ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Прямые методы

План

- Постановка задачи
- Классификация методов реше

Прямые методы:

  - Метод Крамера
  - Метод Гаусса
  - Метод Жордана – Гаусса

- Модификации методов исключения

Габриэль Крамер (Cramer)

Камиль Мари Эдмон Жордан (Jordan)

Постановка задачи

К решению задач линейной алгебры приводит анализ физических систем различной природы: механических, гидравлических, электростатических и т. п.

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) возникают при обработке данных; дискретизации линейных дифференциальных задач; решении краевых задач; расчете электрических цепей; в экономических моделях и т.д.

Постановка задачи

Дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = f_2 \\ \ldots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = f_n \end{cases} \qquad (1)$$

Постановка задачи

или в матричном обозначении:

$$A\vec{X} = \vec{f} \qquad (1')$$

где

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- искомый вектор

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}$$

- вектор правой части

Постановка задачи

Как известно из курса линейной алгебры, если матрица А невырожденная, т.е.

$$\det A \neq 0$$

то система (1) имеет единственное решение:

$$X = A^{-1} f$$

Методы решения СЛАУ

1. Прямые (точные) методы: решение находится за конечное число арифметических действий. Точными их можно назвать лишь абстрагируясь от погрешностей округления.
2. Итерационные методы состоят в том, что решение системы (1) определяется как предел некоторой последовательности приближений X^k при $k \to \infty$, где k – номер итерации.
3. Вероятностные методы или методы Монте-Карло используют для решения систем с очень большим числом неизвестных ($>10^7$).

Методы решения СЛАУ

- ПРЯМЫЕ
  - УНИВЕРСАЛЬНЫЕ
    - КРАМЕРА
    - ГАУССА
    - ЖОРДАНА-ГАУССА
    - …
  - СПЕЦИАЛЬНЫЕ
    - КВАДРАТНОГО КОРНЯ*
    - ПРОГОНКИ**
    - …
- ИТЕРАЦИОННЫЕ
- ВЕРОЯТНОСТНЫЕ

*матрица симметричная и положительно определенная
**матрица трехдиагональная

Методы
решения СЛАУ

ПРЯМЫЕ

ИТЕРАЦИОННЫ
Е

ВЕРОЯТНОСТНЫ
Е

ПРОСТОЙ
ИТЕРАЦИИ

ЗЕЙДЕЛЯ

РЕЛАКСАЦИИ

Метод Крамера

Универсальным прямым методом решения систем вида (1), известным из курса алгебры, является метод Крамера:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

Для реализации на ЭВМ этого метода необходимо выполнить $n \cdot n!$ - умножений для каждого определителя. Подобным способом можно пользоваться, если n невелико (обычно< 5), в противном же случае такой метод становится очень затратным.

Пример. Метод Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A1 := \begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 13 & -2 & 4 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A2 := \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 13 & 4 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 3 \quad |A1| = 3 \quad |A2| = -3$$

$$A3 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 13 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{3}{3} = 1, x_2 = \frac{-3}{3} = -1, x_3 = \frac{6}{3} = 2.$$

$$|A3| = 6$$

Метод Гаусса

Запишем систему (1) в виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots. & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

Предположим, что $a_{11} \neq 0$, если иначе, то переставим строки.

Прямой ход метода Гаусса

Исключим x_1 из n-1 последних уравнений, для этого из второго уравнения вычтем первое, умноженное на $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$

Из третьего вычтем первое умноженное на $\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$

и т.д.

Прямой ход метода Гаусса

Этот процесс приведет к системе:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ 0 & a^{1}_{22} \cdots & a^{1}_{2n} \\ \cdots\cdot & & \\ 0 & a^{1}_{n2} \cdots & a^{1}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f^{1}_{2} \\ \cdots \\ f^{1}_{n} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

При исключении x_1 преобразованию подвергаются строки расширенной матрицы, включая свободные члены.

Прямой ход метода Гаусса

Если $a^{1}_{22} \neq 0$ то применим аналогичный процесс к последующим уравнениям и исключим x_2 из n-2 уравнений.

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{0} & a_{12}^{0} & \dots & a_{1n}^{0} \\ 0 & a_{22}^{1} & \dots & a_{2n}^{1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n}^{2} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2^1 \\ f_3^2 \\ \dots \\ f_n^2 \end{pmatrix}$$

Прямой ход метода Гаусса

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{0} & a_{12}^{0} & \dots & a_{1k}^{0} & a_{1k+1}^{0} & \dots & a_{1n}^{0} \\ 0 & a_{22}^{1} & \dots & a_{2k}^{1} & a_{2k+1}^{1} & \dots & a_{2n}^{1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{k-1} & a_{kk+1}^{k-1} & \dots & a_{kn}^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1k+1}^{k} & \dots & a_{k+1n}^{k} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nk+1}^{k} & \dots & a_{nn}^{k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2^{1} \\ \dots \\ f_k^{k-1} \\ f_{k+1}^{k} \\ \dots \\ f_n^{k} \end{pmatrix}$$

k – тый шаг

Прямой ход метода Гаусса

Выпишем в общем виде рекуррентные соотношения для получения коэффициентов матрицы на k -м шаге:

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{i\,j}^{k} &= a_{i\,j}^{k-1} - \frac{a_{k\,j}^{k-1}\cdot a_{i\,k}^{k-1}}{a_{k\,k}^{k-1}} \\
f_{i}^{k} &= f_{i}^{k-1} - \frac{f_{k}^{k-1}\cdot a_{i\,k}^{k-1}}{a_{k\,k}^{k-1}}
\end{aligned}
\right|
$$

$$
\begin{aligned}
&k = 1, 2, \ldots, n-1; \\
&i, j = k+1, k+2, \ldots, n;
\end{aligned}
$$

Смысл индексов

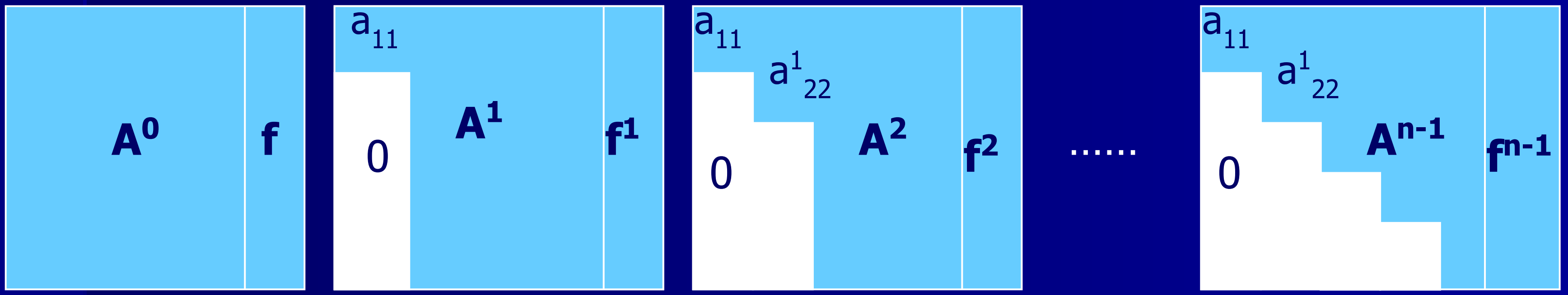
$$a_{i\,j}^{k} = a_{i\,j}^{k-1} - \frac{a_{k\,j}^{k-1} \cdot a_{i\,k}^{k-1}}{a_{k\,k}^{k-1}}$$

$$f_{i}^{k} = f_{i}^{k-1} - \frac{f_{k}^{k-1} \cdot a_{i\,k}^{k-1}}{a_{k\,k}^{k-1}}$$

- k – номер того уравнения, которое вычитается из остальных и номер того неизвестного, которое исключается из последующих уравнений;
- a_{kk}^{k-1} - называется разрешающим элементом;
- i – номер уравнения из которого в данный момент исключается неизвестное;
- j – текущий номер столбца.

Прямой ход метода Гаусса

Через n-1 шаг система будет приведена к треугольному виду, при этом прямой ход метода Гаусса завершен.



Схематическая иллюстрация прямого хода метода Гаусса

Обратный ход метода Гаусса

Осуществляется для нахождения неизвестных системы.

Из последнего уравнения находится x_n. Его значение подставляется в n-1 уравнение …

и т. д. до первого уравнения и x_1.

Обратный ход

Искомое решение системы (1) определяется по формулам:

$$x_n = \frac{f_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, x_k = \frac{f_k^{(k-1)} - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)} \cdot x_j}{a_{kk}^{(k-1)}}; k = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Весь алгоритм метода Гаусса осуществляется за порядка $\frac{n^3}{3}$ арифметических операций.

Пример. Метод Гаусса

Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Пример. Метод Гаусса (со схемой единственного деления*)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 3 & -2 & 4 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{-13}{2} & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & -5 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-11}{13} & \frac{-35}{13} \\ 0 & -5 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-11}{13} & \frac{-35}{13} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{13} & \frac{-6}{13} \end{bmatrix}$$

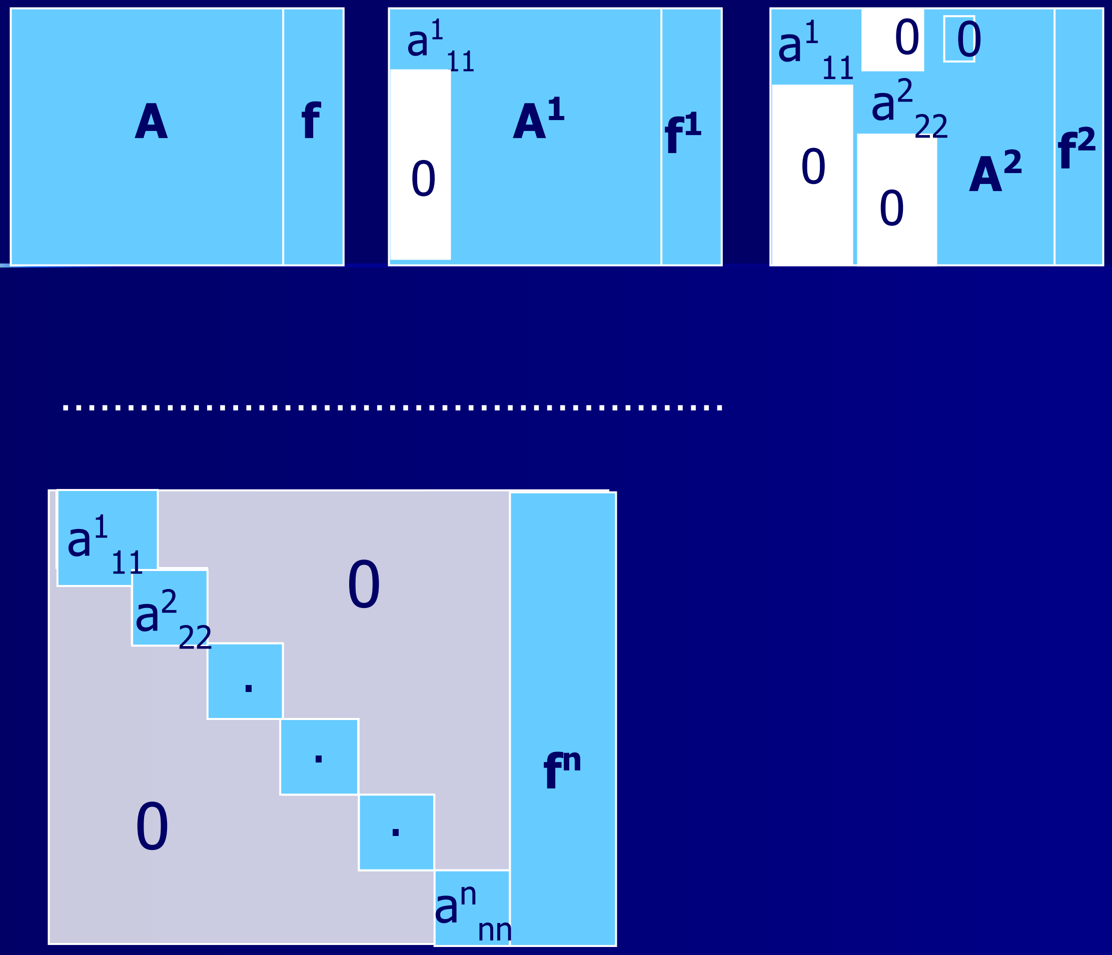
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-11}{13} & \frac{-35}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

* Схема единственного деления применяется для получения 1 на диагонали путем деления на разрешающий элемент

Метод Жордана – Гаусса

Идея модификации метода Гаусса состоит в том, чтобы одновременно осуществить прямой и обратный ход, приведя исходную матрицу к диагональному виду.

Если при этом на главной диагонали будут 1, то искомое решение – вектор свободных членов. Схематически метод выглядит следующим образом:



Схематическая иллюстрация метода Жордана-Гаусса

Метод Жордана – Гаусса

$$a_{ij}^{k} = a_{ij}^{k-1} - \frac{a_{kj}^{k-1}}{a_{kj}^{k-1}} a_{ik}^{k-1}, i, j \neq k$$

$$a_{ij}^{k} = \frac{a_{kj}^{k-1}}{a_{kj}^{k-1}}, i = k, j \neq k; a_{ij}^{k} = \frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kj}^{k-1}}, i \neq k, j = k$$

$$a_{ij}^{0} = a_{ij}, i, j = 1, 2, ..., n.$$

$$x_k = \frac{f^k}{a_{kk}^k}, k = 1, \ldots, n$$

Модификации методов исключения неизвестных

- Схема единственного деления
- Выбор главного элемента

Схема единственного деления:

на каждом шаге делим на разрешающий диагональный коэффициент

(возможна и в любом методе исключения неизвестных)

Пример. Метод Жордана-Гаусса (схема единственного деления)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 3 & -2 & 4 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{-13}{2} & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & -5 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-11}{13} & \frac{-35}{13} \\ 0 & -5 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{10}{13} & \frac{33}{13} \\ 0 & 1 & \frac{-11}{13} & \frac{-35}{13} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{13} & \frac{-6}{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Выбор главного элемента

Пример. Дана система

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3.901 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Точным решением данной системы является вектор (0,-1,1).

Выбор главного элемента

Проведём преобразования системы по методу Гаусса, округляя промежуточные результаты до 5 значащих цифр.

Прямой ход

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3.901 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.001 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6.001 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.001 & 6 \\ 0 & 0 & 15005 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6.001 \\ 15004 \end{bmatrix}$$

Обратный ход

$$x_3 = \frac{15004}{15005} \approx 0.99993$$

$$x_2 = \frac{6.001 - 6 \cdot 0.99993}{-0.001} \approx -1.5$$

$$x_1 = \frac{7 + 7 \cdot (-1.5)}{10} \approx -0.35$$

- Сильная потеря точности связана с выбором на 2-м шаге разрешающего элемента Из-за ограниченной точности вычислений (5 значащих цифр) допущена большая относительная погрешность, которая распространяется далее на все вычисления.
- Этот пример иллюстрирует следующую ситуацию: если на k-ом шаге диагональный элемент не равен нулю, но его значение мало ($\approx\varepsilon$), то, может быть, этот элемент $\neq 0$ только из-за ошибок округления, а должен быть 0 и делить на него нельзя.

Чтобы исключить подобное, алгоритм метода исключения неизвестных модифицируется. На каждом шаге с помощью перестановки строк в качестве разрешающего подбирается наибольший по модулю из возможных элемент. Такая модификация носит название ***выбор главного элемента***.

В рассмотренном примере выбор главного элемента осуществляется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -0.001 & 6 \\ 0 & 2.5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6.001 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

переставим 2-ое и 3-е уравнения:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & -0.001 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.001 \end{bmatrix}$$

исключим x_2 из 3-го уравнения:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.002 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.002 \end{bmatrix}$$

Обратный ход

$$x_3 = \frac{6.002}{6.002} = 1$$

$$x_2 = \frac{2.5 - 5 \cdot 1}{2.5} = -1$$

$$x_1 = \frac{7 + 7 \cdot (-1)}{10} = 0$$

Результат совпадает с точным решением.

Замечание.

- Выбор главного элемента путём перестановки строк не является единственным способом модификации, возможна перестановка столбцов с соответствующей перенумерацией неизвестных, а также комбинированная перестановка строк и столбцов.