Колебания и волны
Гармонические колебания и их характеристики

Колебаниями называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени. Колебательные процессы широко распространены в природе и технике, например качание маятника часов, переменный электрический ток и т. д.

При колебательном движении маятника изменяется координата его центра масс, в случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи.

- **Колебания** называются **свободными** (или **собственными**), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему (систему, совершающую колебания).
- Простейшим типом колебаний являются **гармонические колебания** — колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (косинуса).
- Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам:

1) колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, близкий к гармоническому;
2) различные **периодические процессы** (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как наложение гармонических колебаний.

- Гармонические колебания величины *s* описываются уравнением типа

$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad (1)$$

где *A* максимальное значение колеблющейся величины, называемое **амплитудой колебаний**, ω_0 - **круговая (циклическая) частота**, φ - **начальная фаза колебаний** в момент времени ***t*** = 0, ($\omega_0 t + \varphi$) - **фаза колебаний** и момент времени ***t***. Так как косинус изменяется в пределах от +1 до -1, то *s* может принимать значения от +*A* до -*A*.

- Определенные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени *T*, называемый **периодом колебания**, за который фаза колебания получает приращение 2π, т. е.

$$\omega_0(t+T)+\varphi=(\omega_0 t+\varphi)+2\pi,$$

откуда

$$T=2\pi/\omega_0.$$

- Величина, обратная периоду колебаний, т. е. число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется **частотой колебаний**.

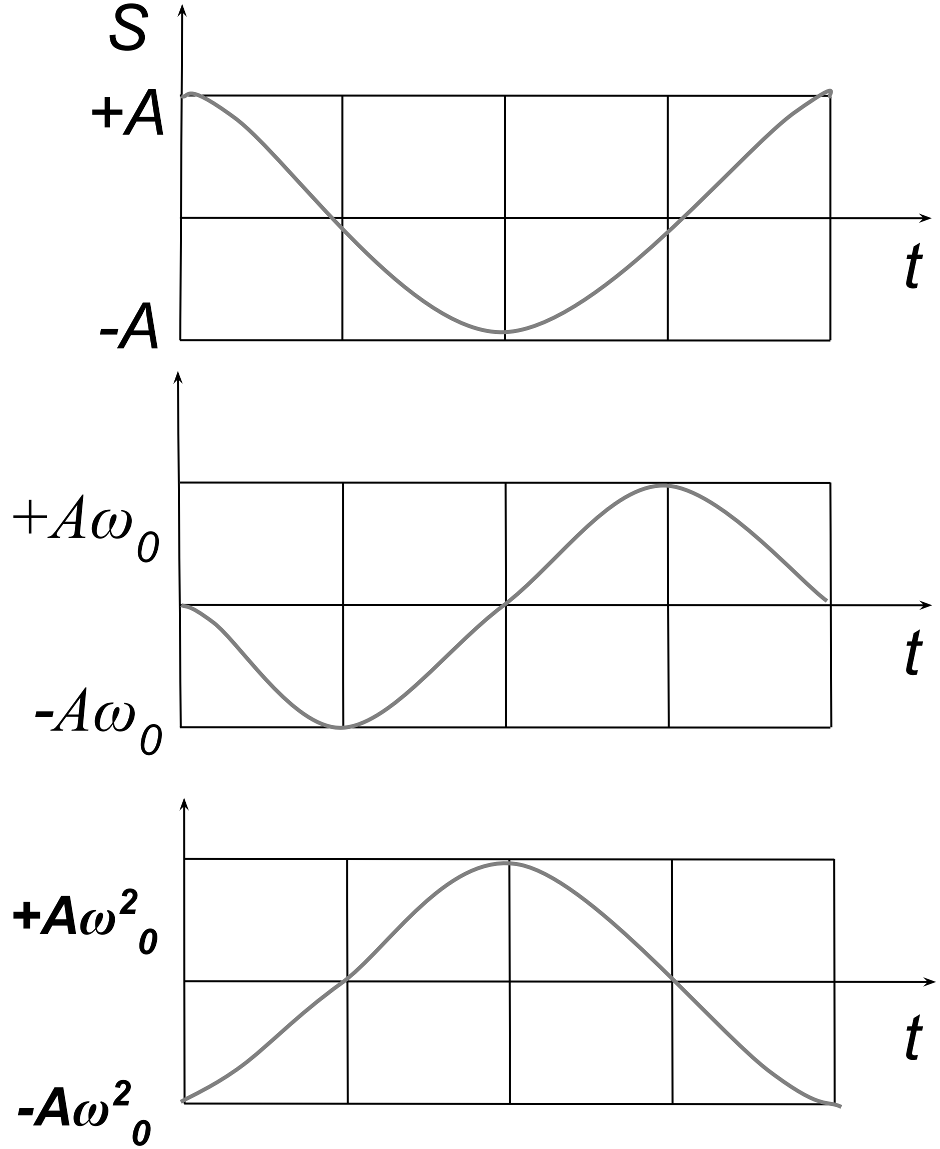
$$\nu=1/T,$$

$$\omega_0=2\pi\nu.$$

- Единица частоты — **герц** (Гц): 1 Гц — частота периодического процесса, при которой за 1 с совершается один цикл процесса.
- Запишем первую и вторую производные по времени от гармонически колеблющейся величины *s* (соответственно скорость и ускорение):
- $$\frac{ds}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}); \qquad (2)$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi), \qquad (3)$$

т. е. имеем гармонические колебания с той же циклической частотой.


S
+A
-A
t
+Aω0
-Aω0
t
+Aω20
-Aω20
t

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0 \qquad (4)$$

Решением этого уравнения является выражение (1).

- Гармонические колебания изображаются (см. рис.1) графически методом вращающегося вектора амплитуды, или методом векторных диаграмм.
- Если этот вектор привести во вращение с угловой скоростью ω_0, то проекция конца вектора на ось ***x*** будет будет изменяться со временем по закону .

$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

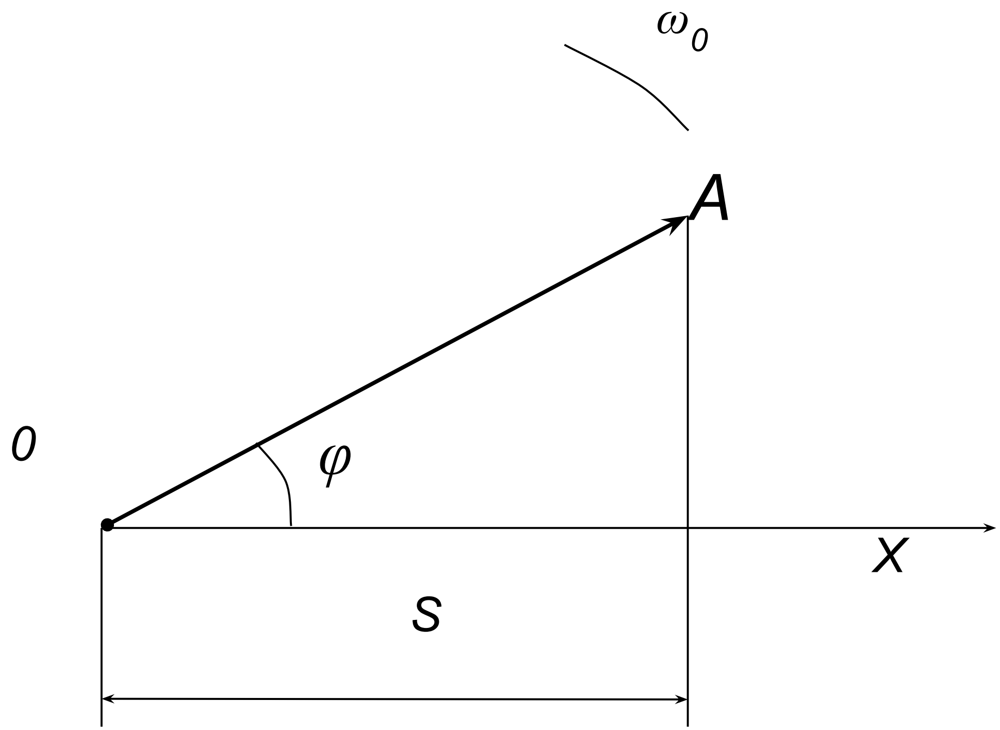


Рисунок 1

Гармонический осциллятор. Пружинный, физический и математический маятники

- **Гармоническим осциллятором** называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида:

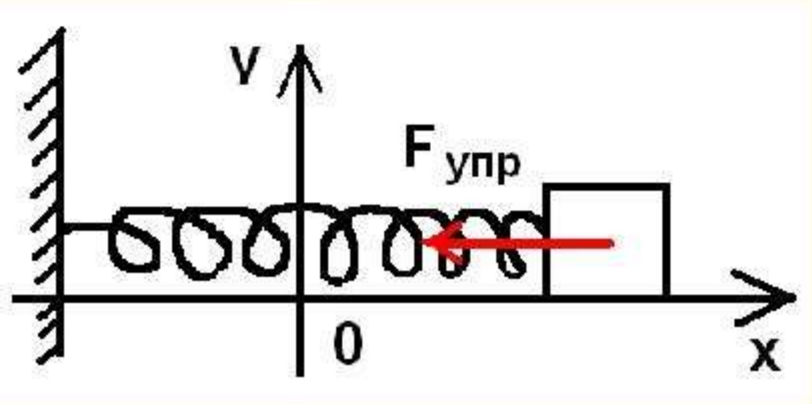
$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0.$$

- Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники.

Свободные гармонические колебания

Рассмотрим горизонтальный пружинный маятник. Силу трения

не учитываем. Согласно второму закону Ньютона $ma = Fупр$



$$ma = -kx$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Обозначим $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, где ω_0- собственная частота колебаний

Тогда дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Решения этого уравнения:

$$x = A\sin(\omega_0 t + \phi_0);$$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

Физический маятник — это твердо тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс С тела (рисунок 3).

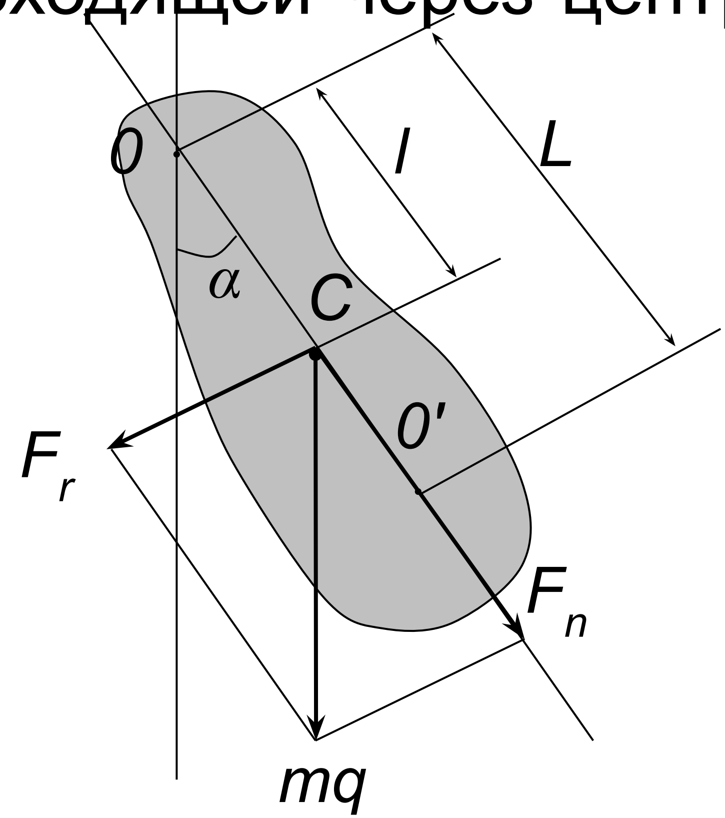
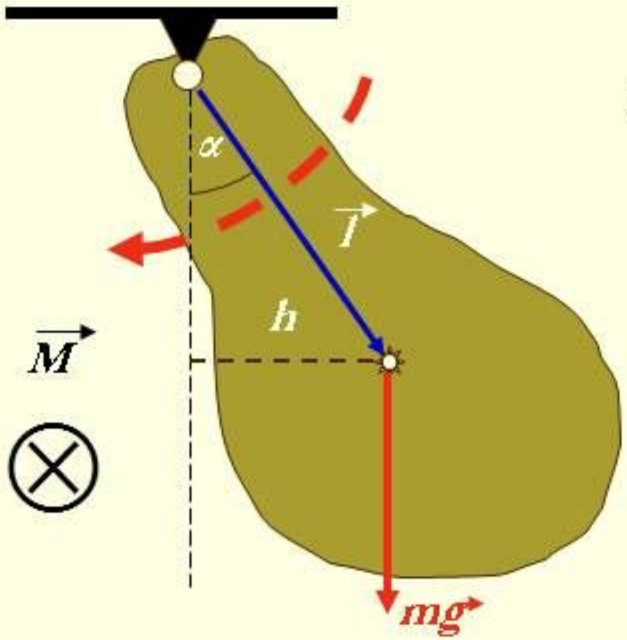


Рисунок 3

Колебания физического маятника происходят под действием возвращающего момента силы тяжести:

$$\vec{M} = \vec{l} \times m\vec{g}.$$



Уравнение движения при вращении:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

$$I\ddot{\alpha} = -mgl\sin\alpha \underbrace{\approx -mgl\alpha}_{\text{при малых углах}}$$

(Знак минус означает, что вращающий момент направлен противоположно углу отклонения маятника)

$$I\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0,$$ после замены: $$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}$$

получаем уравнение, аналогичное уравнению движения для пружинного маятника:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0.$$

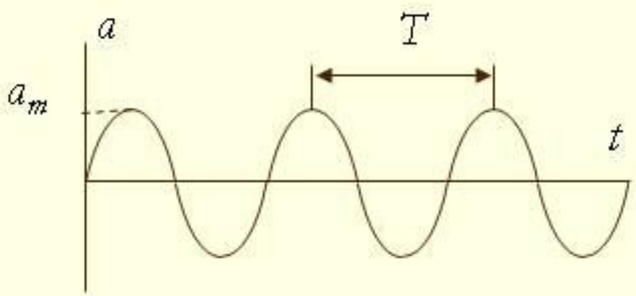
Для сравнения:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

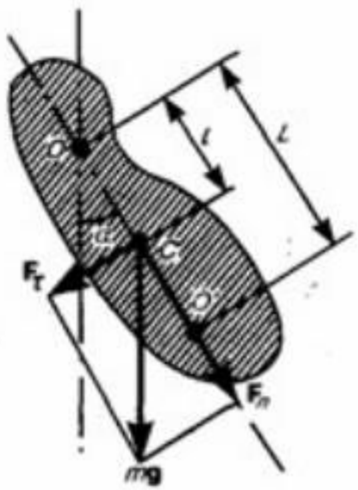
Решение уравнения:

$$\boxed{\alpha = \alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)}$$



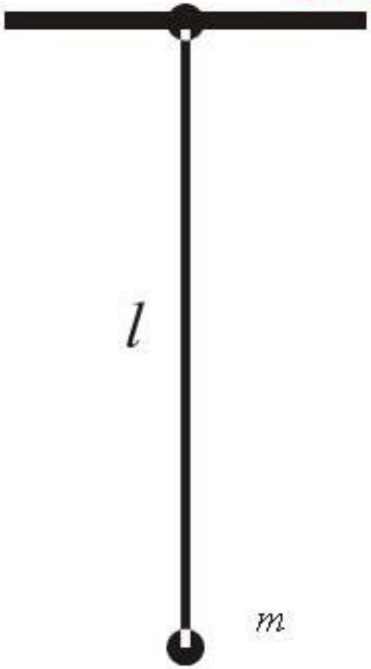
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}}$$



- При малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega_\circ$ и периодом
- $T = \dfrac{2\pi}{\omega_\circ} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$, где
- $L = \dfrac{I}{m\ell}$ - приведенная длина физического маятника.

Математический маятник



Математическим маятником называется идеализированная система, состоящая из 1) **невесомой** 2) **нерастяжимой** нити, на которой подвешена 3)**масса**, сосредоточенная в одной точке, и 4) совершающая **малые ($\sin\alpha \approx \alpha$) колебания**. Он оказывается частным случаем физического маятника.

Момент инерции материальной точки $\mathbf{I = ml^2}$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}} = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Период колебания маятника не зависит от массы, а зависит только от длины.

Математический маятник можно представить как частный случай физического маятника, предположив, что вся его масса сосредоточена в одной точке — центре масс.

- **Приведенная длина физического маятника** — это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.