

Обратные тригонометрические функции

«Функция, как правило, определяется для тех значений аргумента, какие для данной задачи представляют реальное значение»

Хинчин А.Я.

При каких значениях t верно равенство?

$$\sin t = 0,5$$

$$t_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin t = 0,3$$

$$t = ?$$

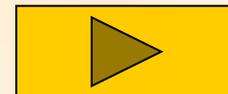
Обратные тригонометрические функции

$y = \arcsin x$
График

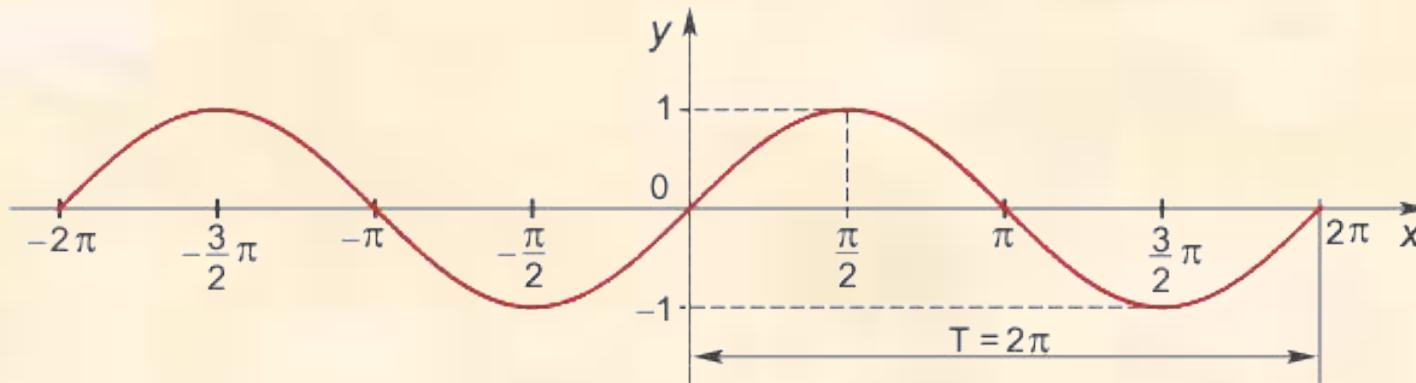
$y = \arccos x$
График

$y = \arctan x$
График

$y = \operatorname{arccot} x$
График



Функция $y = \sin x$



Область определения функции — множество \mathbf{R} всех действительных чисел.

Множество значений функции — отрезок $[-1; 1]$, т.е. синус функция — ограниченная.

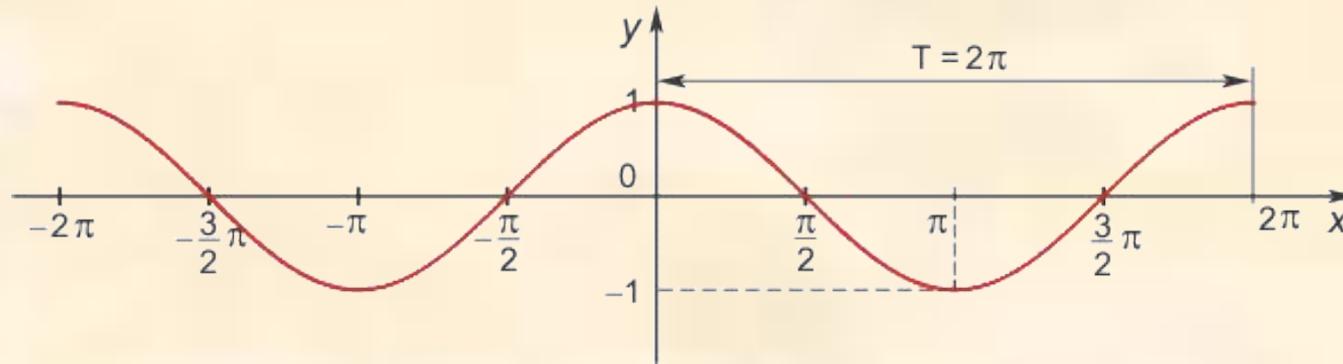
Функция нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$ для всех $x \in \mathbf{R}$.

График функции симметричен относительно начала координат.

Функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π :



Функция $y = \cos x$



Область определения функции — множество \mathbf{R} всех действительных чисел.

Множество значений функции — отрезок $[-1; 1]$, т.е. косинус функция — ограниченная.

Функция четная: $\cos(-x) = \cos x$ для всех $x \in \mathbf{R}$.

График функции симметричен относительно оси OY .

Функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π :



Определен ие

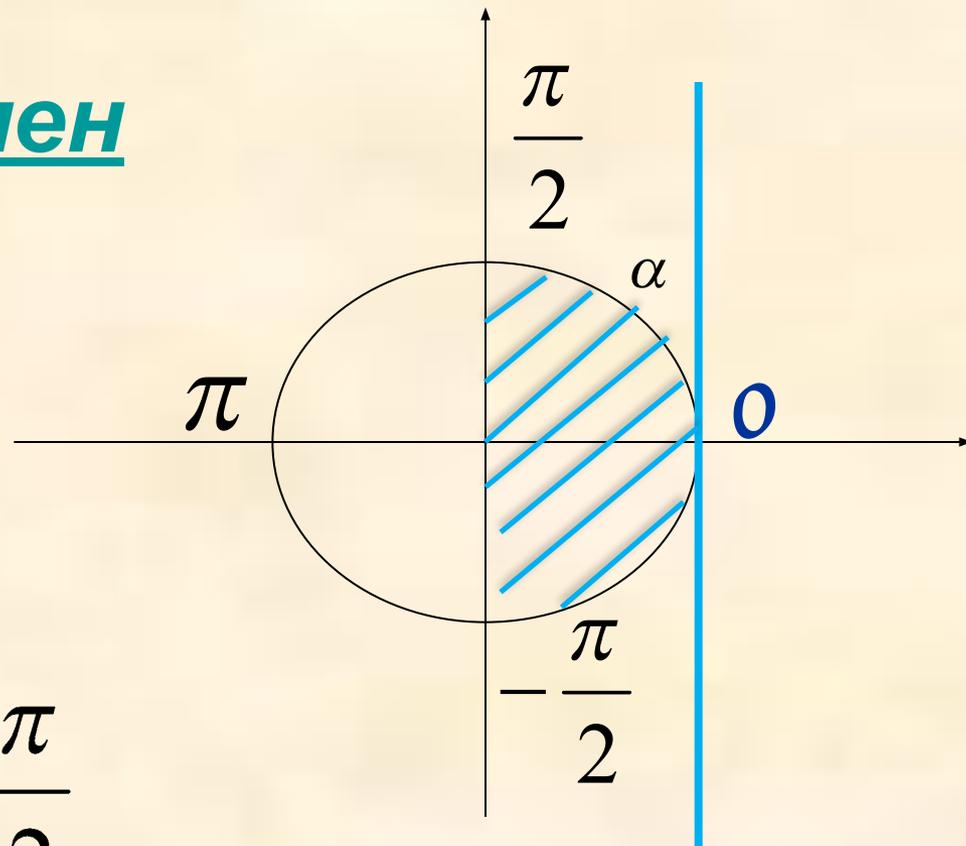
$\arcsin t =$

α

$$1) -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$2) \sin \alpha = t$$

$$3) -1 \leq t \leq 1$$



$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

Определен ие

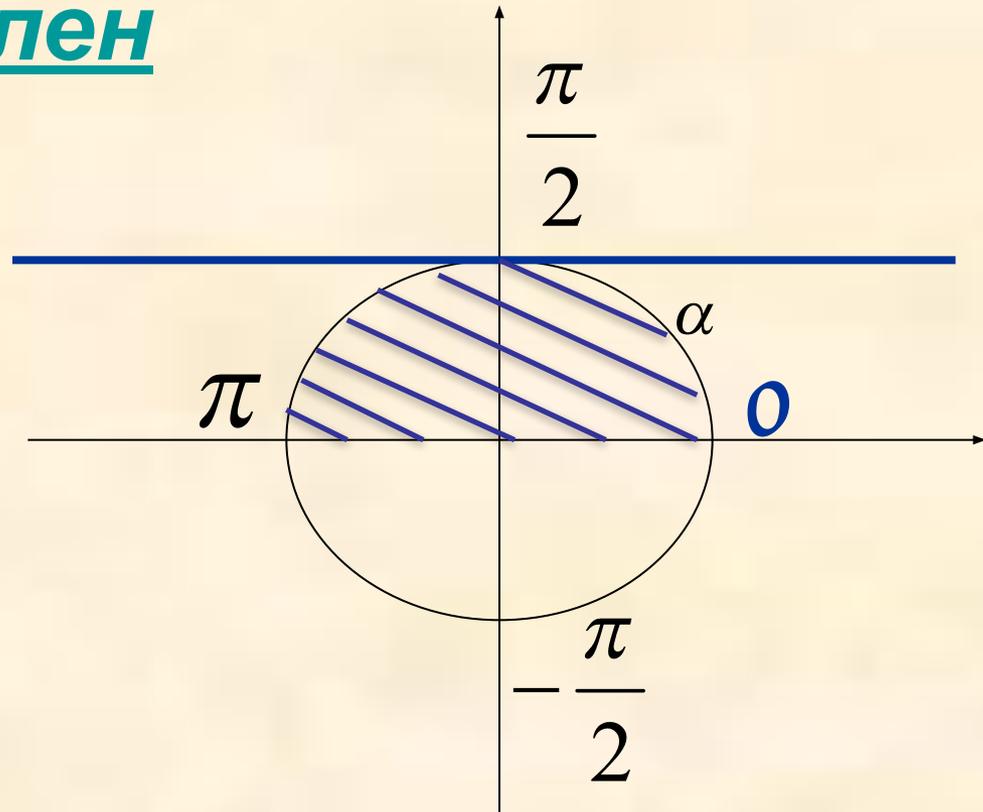
$\arccos t =$

a

$$1) 0 \leq a \leq \pi$$

$$2) \cos a = t$$

$$3) -1 \leq t \leq 1$$



▸ $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

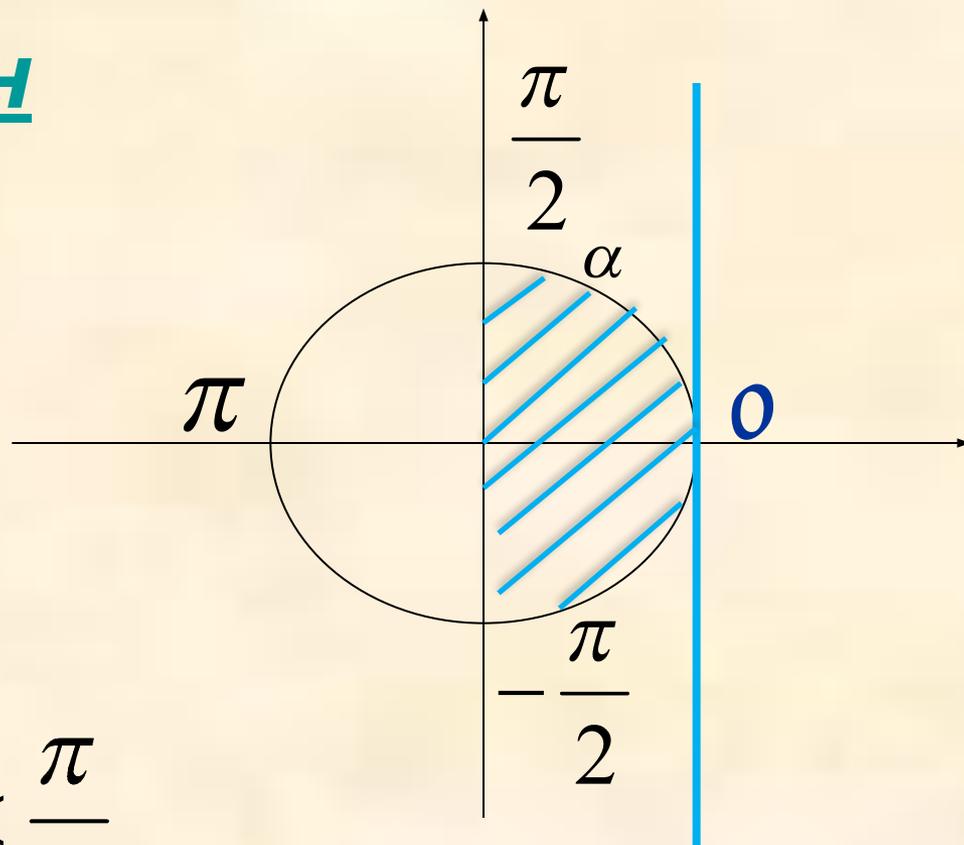
Определен ие

$\arctg t =$

a

$$1) -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$$

$$2) tga = t$$



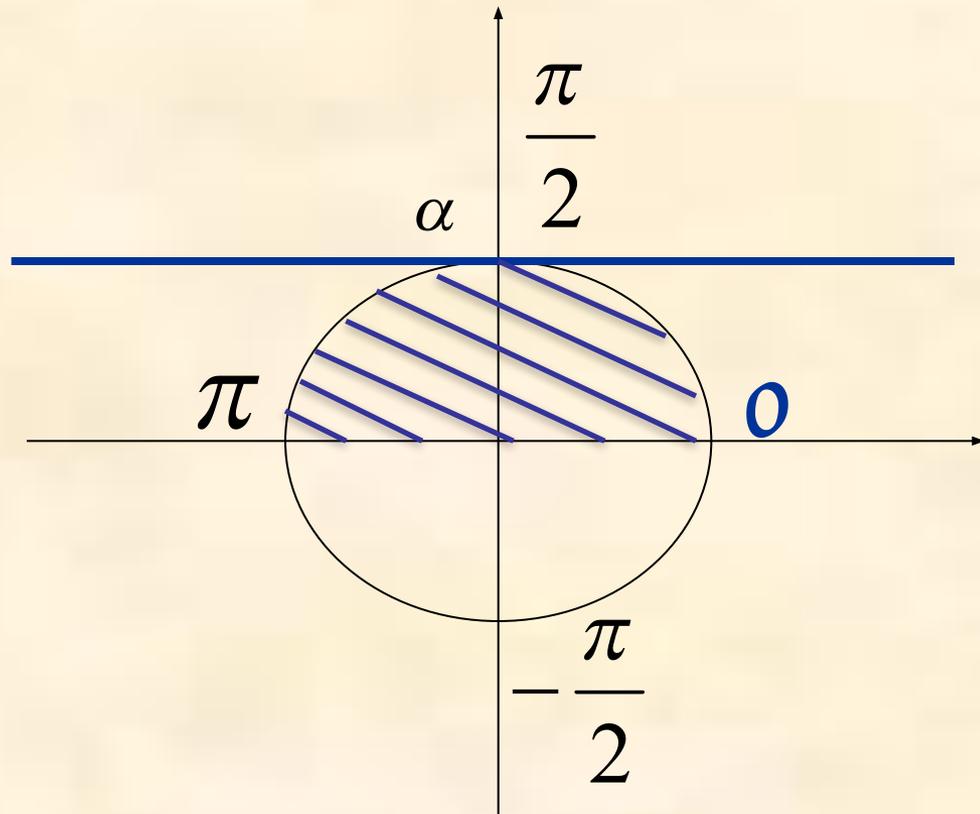
Определен ие

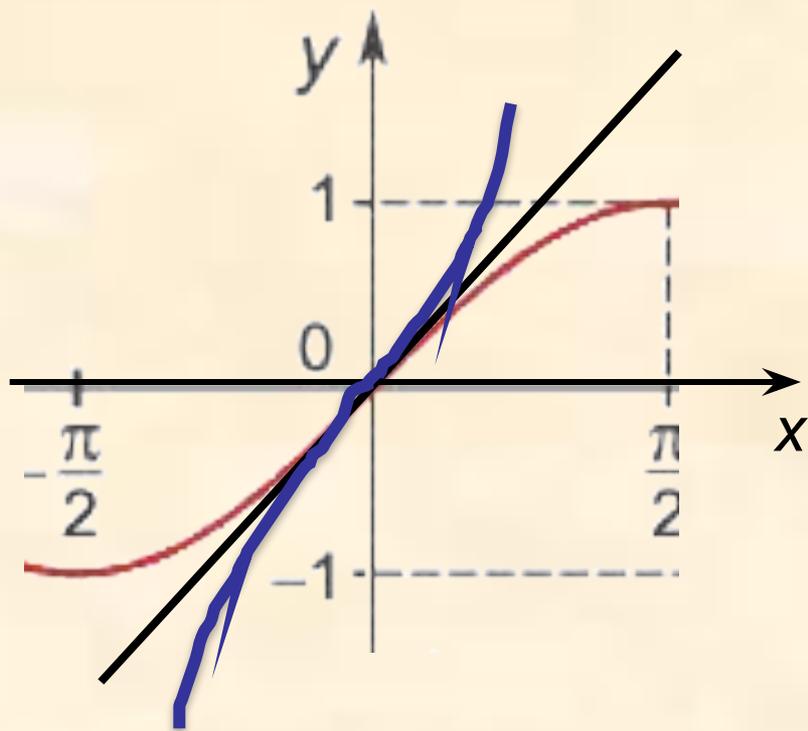
$\text{arcctg } t =$

a

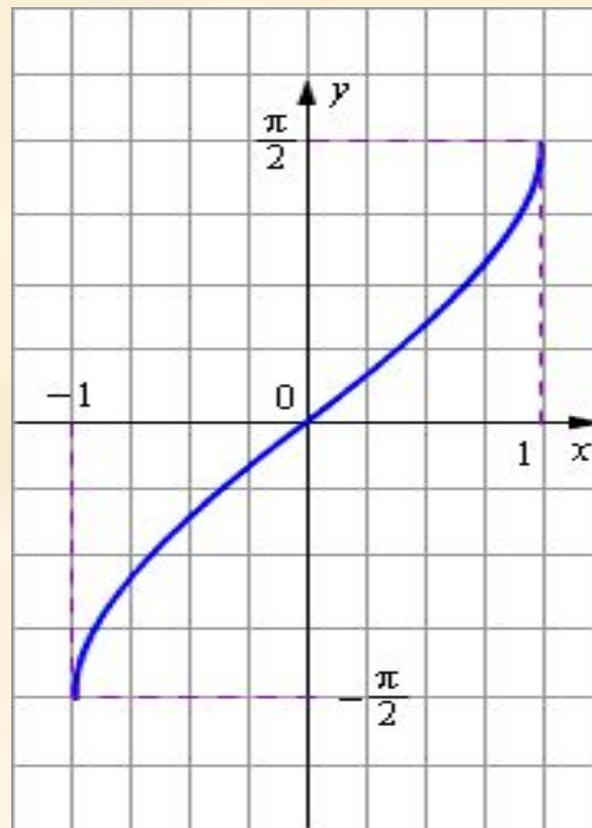
1) $0 < a < \pi$

2) $\text{ctg} a = t$





$$y = \arcsin x$$



1) Область определения: отрезок $[-1; 1]$;

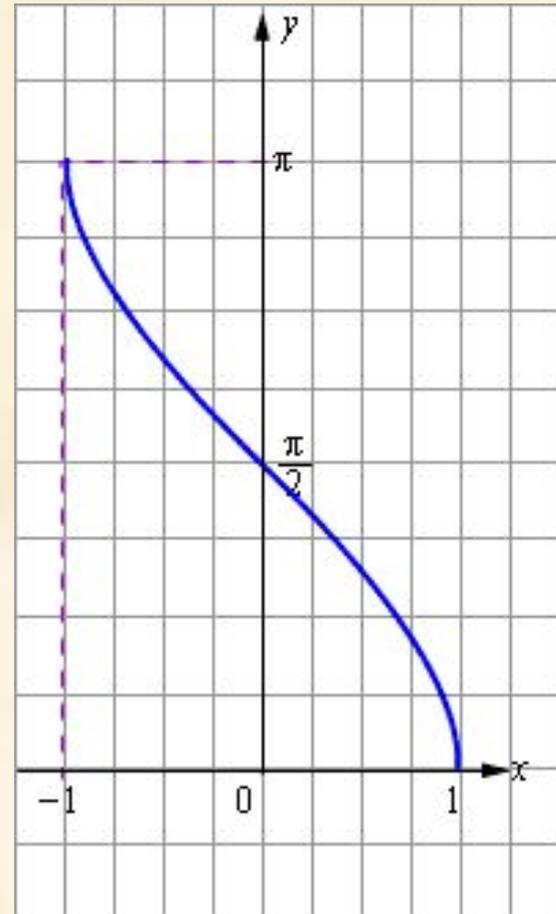
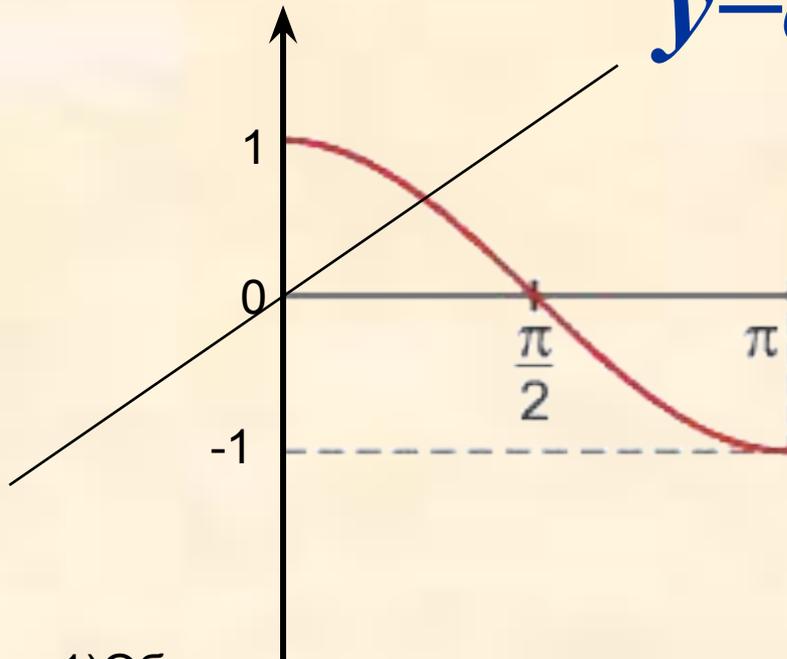
2) Область значений: отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

3) Функция $y = \arcsin x$ нечетная:
 $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

4) Функция $y = \arcsin x$ монотонно возрастающая;



$y = \arccos x$



1) Область определения: отрезок $[-1; 1]$;

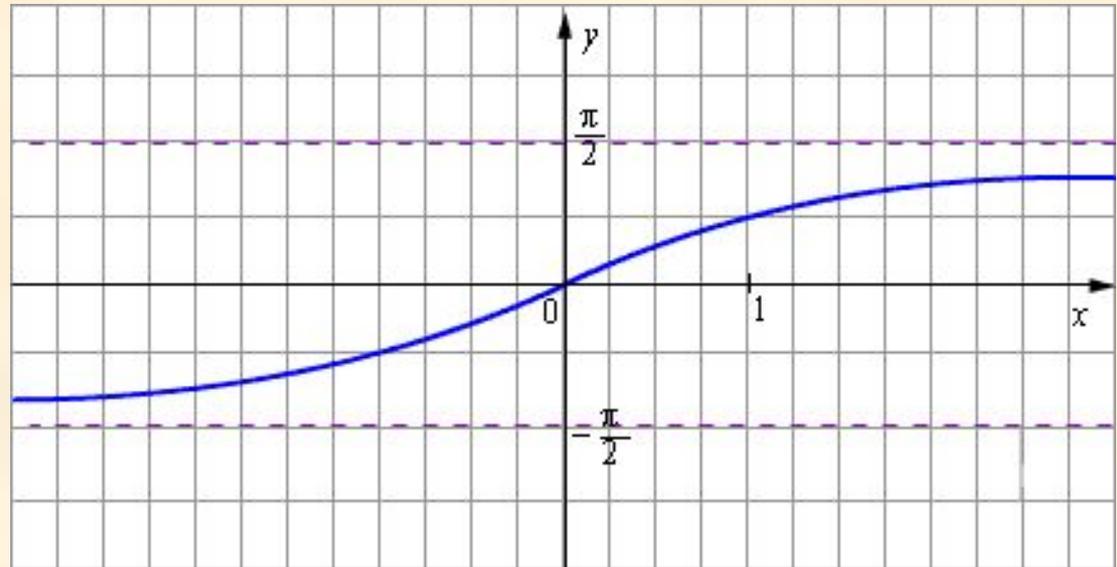
2) Область значений: отрезок $[0, \pi]$

3) Функция $y = \arccos x$ четная:
 $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

4) Функция $y = \arccos x$ монотонно убывающая;



$y = \operatorname{arctg} x$



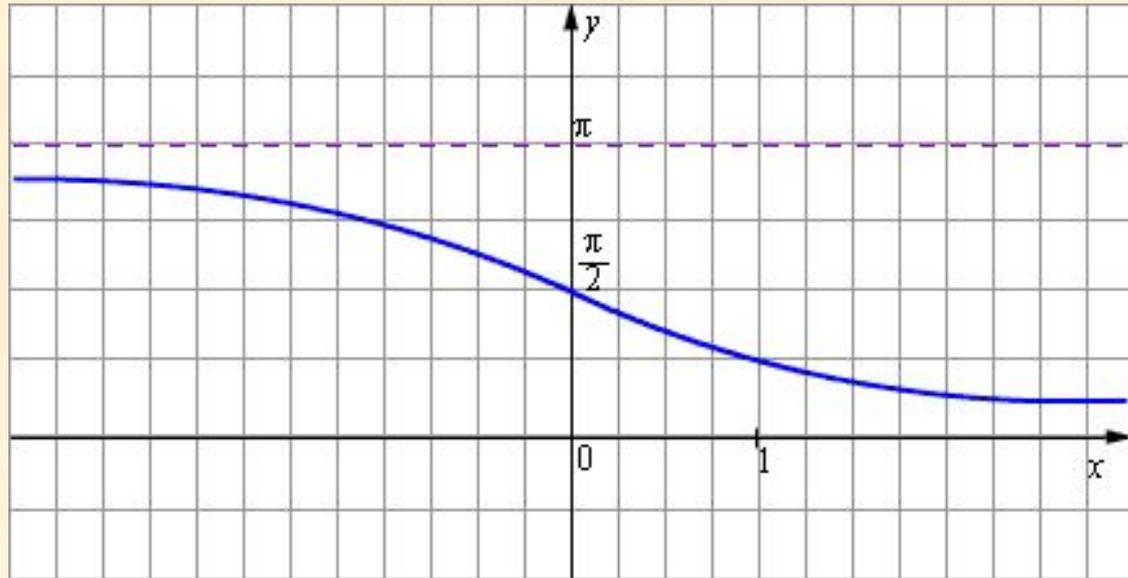
1) Область определения: \mathbb{R} – множество действительных чисел

2) Область значений: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

3) Функция $y = \operatorname{arcsin} x$ нечетная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;

4) Функция $y = \operatorname{arctg} x$ монотонно возрастающая;

$y = \text{arccot} x$



1) Область определения: \mathbb{R} -

2) Область значений: $(0, \pi)$

3) Функция $y = \text{arccot} x$ ни четная ни нечетная

$$\text{arccot}(-x) = \pi - \text{arccot} x$$

4) Функция $y = \text{arccot} x$ монотонно убывающая;



Обратные тригонометрические функции

«Функция, как правило, определяется для тех значений аргумента, какие для данной задачи представляют реальное значение»

Хинчин А.Я.

- учащиеся должны знать определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса, графики этих функций, свойства аркфункций, связь с тригонометрическими функциями уметь находить значения обратных тригонометрических функций, решать простейшие уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции графическим и функционально-графическим методом
- воспитывать ответственность, аккуратность при построении графиков
- развивать логическое мышление, математическую речь, умение работать в нужном темпе, внимание

Работаем устно

$$\arcsin 1 \quad \arcsin 0 \quad \arcsin \frac{1}{2} \quad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\arccos 1 \quad \arccos 0 \quad \arccos \frac{1}{2} \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

Работаем устно

Имеет ли смысл выражение?

$\arcsin 2$ $\arccos 3\pi$ $\operatorname{arctg} 100$

Может ли $\arcsin t$ и $\arccos t$ принимать значение равное

$5,$ $-\frac{5}{9},$ $\pi,$ $-10,$ $\frac{3}{7}, ?$

Работаем устно

Найдите значения выражений:

$$\arccos\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arccctg}\left(-\frac{7}{8}\right)\right)$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$$

$$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}15)$$

$$\cos\left(\arcsin\frac{3\pi}{2}\right)$$

Работаем устно

$$\operatorname{arctg} 1 \quad \operatorname{arctg} \sqrt{3} \quad \operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\operatorname{arcctg} 1 \quad \operatorname{arcctg} \sqrt{3} \quad \operatorname{arcctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$$

Свойства аркфункций

$$\cos(\arccos x) = x,$$

$$\sin(\arcsin x) = x,$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$$

$$\arccos(\cos x) = x, x \in [-1; 1]$$

$$\arcsin(\sin x) = x, x \in [-1; 1]$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x,$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x.$$

Тригонометрические тождества

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Формулы связывающие обратные тригонометрические функции

$$\arcsin \alpha = -\arcsin(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\arccos \alpha = \pi - \arccos(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arcsin \alpha = \operatorname{arcctg} \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\operatorname{arctg} \alpha = -\operatorname{arctg}(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} \alpha = \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$\operatorname{arcctg} \alpha = \pi - \operatorname{arcctg}(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \alpha = \arccos \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

- Решите уравнение $\arcsin x = x + \frac{\pi}{2} - 1$

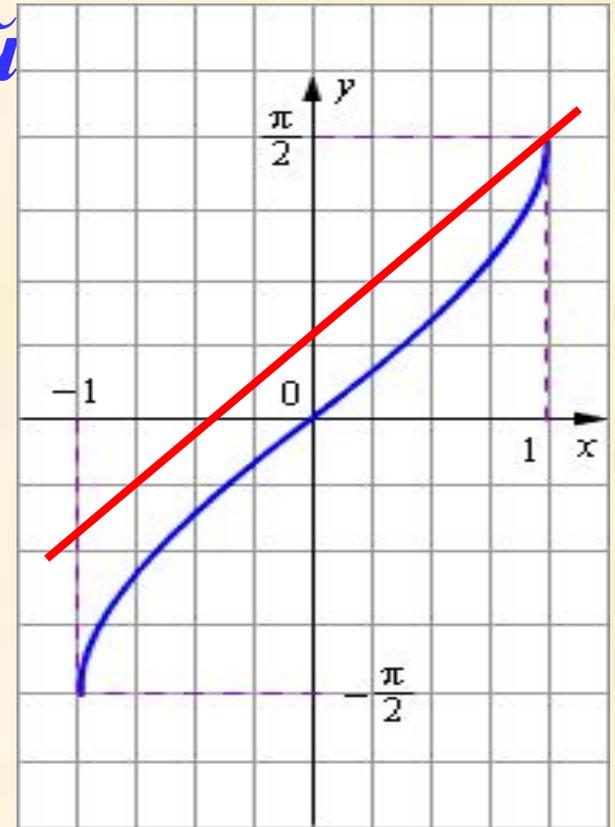
Графический метод решения уравнений

- 1) Строим график $y = \arcsin x$
- 2) Строим график $y = x + \frac{\pi}{2} - 1$
в той же системе координат.

3) Находим абсциссы точек пересечения графиков (значения берутся приближенно).

4) Записываем ответ.

Ответ. 1.



Функционально-графический метод решения уравнений

Пример: решите уравнение $\arccos x = \frac{\pi}{2} + x$
Решение.

1) $y = \arccos x$ убывает на области определения

2) $g(x) = \frac{\pi}{2} + x$, возрастает на D ,

3) Уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.

4) Подбором находим, что $x = 0$.

Ответ. 0.

Спасибо за урок!

*Успехов в дальнейшем
изучении тригонометрии!*