

Лекция № 9. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Замечательные пределы

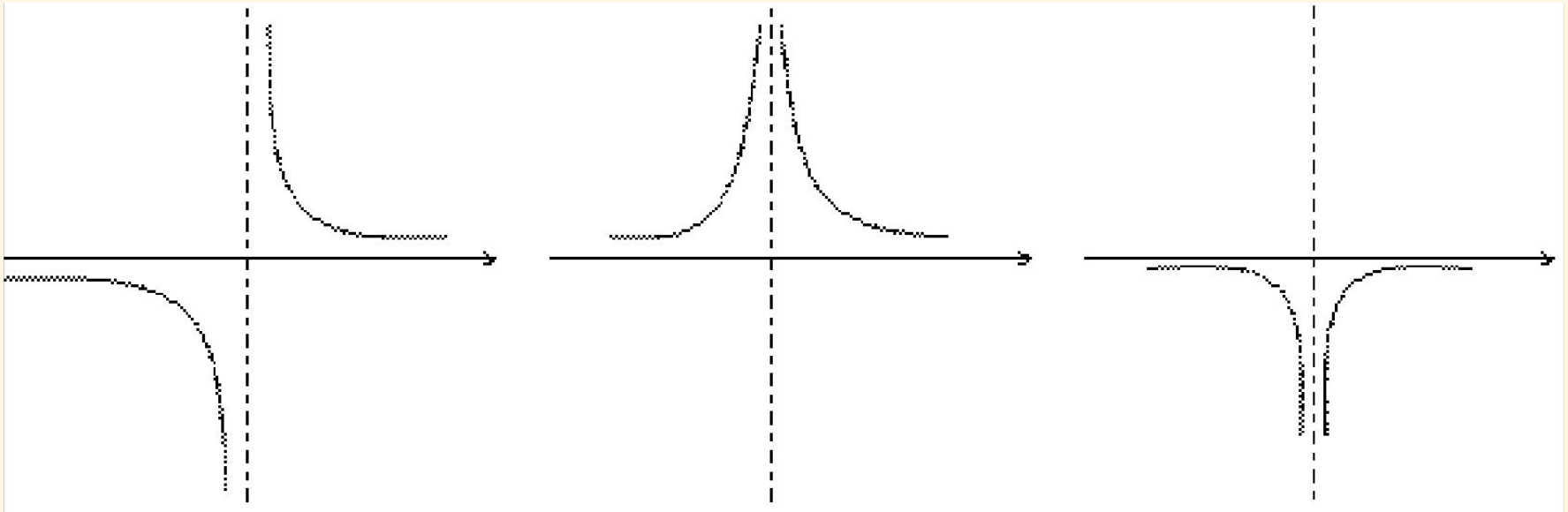
1. Бесконечно большие функции, их связь с бесконечно малыми функциями.
2. Замечательные пределы.
3. Сравнение бесконечно малых функций.
Эквивалентные бесконечно малые функции.
4. Раскрытие неопределенностей.

1. Бесконечно большие функции, их связь с бесконечно малыми функциями.

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется бесконечно большой в точке x_0 , если для любого N существует такое число $\delta > 0$, что для любого x , удовлетворяющего условию $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x)| > N$.*

Лекция № 9

Графики бесконечно больших функций



Теорема 1.

Если $f(x)$ – бесконечно большая величина,
то $\frac{1}{f(x)}$ бесконечно малая величина; если $f(x)$
– бесконечно малая величина и $f(x) \neq 0$, то $\frac{1}{f(x)}$ –
бесконечно большая величина.

Пример 1.

$f(x)=x^2$ – бесконечно малая величина при $x \rightarrow 0$;

$\frac{1}{x^2}$ – бесконечно большая величина при $x \rightarrow 0$.

Свойства бесконечно больших функций

Свойство 1. Сумма конечного числа бесконечно больших функций при $x \rightarrow x_0$ тоже бесконечно большая функция при $x \rightarrow x_0$.

Свойство 2.

Произведение конечного числа бесконечно больших функций при $x \rightarrow x_0$ тоже бесконечно большая функция при $x \rightarrow x_0$.

Свойство 3.

Произведение бесконечно большой функции при $x \rightarrow x_0$ на функцию, имеющую предел, отличный от нуля, а следовательно, и произведения бесконечно большой функции на постоянную, не равную нулю, являются бесконечно большой функцией при $x \rightarrow x_0$.

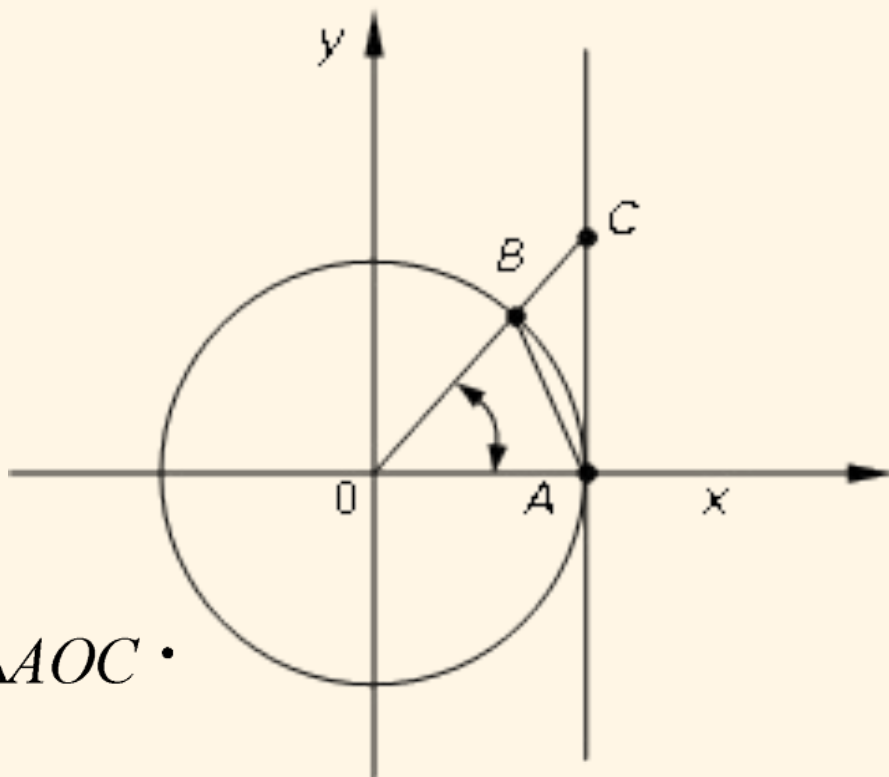
2. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Геометрическая интерпретация

$$\angle AOB = x$$



$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{сект.}AOB} < S_{\triangle AOC}.$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \operatorname{tg} x,$$

Доказательство замечательного предела

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad \sin x > 0$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следствия из первого замечательного предела

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k \lim_{kx \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = k \cdot 1 = k.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} \frac{1}{\cos kx} = k \cdot 1 = k.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} \frac{x}{\sin mx} = k \frac{1}{m} = \frac{k}{m}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{\operatorname{tg} mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} \frac{x}{\operatorname{tg} mx} = \frac{k}{m}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1, \text{ где } y = \arcsin x.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1, \text{ где } y = \operatorname{arctg} x.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71\dots$$

Следствия из второго замечательного предела

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \text{ где } a > 0, y = a^x - 1.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1.$$

3. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции.

При $\alpha(x) \rightarrow 0$ справедливы следующие
соотношения эквивалентности

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

Эквивалентные б.м. величины

$$\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \cdot \frac{1}{\ln a} \quad a > 0$$

$$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x);$$

$$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a \quad a > 0$$

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);$$

$$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2};$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$.

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x}$.

4. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

1. Неопределенность типа $\frac{0}{0}$

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ называют

неопределенностью типа $\frac{0}{0}$.

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$.

2. Неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$.

Предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ называют

неопределенностью типа $\frac{\infty}{\infty}$.

3. Неопределенность типа $0 \cdot \infty$

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$.

Предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ называют

неопределенностью типа $0 \cdot \infty$.

4. Неопределенность типа $\infty - \infty$

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$.

Предел $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$ (называют)

неопределенностью типа $\infty - \infty$.

5. Показательно-степенные неопределенности

Показательно-степенные неопределенности 0^0 , ∞^0 , 1^∞ сводятся к неопределенности $\infty \cdot 0$ следующим образом:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} .$$

Литература

1. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, Е. В. Шикин, В. И. Заляпин
Вся высшая математика. Том 1. Учебник.
(линейная алгебра и аналитическая
геометрия, введение в математический
анализ). -М.: Едиториал УРСС, 2012 – [1],
с. 206-209; 215-216; 225-228.