

# Тема:

- **Определенный интеграл, его основные свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Приложения определенного интеграла.**

● Скопировано с сайта <http://www.myshared.ru/slide/301777/>

# ПЛАН

1. Понятие определенного интеграла.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Метод замены переменной.
4. Несобственные интегралы.
5. Приложения определенного интеграла.

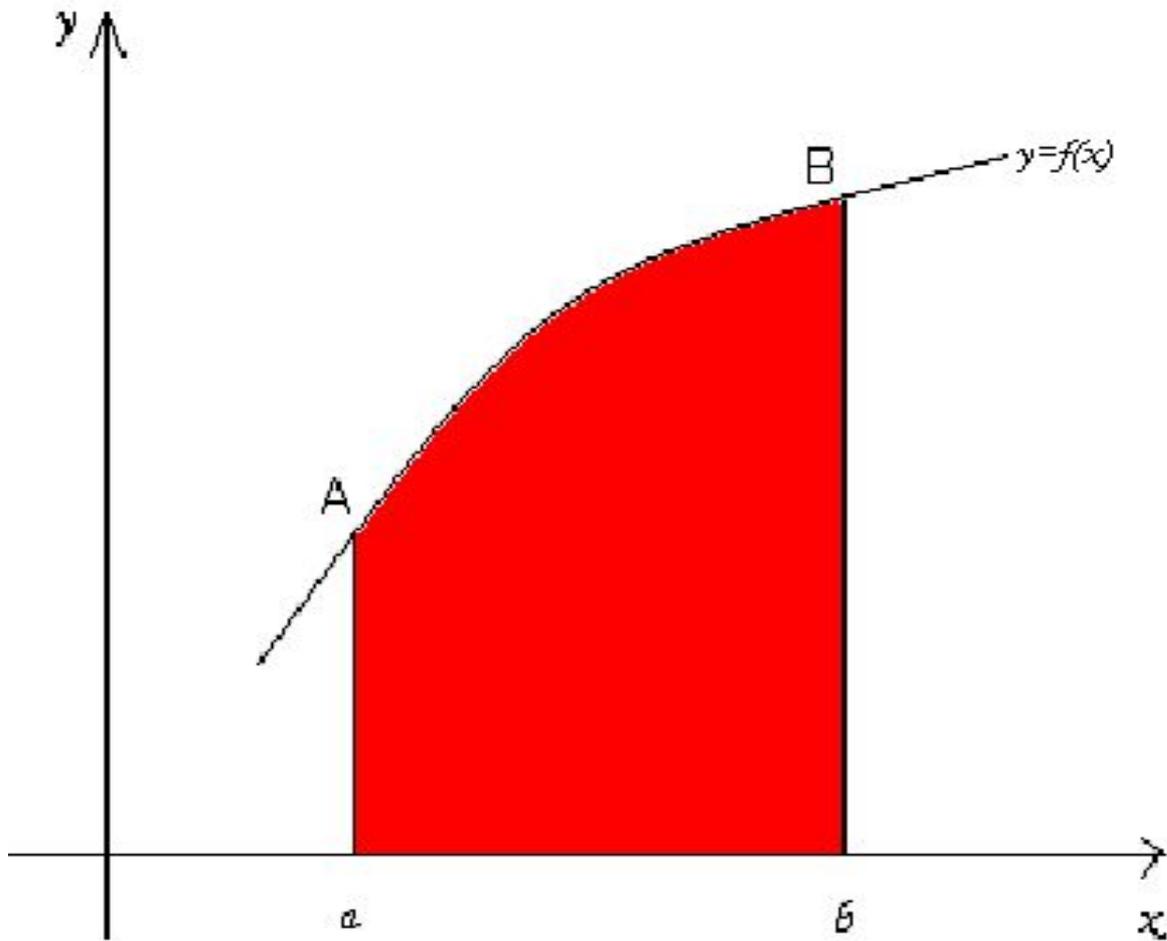
# 1. Понятие определенного интеграла

- К понятию определенного интеграла приводит задача нахождения площади криволинейной трапеции.
- Пусть на некотором интервале  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $y = f(x) > 0$

## Задача:

Построить ее график и найти  $F$  площадь фигуры, ограниченной этой кривой, двумя прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , а снизу – отрезком оси абсцисс между точками  $x = a$  и  $x = b$ .

Фигура  $aABb$  называется  
криволинейной трапецией



# Def.

- Под определенным интегралом  $\int_a^b f(x)dx$
- от данной непрерывной функции  $f(x)$  на данном отрезке  $[a;b]$  понимается соответствующее приращение ее первообразной, то есть

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

- Числа  $a$  и  $b$  – пределы интегрирования,  $[a;b]$  – промежуток интегрирования.

## Правило:

- Определенный интеграл равен разности значений первообразной подынтегральной функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования.
- Введя обозначения для разности

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**Формула Ньютона – Лейбница.**

# Готфрид Вильгельм Лейбниц

(1646 – 1716 гг.)



Известнейший немецкий философ Готфрид Вильгельм Лейбниц принадлежал к роду, связанному своими учеными и государственными деятелями. Он изобретал всеобщие универсальные приемы для решения всех задач сразу и, может быть, поэтому вслед за Паскалем стал строить вычислительные устройства.

# Исаак НЬЮТОН (Newton)

(04.01.1643 - 31.03.1727)



английский физик и математик,

теоретических основ классической механики

Он открыл закон

универсального тяготения, разработал

метод дифференциального исчисления (совместно с Г. Лейбницем)

дифференциальное и

интегральное исчисления, изобрел зеркальный

телескоп. Он был автором важнейших

экспериментальных работ по оптике. Ньютона по праву считают создателем "классической физики".

## 2. Основные свойства определенного интеграла.

- 1) Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

где  $x$  и  $t$  – любые буквы.

- 2) Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

3) При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на обратный

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_a^b f(x)dx$$

<sup>a</sup>(свойство аддитивности)

4) Если промежуток  $[a;b]$  разбит на конечное число частичных промежутков, то определенный интеграл, взятый по промежутку  $[a;b]$ , равен сумме определенных интегралов, взятых по всем его частичным промежуткам.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

6) Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.

### 3. Замена переменной в определенном интеграле.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

где  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ ,  $\varphi(t) \in [a; b]$

для  $t \in [\alpha; \beta]$ , функции  $\varphi(t)$  и  $\varphi'(t)$  непрерывны на  $[\alpha; \beta]$ .

**Пример:**  $\int_1^5 \sqrt{x-1} dx$

$$x-1 = t$$

|   |   |   |
|---|---|---|
| x | 1 | 5 |
| t | 0 | 4 |

$$\begin{aligned} dt &= dx \\ &= \int_0^4 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} t \sqrt{t} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 - 0 = \frac{16}{3} = 5 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

# Потренируемся!



## 4. Несобственные интегралы.

**Def:** Пусть функция  $f(x)$  определена на бесконечном интервале  $[a; +\infty)$  и интегрируется на любом интервале  $[a; b]$ , где  $b < +\infty$ . Если существует

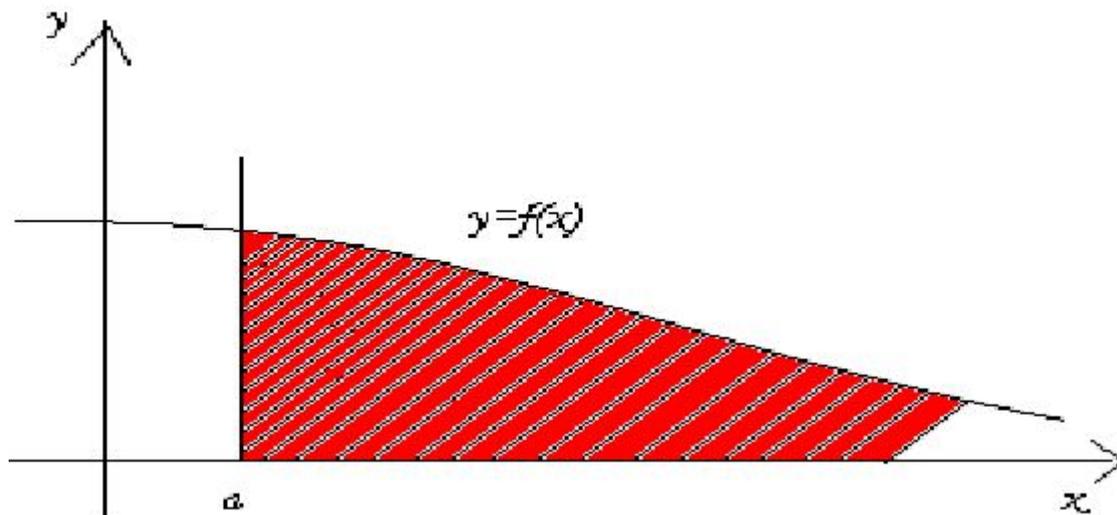
$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

то этот предел называется несобственным интегралом функции  $f(x)$  на интервале

$[a; +\infty)$  и обозначается  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

- Таким образом, по определению,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a))$$



которое

расходится, если  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$   
 не  $\rightarrow \infty$ , то говорят, что

интеграл расходится.

# ПУАССОН, СИМЕОН ДЕНИ (Poisson, Simeon-Denis) – 1840 г.)



Французский математик, физик. В 1811 он вывел широкое уравнение, связывающее электрический потенциал с плотностью заряда (уравнение Пуассона).

# Интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx$$

- если  $a = 1$ , то  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

- Интеграл сходится, и его значение  $= \sqrt{\pi}$

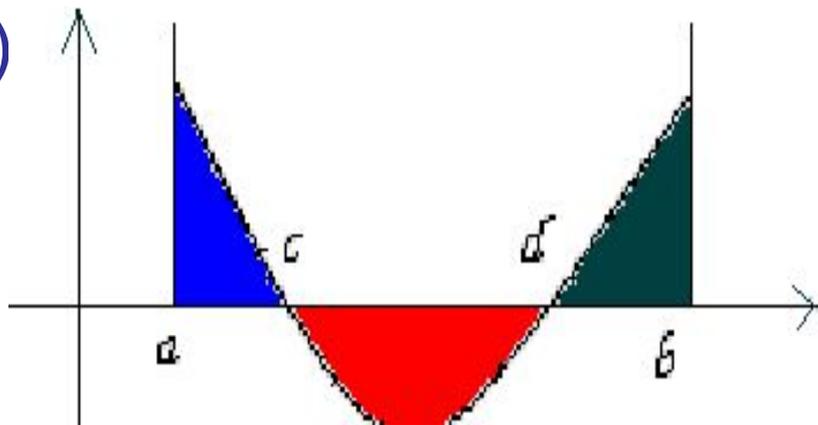
# 5. Приложения определенного интеграла

1) Площадь плоских фигур.

а) если  $f(x) \geq 0 \Rightarrow S = \int_a^b f(x)dx$

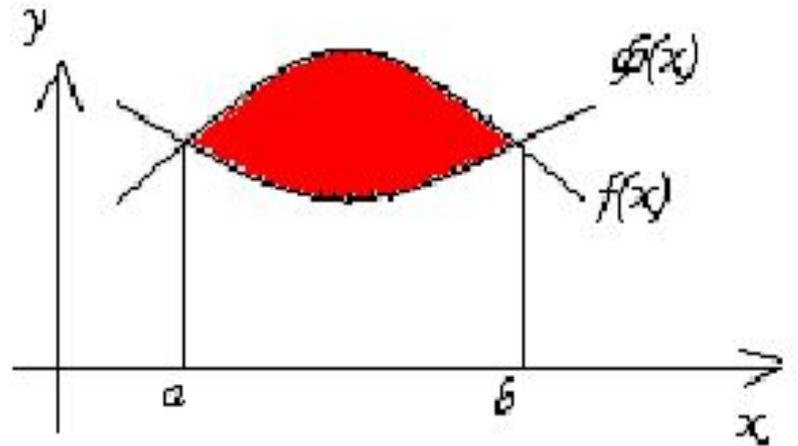
б) если  $f(x) < 0 \Rightarrow S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$

в)



$$S = \int_a^c f(x)dx + \left| \int_c^d f(x)dx \right| + \int_d^b f(x)dx$$

$$\Gamma) S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx$$



$$2) A = \int_a^b F(x) dx$$

интеграл от

ВЕЛИЧИНЫ СИЛЫ ПО ДЛИНЕ ПУТИ.

### 3) Прирост численности популяции.

$N(t)$  прирост численности за промежуток времени от  $t_0$  до  $T$ ,  $v(t)$  – скорость роста некоторой популяции.

$$N(t) = \int_{t_0}^T v(t) dt$$

интеграл от скорости

по интервалу времени ее размножения.