

Операционное исчисление.

Изображение элементарных функций-оригиналов.

Как известно $\eta(t) \rightarrow \frac{1}{p}$.

Тогда по теореме дифференцирования изображения получаем

$$t \rightarrow -\left(\frac{1}{p}\right)' = \frac{1}{p^2},$$

$$t^2 \rightarrow -\left(\frac{1}{p^2}\right)' = \underline{\quad}, \quad t^3 \rightarrow -\left(\frac{2}{p^3}\right)' = \underline{\quad}.$$

Пусть для $n-1$ степени справедлива формула

$$t^{n-1} \rightarrow \frac{(n-1)!}{p^n}.$$

Тогда получаем для n -ой степени

$$t^n \rightarrow -\left(\frac{(n-1)!}{p^n}\right)' = \underline{\quad}.$$

Операционное исчисление.

Изображение элементарных функций-оригиналов.

По теореме сдвига для любого комплексного λ

$$e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \eta(t) \rightarrow \frac{1}{p - \lambda}.$$

Так как

$$\operatorname{sh} \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}, \quad \operatorname{ch} \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}.$$

Поэтому

$$\operatorname{sh} \omega t \rightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p + \omega} \right] = \text{_____},$$

$$\operatorname{ch} \omega t \rightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p - \omega} + \frac{1}{p + \omega} \right] = \text{_____}.$$

Операционное исчисление.

Изображение элементарных функций-оригиналов.

Аналогично

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \quad \cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}.$$

Поэтому

$$\sin \omega t \rightarrow \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right] = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\cos \omega t \rightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Операционное исчисление.

Изображение элементарных функций-оригиналов.

В результате подобных рассуждений получаем таблицу простейших оригиналов и их изображений

$$t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$\sin \omega t \rightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

$$\cos \omega t \rightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2},$$

$$e^{\lambda t} \rightarrow \frac{1}{p - \lambda},$$

$$t^n e^{\lambda t} \rightarrow \frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}},$$

$$e^{\lambda t} \sin \omega t \rightarrow \underline{\hspace{2cm}},$$

$$e^{\lambda t} \cos \omega t \rightarrow \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\operatorname{sh} \omega t \rightarrow \frac{\omega}{p^2 - \omega^2},$$

$$\operatorname{ch} \omega t \rightarrow \frac{p}{p^2 - \omega^2}.$$

Операционное исчисление.

Разложение оригиналов и изображений в ряды.

Теорема 17 (первая теорема разложения). Если функция $F(p)$ аналитична в окрестности ∞ , имеет в ∞ нуль, то она является изображением. При этом, если

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n p^{-n}$$

– ее разложение Лорана в окрестности ∞ , то

$$F(p) \leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (1)$$

Доказательство. Покажем, что ряд

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

сходится для любого действительного t и представляет собой функцию-оригинал.

Операционное исчисление.

Разложение оригиналов и изображений в ряды.

Пусть $F(p)$ аналитична в области $|p| > R$. Выберем произвольное число $R_1 > R$.

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n R_1^{-n}$$

сходится (это – значение функции $F(p)$ в точке R_1) и потому последовательность

$$|a_n| R_1^{-n}$$

ограничена, т.е. существует такое M , что

$$|a_n| R_1^{-n} < M,$$

откуда

$$|a_n| < M R_1^n.$$

Операционное исчисление.

Разложение оригиналов и изображений в ряды.

Тогда получаем

$$|a_n| \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{MR_I(R_I t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Выражение справа – это общий член ряда, сходящегося при любом значении t . По признаку сравнения ряд (1) сходится абсолютно для всех значений t , и

$$|f(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{MR_I(R_I t)^{n-1}}{(n-1)!} = MR_I e^{R_I t},$$

т.е. функция $f(t)$ имеет ограниченный рост.

Функция $f(t)$, представимая степенным рядом, является непрерывной. Найдем ее изображение. Изображение существует, если в равенстве

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \left(\sum_{k=1}^n a_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right) dt = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{k-1} dt \quad (2)$$

можно перейти к пределу при n стремящемся к ∞ .

Операционное исчисление.

Разложение оригиналов и изображений в ряды.

Положим

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Тогда

$$|f_n(t)| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \leq MR_1 e^{R_1 t}.$$

Если $\operatorname{Re} p = \sigma \geq R_2 > R_1$, то

$$\begin{aligned} \max_n \left| \int_T^{\infty} e^{-pt} f_n(t) dt \right| &\leq \max_n \int_T^{\infty} e^{-pt} |f_n(t)| dt \leq MR_1 \int_T^{\infty} e^{(R_1 - \sigma)t} dt \leq \\ &\leq MR_1 \int_T^{\infty} e^{-(R_2 - R_1)t} dt = MR_1 \frac{e^{-(R_2 - R_1)T}}{R_2 - R_1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при T стремящемся к ∞ .

Операционное исчисление.

Разложение оригиналов и изображений в ряды.

Значит, интеграл

$$\int_0^{\infty} f_n(t) e^{-pt} dt$$

сходится равномерно по n . Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) e^{-pt} dt,$$

и, переходя в равенстве (2) к пределу по n , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-pt} \left(\sum_{k=1}^n a_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{k-1} dt = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{k-1} dt \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} \frac{1}{p^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Операционное исчисление.

Разложение оригиналов и изображений в ряды.

Теорема 18 (вторая теорема разложения – случай простых корней). Пусть изображение $F(p)$ представляет собой дробно-рациональную функцию

$$F(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n},$$

где $m < n$, и все корни знаменателя: p_1, \dots, p_n являются простыми.

Тогда

$$F(p) \leftarrow \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)} e^{p_k t}.$$

Доказательство. Разложим $F(p)$ на простейшие дроби

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{p - p_k}. \quad (3)$$

Операционное исчисление.

Разложение оригиналов и изображений в ряды.

Найдем коэффициенты c_k

$$c_k = \lim_{p \rightarrow p_k} \left[\frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_k) \right] = F_1(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \left[\frac{(p - p_k)}{F_2(p)} \right] = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}.$$

Подставляем их в (3), получаем

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{p - p_k} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}.$$

Учитывая что

$$\frac{1}{p - p_k} \leftarrow \frac{1}{p - p_k},$$

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{p - p_k} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} = \leftarrow \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Что и требовалось доказать.

Операционное исчисление.

Разложение оригиналов и изображений в ряды.

Теорема 19 (вторая теорема разложения – случай кратных корней). Пусть изображение $F(p)$ представляет собой дробно-рациональную функцию

$$F(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n},$$

где $m < n$, и пусть корни знаменателя: p_1, \dots, p_k будут кратными с кратностями соответственно равными $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$.

Тогда

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \leftarrow \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{B_i^{(\mu_i - j)}(p_i)}{(\mu_i - j)!} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{p_i t},$$

где

$$B_i(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_i)^{\mu_i}.$$

Операционное исчисление.

Разложение оригиналов и изображений в ряды.

Доказательство. Разложение функции $F(p)$ на простейшие дроби имеет вид

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{A_{j,i}}{(p - p_i)^j}. \quad (4)$$

Умножаем обе части на $(p - p_i)^{\mu_j}$

$$B_i(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_i)^{\mu_i} = \sum_{j=1}^{\mu_i} A_{j,i} (p - p_i)^{\mu_i - j} + N(p - p_i)^{\mu_i}. \quad (5)$$

Тогда $B_i(p_i) = A_{\mu_i, i}$.

Последовательно дифференцируем (5) по p и каждый раз после дифференцирования придаем p значение p_i

$$B_i'(p_i) = A_{\mu_i - 1, i}, \quad B_i''(p_i) = 2! A_{\mu_i - 2, i}, \quad B_i^{(\mu_i - j)}(p_i) = (\mu_i - j)! A_{\mu_i - j, i}.$$

Операционное исчисление.

Разложение оригиналов и изображений в ряды.

Подставляя эти выражения в (4), получаем

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{B_i^{(\mu_i-1)}(p_i)}{(\mu_i-1)!} \frac{1}{(p-p_i)^j}.$$

Так как

$$\frac{1}{(p-p_i)^j} \leftarrow \text{_____},$$

то окончательно получаем

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \leftarrow \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{B_i^{(\mu_i-j)}(p_i)}{(\mu_i-j)!} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{p_i t}.$$

Что и требовалось доказать.

Операционное исчисление.

Разложение оригиналов и изображений в ряды.

Теорема 19 (третья теорема разложения). Пусть $F(p)$ – функция комплексного аргумента, аналитическая в C всюду, кроме некоторой конечной или счетной последовательности точек p_1, p_2, \dots , являющихся ее изолированными особыми точками, причем все эти точки расположены в некоторой левой полуплоскости $\text{Re } p \leq \sigma_0$.

Пусть:

1) Существует такая последовательность радиусов $\{R_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$,
что
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \{ |F(p)|, |p| = R_n \} = 0,$$

2) Функция $F(p)$ абсолютно интегрируема вдоль любой вертикальной прямой $\text{Re } p = \sigma$, $\sigma > \sigma_0$.

Тогда $F(p)$ является изображением и

$$F(p) \leftarrow \sum_k \text{res} \{ F(p) e^{pt}, p = p_k \}$$

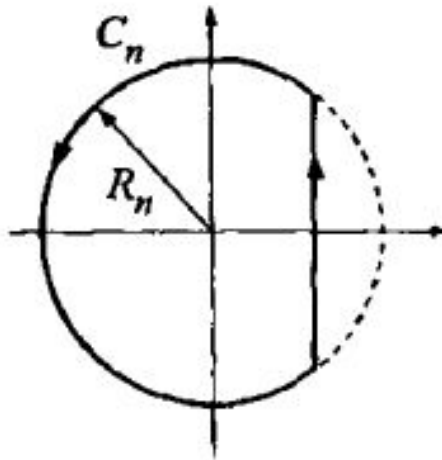
Операционное исчисление.

Разложение оригиналов и изображений в ряды.

Доказательство. Условия теоремы позволяют утверждать, что $F(p)$ является изображением, оригинал для которого может быть получен по формуле обращения. Рассмотрим контур Γ_n , состоящий из отрезка прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$ и дуги C_n окружности

$$|p| = R_n,$$

которая расположена слева от указанной прямой.



Операционное исчисление.

Разложение оригиналов и изображений в ряды.

Интеграл $\oint_{\Gamma_n} F(p)e^{pt} dp,$

взятый вдоль контура Γ_n против часовой стрелки, будет равен сумме вычетов функции по особым точкам p_k , попавшим внутрь контура. По лемме Жордана

$$\int_{C_n} F(p)e^{pt} dp \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt} dp = \sum_k \text{res} \left\{ F(p)e^{pt}, p = p_k \right\}$$

Что и требовалось доказать.