Лекция № 9. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Замечательные пределы

1. Бесконечно большие функции, их связь с бесконечно малыми функциями.

2. Замечательные пределы.

3. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции.

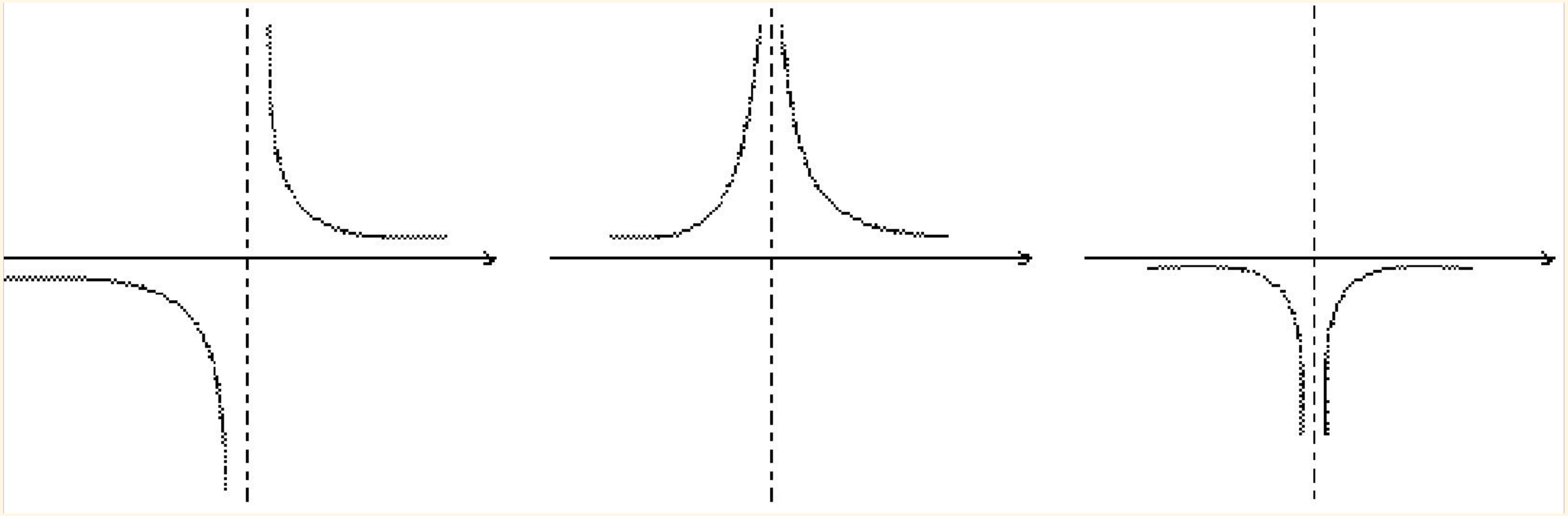
4. Раскрытие неопределенностей.

1. Бесконечно большие функции, их связь с бесконечно малыми функциями.

Определение 1. *Функция* $f(x)$ *называется бесконечно большой в точке* x_0, если *для любого* N *существует такое число* $\delta>0$, *что для любого* x, *удовлетворяющего условию* $|x-x_0|<\delta$ *следует* $|f(x)|>N$.

Лекция № 9

Графики бесконечно больших функций



Теорема 1.

Если $f(x)$ – бесконечно большая величина, то $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая величина; если $f(x)$ – бесконечно малая величина и $f(x) \neq 0$, то $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая величина.

Пример 1.

$f(x)=x^2$ – бесконечно малая величина при $x\to 0$;

$\frac{1}{x^2}$ – бесконечно большая величина при $x\to 0$.

Свойства бесконечно больших функций

Свойство 1. Сумма конечного числа бесконечно больших функций при $x \to x_0$ тоже бесконечно большая функция при $x \to x_0$.

Свойство 2.

Произведение конечного числа бесконечно больших функций при $x \to x_0$ тоже бесконечно большая функция при $x \to x_0$.

Свойство 3.

Произведение бесконечно большой функции при $x \to x_0$ на функцию, имеющую предел, отличный от нуля, а следовательно, и произведения бесконечно большой функции на постоянную, не равную нулю, являются бесконечно большой функцией при $x \to x_0$.

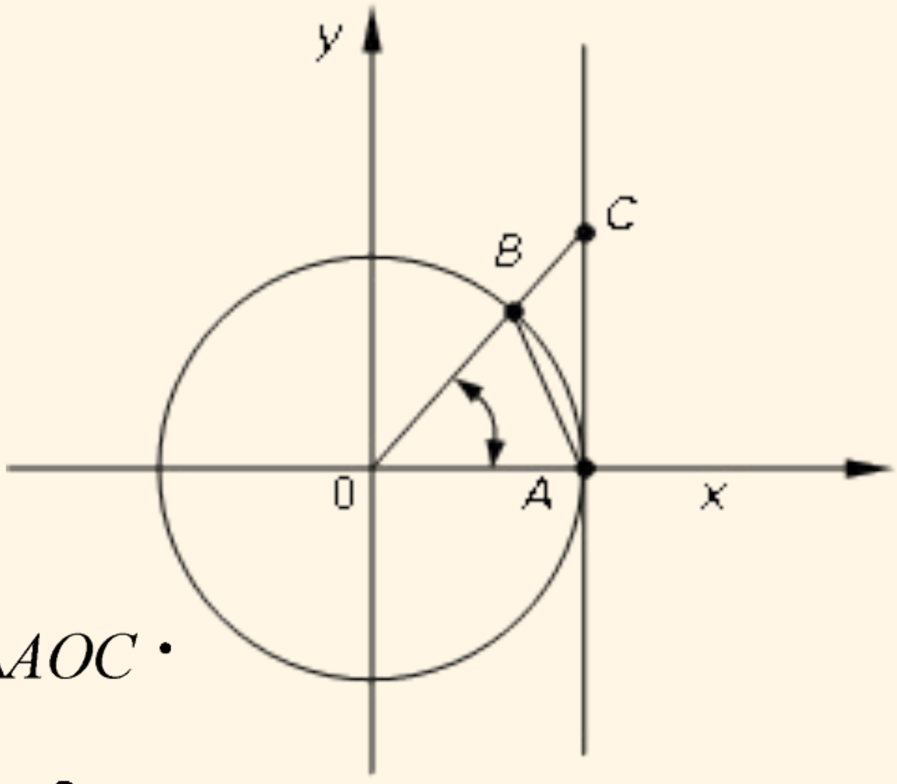
2. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Геометрическая интерпретация

$$\angle AOB = x$$



$$S_{\Delta AOB} < S_{\text{сект.}AOB} < S_{\Delta AOC}\,.$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \sin x < \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x < \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \mathrm{tg}x\,,$$

Доказательство замечательного предела

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $sinx > 0$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следствия из первого замечательного предела

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k\lim\limits_{kx\to 0}\dfrac{\sin kx}{kx}=k\cdot 1=k.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg} kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}\dfrac{1}{\cos kx}=k\cdot 1=k.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{\sin mx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}\dfrac{x}{\sin mx}=k\dfrac{1}{m}=\dfrac{k}{m}.$

$$4.\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}kx}{\mathrm{tg}mx}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}kx}{x}\frac{x}{\mathrm{tg}mx}=\frac{k}{m}.$$

$$5.\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1,\ \text{где } y=\arcsin x.$$

$$6.\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\mathrm{tg}y}=1,\ \text{где } y=\mathrm{arctg}x.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e=2{,}71\ldots$$

Следствия из второго замечательного предела

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,$ где $a>0,\ y=a^x-1.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\ln e=1.$

3. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции.

При $\boldsymbol{\alpha(x)}\to 0$ справедливы следующие соотношения эквивалентности

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x);$$

Эквивалентные б.м. величины

$$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)\cdot\frac{1}{\ln a} \qquad a>0$$

$$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x);$$

$$a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\cdot\ln a \qquad a>0$$

$$e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x);$$

$$1-\cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2};$$

Пример. **Найти предел** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{\sin 7x}$.

Пример. **Найти предел** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{1-\cos x}$.

4. Раскрытие неопределенностей

1. Неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.

Предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ называют

неопределенностью типа $\dfrac{0}{0}$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$.

2. Неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

Предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ называют

неопределенностью типа $\dfrac{\infty}{\infty}$.

3. Неопределенность типа $0 \cdot \infty$

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

Предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\,g(x)$ называют

неопределенностью типа $0 \cdot \infty$.

4. Неопределенность типа $\infty - \infty$

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

Предел $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x))$ называют

неопределенностью типа $\infty - \infty$.

5. Показательно-степенные неопределенности

Показательно-степенные неопределенности 0^0, ∞^0, 1^∞ сводятся к неопределенности $\infty \cdot 0$ следующим образом: .

$$\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^{g(x)\cdot \ln f(x)}.$$

Литература

1. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, Е. В. Шикин, В. И. Заляпин Вся высшая математика. Том 1. Учебник. (линейная алгебра и аналитическая геометрия, введение в математический анализ). -М.: Едиториал УРСС, 2012 – [1], с. 206-209; 215-216; 225-228.