{k_i x}.$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$(k+1)^3 = 0,$$

то есть $k = -1$ – корень кратности 3. Следовательно, фундаментальная система решений состоит из функций

$$y_1 = e^{-x},\ y_2 = xe^{-x},\ y_3 = x^2 e^{-x},$$

а общее решение можно записать в виде

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{-x}.$$

3) Корни характеристического уравнения комплексные.

3.1 Дифференциальное уравнение второго порядка.

В данном случае корни характеристического уравнения образуют пару комплексно сопряженных чисел

$$k_1 = \alpha + \beta i \text{ и } k_2 = \alpha - \beta i, \quad i^2 = -1,$$

фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x},$$

общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Можно доказать, что фундаментальную систему решений можно записать в виде

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

а общее решение можно записать в виде

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right).$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 10 = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 - 6k + 10 = 0.$$

Следовательно, корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = 3 \pm i.$$

Фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1 = e^{3x} \cos x, \quad y_2 = e^{3x} \sin x.$$

Поэтому общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

3.2 Дифференциальное уравнение третьего и более высокого порядка

В данном случае каждой паре комплексно сопряженных корней $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$ кратности m соответствуют $2m$ частных решений

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^4 + 8k^2 + 16 = 0 \text{ или } \left(k^2 + 4\right)^2 = 0.$$

Следовательно, $k = \pm 2i$ – корни характеристического уравнения кратности $m = 2$, фундаментальная система решений имеет вид

$$\cos 2x, \quad x\cos 2x, \quad \sin 2x, \quad x\sin 2x,$$

общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x.$$

§ 6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Частное и общее решения. Методы нахождения частного решения

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) n-го порядка и соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ)

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{6.1}$$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \tag{6.2}$$

Теорема. Общее решение $y_{\text{н}}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ) равно сумме общего решения $y_{\text{о}}$ соответствующего линейного однородного уравнения (ЛОДУ) и какого-либо частного решения $y_{\text{ч}}$ линейного неоднородного уравнения:

$$\boxed{y_{\text{н}} = y_{\text{о}} + y_{\text{ч}}}. \tag{6.3}$$

Основной задачей в данном случае является нахождение частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ).

Подбор частного решения для линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (метод неопределенных коэффициентов).

В случае постоянных коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ и некоторых видов правой части линейного неоднородного дифференциального уравнения (6.1) можно подобрать частное решение в виде функции с неопределенными коэффициентами, которые определяются путем подстановки этой функции в уравнение (6.1). Рассмотрим эти случаи.

1) $$f(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s, \quad (a_n \neq 0).$$

В этом случае существует частное решение уравнения (6.1), имеющее вид:

$$y_{\text{ч}} = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s, \quad (a_n \neq 0).$$

Действительно, подставив эту функцию в уравнение (6.1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим имеющую единственное решение систему линейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $B_0, B_1, \ldots, B_s$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + 3y' + 2y = 3x - 5$.

1) Находим y_0. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 3k + 2 = 0$, следовательно, его корни имеют вид $k_1 = -1,\ k_2 = -3$, общее решение однородного уравнения имеет вид $y_о = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.

2) Находим $y_ч$. Будем искать частное решение в виде

$$y_ч = Ax + B.$$

Тогда получим $$y'_ч = A, \quad y''_ч = 0.$$

Подставляя выражения для $y_ч, y'_ч, y''_ч$ в заданное дифференциальное уравнение, получим уравнение:

$$3A + 2Ax + 2B = 3x - 5,$$

из которого, после приравнивая коэффициентов при степенях x, имеем систему линейных уравнений $2A = 3,\ 3A + 2B = -5$. Решение системы дает

$$A = \frac{3}{2}, \quad B = -\frac{19}{4}, \quad y_ч = \frac{3}{2}x - \frac{19}{4}.$$

3) Общее решение $y_н$ исходного уравнения имеет вид:

$$y_н = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{19}{4}.$$

2) $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-\alpha+1} = 0, a_{n-\alpha} \neq 0$, *т.е.* $k = 0$ *является* α*–кратным корнем характеристического уравнения*. Тогда частное решение имеет вид:

$$y_ч = (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s) x^\alpha.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' - 3y'' = 2x^2 + 5$.

1) Находим y_0. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^3 - 3k^2 = 0,$$

его корни имеют вид

$$k_1 = 0 \text{ кратность } \alpha = 2,\ k_2 = 3,$$

общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_о = (C_1 + C_2 x) + C_3 e^{3x}.$$

2) Находим $y_ч$. Будем искать $y_ч$ в виде

$$y_ч = (Ax^2 + Bx + C)x^2 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2,$$

Тогда получим

$$y'_ч = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx,\ \ y''_ч = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,\ y'''_ч = 24Ax + 6B.$$

Подставляя выражения для $y_ч, y'_ч, y''_ч, y'''_ч$ в заданное дифференциальное уравнение, получим уравнение:

$$24Ax + 6B - 36Ax^2 - 18Bx - 6C = 2x^2 + 5,$$

из которого, после приравнивая коэффициентов при степенях x, имеем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} -36A \qquad &= 2, \\ 24A - 18B &= 0, \\ 6B - 6C \quad &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получаем

$$A = -\frac{1}{18}, B = -\frac{2}{27}, C = -\frac{49}{54}.$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

$$y_{\text{н}} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{3x} - \frac{1}{18}x^4 - \frac{2}{27}x^3 - \frac{49}{54}x^2.$$