

Колебания и волны

Гармонические колебания и их характеристики

Колебаниями называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени. Колебательные процессы широко распространены в природе и технике, например качание маятника часов, переменный электрический ток и т. д.

При колебательном движении маятника изменяется координата его центра масс, в случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи.

- **Колебания** называются **свободными** (или **собственными**), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему (систему, совершающую колебания).
- Простейшим типом колебаний являются **гармонические колебания** — колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (косинуса).
- Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам:
 - 1) колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, близкий к гармоническому;
 - 2) различные **периодические процессы** (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как наложение гармонических колебаний.

- Гармонические колебания величины s описываются уравнением типа

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (1)$$

где A максимальное значение колеблющейся величины, называемое **амплитудой колебаний**, ω_0 - **круговая (циклическая) частота**, φ - **начальная фаза колебаний** в момент времени $t = 0$, $(\omega_0 t + \varphi)$ - **фаза колебаний** и момент времени t . Так как косинус изменяется в пределах от $+1$ до -1 , то s может принимать значения от $+A$ до $-A$.

- Определенные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени T , называемый **периодом колебания**, за который фаза колебания получает приращение 2π , т. е.

$$\omega_0(t + T) + \varphi = (\omega_0 t + \varphi) + 2\pi,$$

откуда

$$T = 2\pi / \omega_0.$$

- Величина, обратная периоду колебаний, т. е. число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется **частотой колебаний**.

$$\nu = 1/T,$$

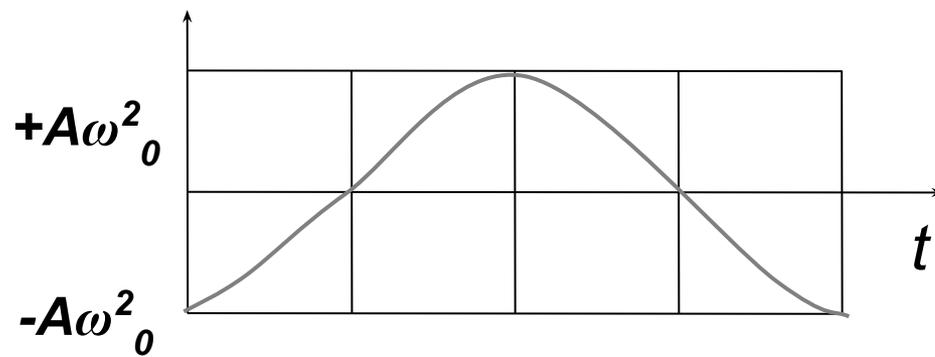
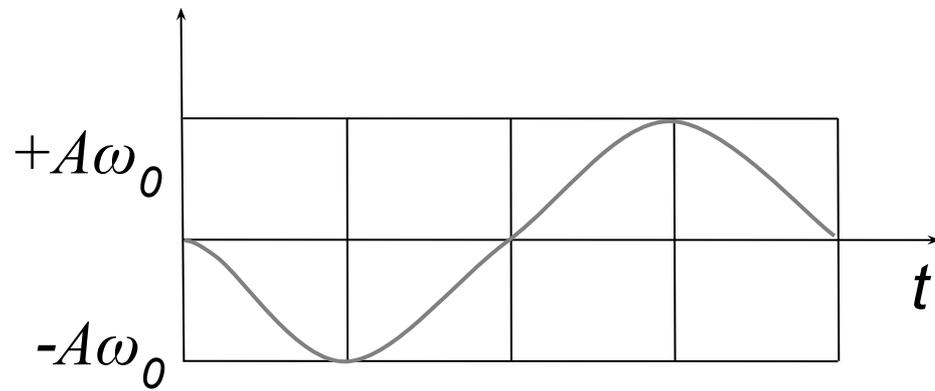
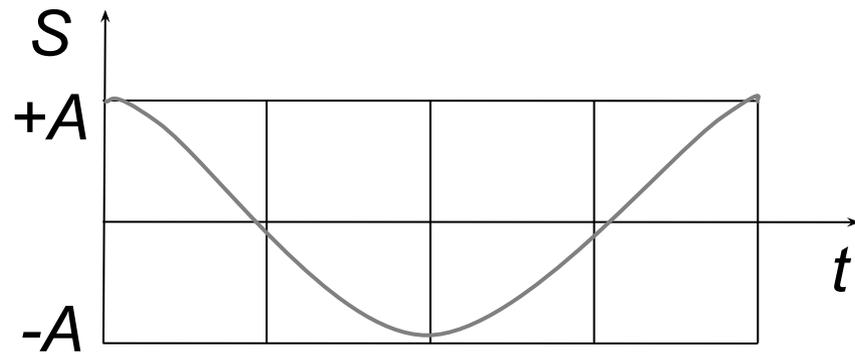
$$\omega_0 = 2\pi\nu.$$

- Единица частоты — **герц** (Гц): 1 Гц — частота периодического процесса, при которой за 1 с совершается один цикл процесса.
- Запишем первую и вторую производные по времени от гармонически колеблющейся величины s (соответственно скорость и ускорение):

- $$\frac{ds}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}); \quad (2)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi), \quad (3)$$

т. е. имеем гармонические колебания с той же циклической частотой.



Дифференциальное уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0 \quad (4)$$

Решением этого уравнения является выражение (1).

- Гармонические колебания изображаются (см. рис.1) графически методом вращающегося вектора амплитуды, или методом векторных диаграмм.
- Если этот вектор привести во вращение с угловой скоростью ω_0 , то проекция конца вектора на ось x будет изменяться со временем по закону .

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

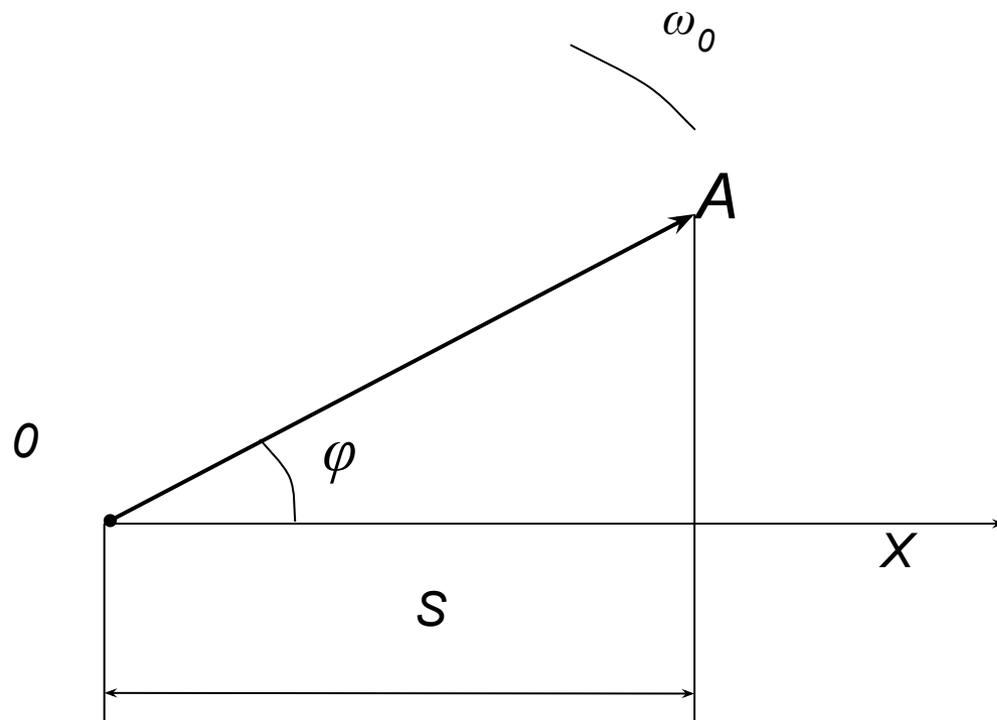


Рисунок 1

Гармонический осциллятор. Пружинный, физический и математический маятники

- **Гармоническим осциллятором** называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида:

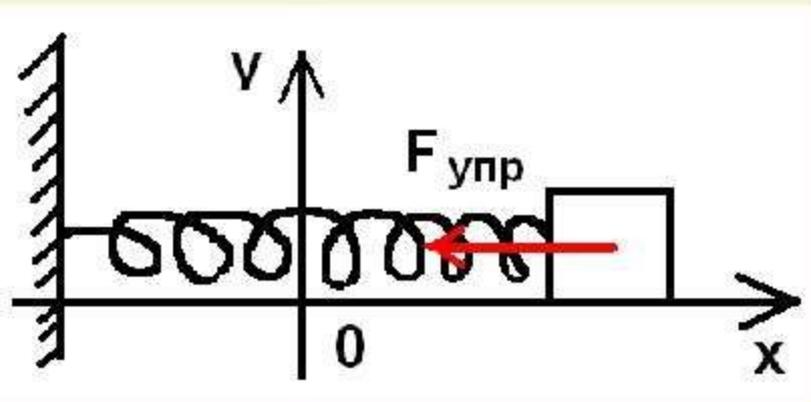
$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0.$$

- Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники.

Свободные гармонические колебания

Рассмотрим горизонтальный пружинный маятник. Силу трения не учитываем. Согласно второму закону Ньютона

$$ma = F_{\text{упр}}$$



$$ma = -kx$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Обозначим $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, где ω_0 — собственная частота колебаний

Тогда дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Решения этого уравнения:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \phi_0);$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

Физический маятник — это твёрдое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс C тела (рисунок 3).

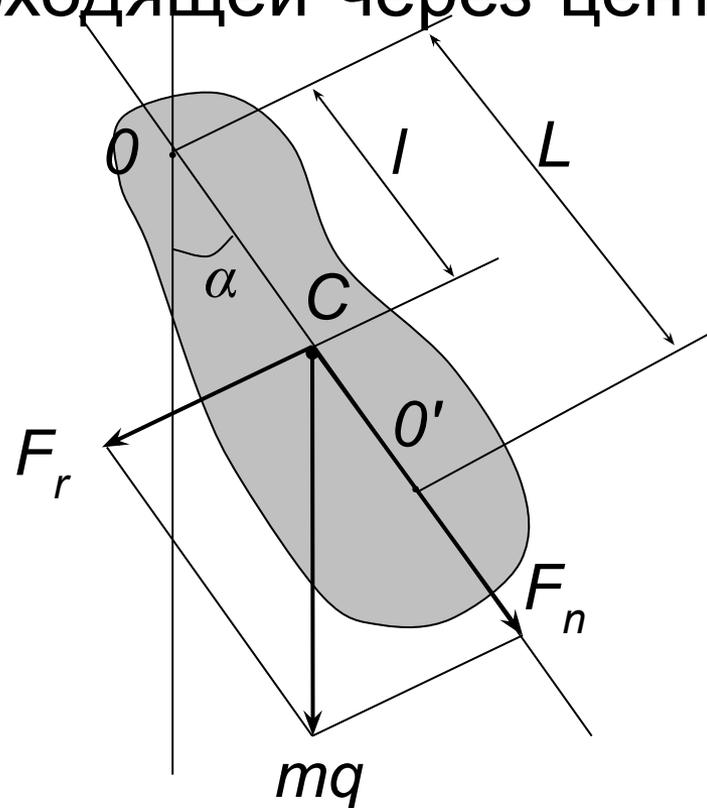
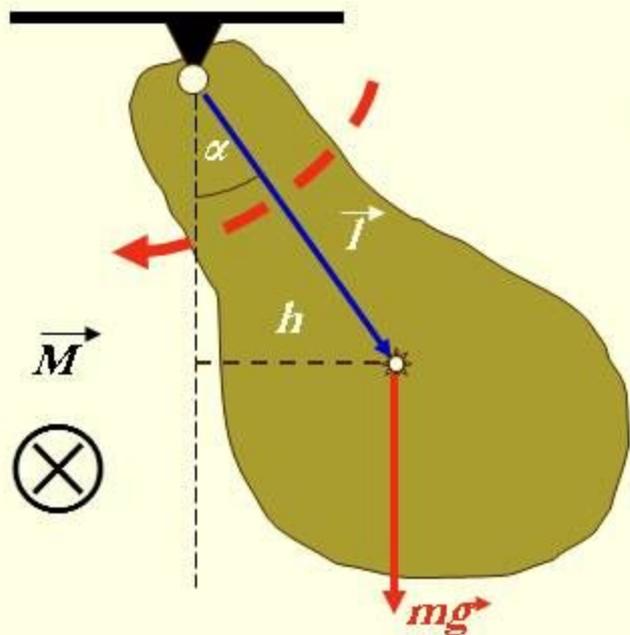


Рисунок 3

Колебания физического маятника происходят под действием возвращающего момента силы тяжести:

$$\vec{M} = \vec{l} \times m\vec{g}.$$



Уравнение движения при вращении:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

при малых углах

$$I\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha \approx -mgl\alpha$$

(Знак минус означает, что вращающий момент направлен противоположно углу отклонения маятника)

$$I\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0, \quad \text{после замены: } \omega_0^2 = \frac{mgl}{I}$$

получаем уравнение, аналогичное уравнению движения для пружинного маятника:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0.$$

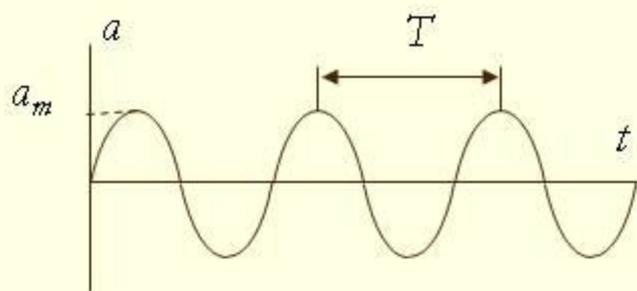
Решение уравнения:

$$\alpha = \alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Для сравнения:

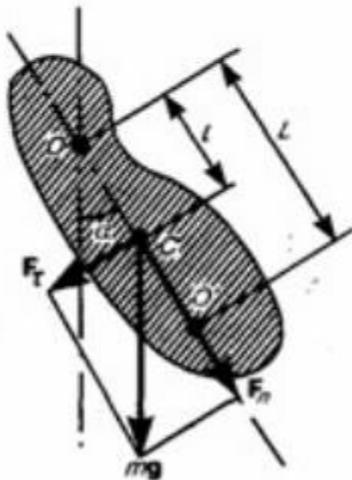
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$



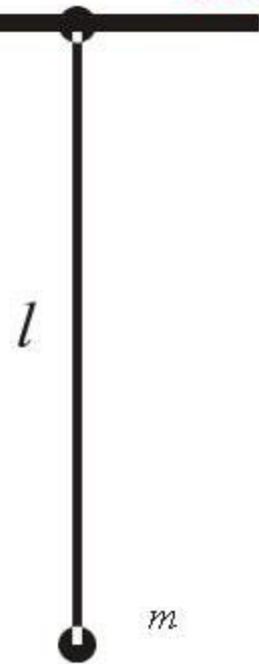
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$



- При малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω_0 и периодом
- $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\ell}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$, где
- $L = \frac{I}{m\ell}$ - приведенная длина физического маятника.

Математический маятник



Математическим маятником называется идеализированная система, состоящая из 1) **невесомой** 2) **нерастяжимой** нити, на которой подвешена 3) **масса**, сосредоточенная в одной точке, и 4) совершающая **малые ($\sin \alpha \approx \alpha$) колебания**. Он оказывается частным случаем физического маятника.

Момент инерции материальной точки

$$I = ml^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}} = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Период колебания маятника не зависит от массы, а зависит только от длины.

Математический маятник можно представить как частный случай физического маятника, предположив, что вся его масса сосредоточена в одной точке — центре масс.

- **Приведенная длина физического маятника** — это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.