

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ  
ЛИНЕЙНЫХ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ

*Прямые методы*

# План

- Постановка задачи
- Классификация методов реше

Прямые методы:

- Метод Крамера
- Метод Гаусса
- Метод Жордана – Гаусса

- Модификации методов исключения



# Постановка задачи

К решению задач линейной алгебры приводит анализ физических систем различной природы: механических, гидравлических, электростатических и т. п.

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) возникают при обработке данных; дискретизации линейных дифференциальных задач; решении краевых задач; расчете электрических цепей; в экономических моделях и т.д.

# Постановка задачи

Дана система  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = f_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = f_n \end{cases} \quad (1)$$

# Постановка задачи

или в матричном обозначении:

$$AX = f \quad (1')$$

где

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- ИСКОМЫЙ  
вектор

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}$$

- вектор  
правой части

# Постановка задачи

Как известно из курса линейной алгебры, если матрица  $A$  невырожденная, т.е.

$$\det A \neq 0$$

то система (1) имеет единственное решение:

$$X = A^{-1} f$$

# Методы решения СЛАУ

1. **Прямые (точные)** методы: решение находится за конечное число арифметических действий. Точными их можно назвать лишь абстрагируясь от погрешностей округления.
2. **Итерационные методы** состоят в том, что решение системы (1) определяется как предел некоторой последовательности приближений  $X^k$  при  $k \rightarrow \infty$ , где  $k$  – номер итерации.
3. **Вероятностные методы** или методы Монте-Карло используют для решения систем с очень большим числом неизвестных ( $> 10^7$ ).

Методы  
решения СЛАУ

ПРЯМЫЕ

ИТЕРАЦИОННЫЕ

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ

КРАМЕРА

КВАДРАТНОГО  
КОРНЯ\*

ГАУССА

ПРОГОНКИ\*\*

ЖОРДАНА-ГАУССА

...

...

\*матрица симметричная и положительно определенная

\*\*матрица трехдиагональная



Методы  
решения СЛАУ

ПРЯМЫЕ

ИТЕРАЦИОННЫЕ

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ

ПРОСТОЙ  
ИТЕРАЦИИ

ЗЕЙДЕЛЯ

РЕЛАКСАЦИИ

# Метод Крамера

Универсальным прямым методом решения систем вида (1), известным из курса алгебры, является метод Крамера:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

Для реализации на ЭВМ этого метода необходимо выполнить  $n \cdot n!$  - умножений для каждого определителя. Подобным способом можно пользоваться, если  $n$  невелико (обычно  $< 5$ ), в противном же случае такой метод становится очень затратным.

## Пример. Метод Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 3$$

$$A1 := \begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 13 & -2 & 4 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A1| = 3$$

$$A2 := \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 13 & 4 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A2| = -3$$

$$A3 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 13 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|A3| = 6$$

$$x_1 = \frac{3}{3} = 1, x_2 = \frac{-3}{3} = -1, x_3 = \frac{6}{3} = 2.$$

# Метод Гаусса

Запишем систему (1) в виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \boxtimes & a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \boxtimes & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

Предположим, что  $a_{11} \neq 0$ , если иначе, то переставим строки.

# Прямой ход метода Гаусса

Исключим  $x_1$  из  $n-1$  последних уравнений, для этого из второго уравнения вычтем первое, умноженное на

$$\frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Из третьего вычтем первое умноженное на

$$\frac{a_{31}}{a_{11}}$$

и т.д.

# Прямой ход метода Гаусса

Этот процесс приведет к системе:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \boxtimes & a_{1n} \\ 0 & a^1_{22} \boxtimes & a^1_{2n} \\ \dots & & \\ 0 & a^1_{n2} \boxtimes & a^1_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f^1_2 \\ \dots \\ f^1_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

При исключении  $x_1$  преобразованию подвергаются строки расширенной матрицы, включая свободные члены.

# Прямой ход метода Гаусса

Если  $a_{22}^1 \neq 0$  то применим аналогичный процесс к последующим уравнениям и исключим  $x_2$  из  $n-2$  уравнений.

$$\begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \dots & a_{1n}^0 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2^1 \\ f_3^2 \\ \dots \\ f_n^2 \end{pmatrix}$$

# Прямой ход метода Гаусса

$$\begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \dots & a_{1k}^0 & a_{1k+1}^0 & \dots & a_{1n}^0 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2k}^1 & a_{2k+1}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{k-1} & a_{kk+1}^{k-1} & \dots & a_{kn}^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1k+1}^k & \dots & a_{k+1n}^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nk+1}^k & \dots & a_{nn}^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2^1 \\ \dots \\ f_k^{k-1} \\ f_{k+1}^k \\ \dots \\ f_n^k \end{pmatrix}$$

**к – тый шаг**



# Прямой ход метода Гаусса

Выпишем в общем виде рекуррентные соотношения для получения коэффициентов матрицы на  $k$ -м шаге:

$$a_{i j}^k = a_{i j}^{k-1} - \frac{a_{k j}^{k-1} \cdot a_{i k}^{k-1}}{a_{k k}^{k-1}}$$

$$f_i^k = f_i^{k-1} - \frac{f_k^{k-1} \cdot a_{i k}^{k-1}}{a_{k k}^{k-1}}$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$i, j = k+1, k+2, \dots, n;$$

# Смысл индексов

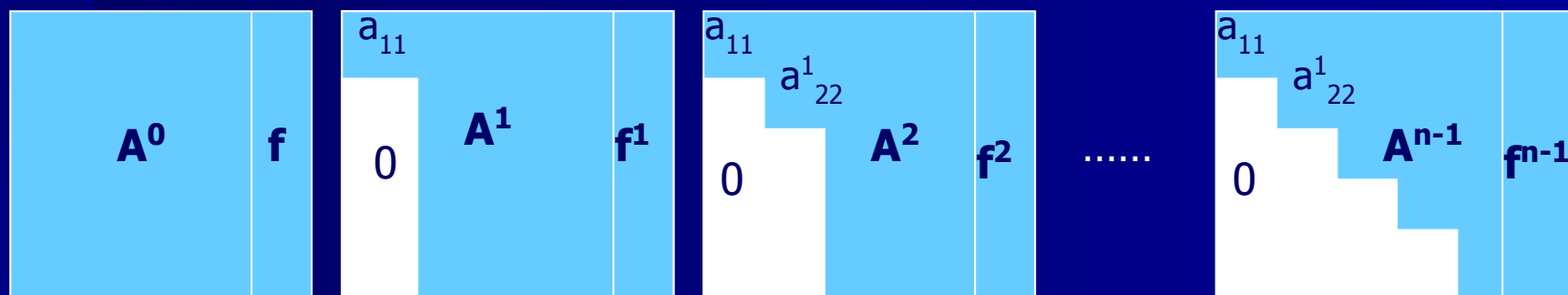
$$a_{i j}^k = a_{i j}^{k-1} - \frac{a_{k j}^{k-1} \cdot a_{i k}^{k-1}}{a_{k k}^{k-1}}$$

$$f_i^k = f_i^{k-1} - \frac{f_k^{k-1} \cdot a_{i k}^{k-1}}{a_{k k}^{k-1}}$$

- $k$  – номер того уравнения, которое вычитается из остальных и номер того неизвестного, которое исключается из последующих уравнений;
- $a_{kk}^{k-1}$  - называется разрешающим элементом;
- $i$  – номер уравнения из которого в данный момент исключается неизвестное;
- $j$  – текущий номер столбца.

# Прямой ход метода Гаусса

Через  $n-1$  шаг система будет приведена к треугольному виду, при этом прямой ход метода Гаусса завершен.



Схематическая иллюстрация прямого хода метода Гаусса

# Обратный ход метода Гаусса

Осуществляется для нахождения неизвестных системы.

Из последнего уравнения находится  $x_n$ . Его значение подставляется в  $n-1$  уравнение ...

и т. д. до первого уравнения и  $x_1$ .

# Обратный ход

Искомое решение системы (1) определяется по формулам:

$$x_n = \frac{f_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, x_k = \frac{f_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k-1)} \cdot x_j}{a_{kk}^{(k-1)}}; k = n-1, n-2, \dots, 1$$

Весь алгоритм метода Гаусса осуществляется за порядка арифметических операций.

$$\frac{n^3}{3}$$

# Пример. Метод Гаусса

Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

# Пример. Метод Гаусса (со схемой единственного деления\*)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 3 & -2 & 4 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{-13}{2} & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & -5 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-11}{13} & \frac{-35}{13} \\ 0 & -5 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-11}{13} & \frac{-35}{13} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{13} & \frac{-6}{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-11}{13} & \frac{-35}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

\* Схема единственного деления применяется для получения 1 на диагонали путем деления на разрешающий элемент

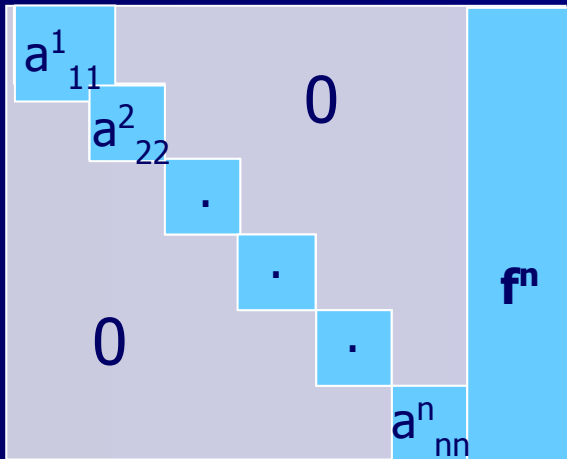
# Метод Жордана – Гаусса

Идея модификации метода Гаусса состоит в том, чтобы одновременно осуществить прямой и обратный ход, приведя исходную матрицу к диагональному виду. Если при этом на главной диагонали будут 1, то искомое решение – вектор свободных членов. Схематически метод выглядит следующим образом:





.....



Схематическая иллюстрация метода Жордана-Гаусса

# Метод Жордана – Гаусса

$$a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - \frac{a_{kj}^{k-1}}{a_{kj}^{k-1}} a_{ik}^{k-1}, i, j \neq k$$

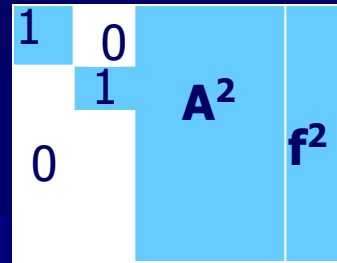
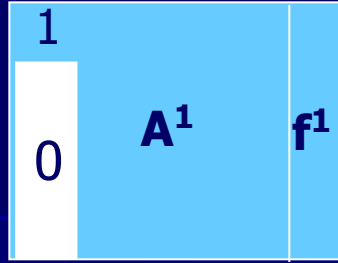
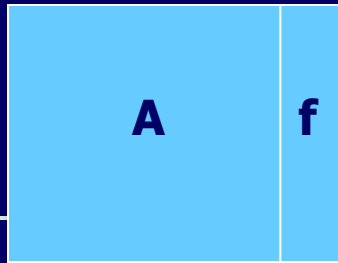
$$a_{ij}^k = \frac{a_{kj}^{k-1}}{a_{kj}^{k-1}}, i = k, j \neq k; a_{ij}^k = \frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kj}^{k-1}}, i \neq k, j = k$$

$$a_{ij}^0 = a_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n.$$

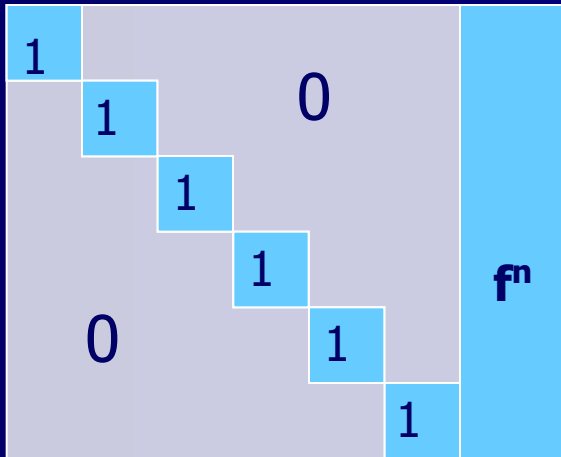
$$x_k = \frac{f^k}{a_{kk}^k}, k = 1, \dots, n$$

# Модификации методов исключения неизвестных

- Схема единственного деления
- Выбор главного элемента



.....



## Схема единственного деления:

на каждом шаге делим на разрешающий диагональный коэффициент

(возможна и в любом методе исключения неизвестных)

# Пример. Метод Жордана-Гаусса (схема единственного деления)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 3 & -2 & 4 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{-13}{2} & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & -5 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-11}{13} & \frac{-35}{13} \\ 0 & -5 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{10}{13} & \frac{33}{13} \\ 0 & 1 & \frac{-11}{13} & \frac{-35}{13} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{13} & \frac{-6}{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

# Выбор главного элемента

Пример. Дана система

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3.901 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Точным решением данной системы является вектор  $(0, -1, 1)$ .

# Выбор главного элемента

Проведём преобразования системы по методу Гаусса, округляя промежуточные результаты до 5 значащих цифр.

# Прямой ход

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3.901 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.001 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6.001 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.001 & 6 \\ 0 & 0 & 15005 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6.001 \\ 15004 \end{bmatrix}$$



# Обратный ход

$$x_3 = \frac{15004}{15005} \approx 0.99993$$

$$x_2 = \frac{6.001 - 6 \cdot 0.99993}{-0.001} \approx -1.5$$

$$x_1 = \frac{7 + 7 \cdot (-1.5)}{10} \approx -0.35$$

Сильная потеря точности связана с выбором на 2-м шаге разрешающего элемента. Из-за ограниченной точности вычислений (5 значащих цифр) допущена большая относительная погрешность, которая распространяется далее на все вычисления.

Этот пример иллюстрирует следующую ситуацию: если на  $k$ -ом шаге диагональный элемент не равен нулю, но его значение мало ( $\approx \varepsilon$ ), то, может быть, этот элемент  $\neq 0$  только из-за ошибок округления, а должен быть 0 и делить на него нельзя.

Чтобы исключить подобное, алгоритм метода исключения неизвестных модифицируется. На каждом шаге с помощью перестановки строк в качестве разрешающего подбирается наибольший по модулю из возможных элемент. Такая модификация носит название ***выбор главного элемента***.

**В рассмотренном примере выбор главного элемента осуществляется следующим образом:**

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.001 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6.001 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

**переставим 2-ое и 3-е уравнения:**

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & -0.001 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.001 \end{bmatrix}$$

**исключим  $x_2$  из 3-го уравнения:**

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.002 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.002 \end{bmatrix}$$

# Обратный ход

$$x_3 = \frac{6.002}{6.002} = 1$$

$$x_2 = \frac{2.5 - 5 \cdot 1}{2.5} = -1$$

$$x_1 = \frac{7 + 7 \cdot (-1)}{10} = 0$$

Результат совпадает с точным решением.

# Замечание.

Выбор главного элемента путём перестановки строк не является единственным способом модификации, возможна перестановка столбцов с соответствующей перенумерацией неизвестных, а также комбинированная перестановка строк и столбцов.