Сегодня: понедельник, 3 октября 2022 г.

Лекция 6

Закон сохранения момента импульса системы материальных точек

Статика – инженерная наука, изучающая равновесие твердых тел, находящихся под действием сил. Она необходима для определения максимально допустимых нагрузок.

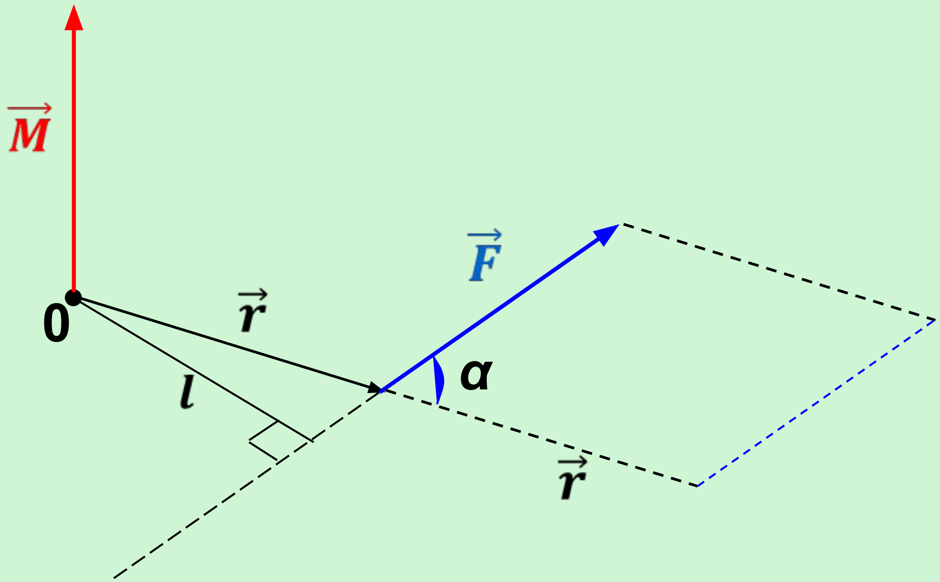
- Чтобы удержать тело в покое (равновесии), необходимо выполнение 2-х условий:

1. Векторная сумма всех сил равна 0

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

2. Векторная сумма всех моментов сил равна 0

Момент силы ***F*** относительно неподвижной точки 0 – физическая величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора ***r***, проведенного из точки 0 в точку приложения силы, на силу ***F***.



$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]$,

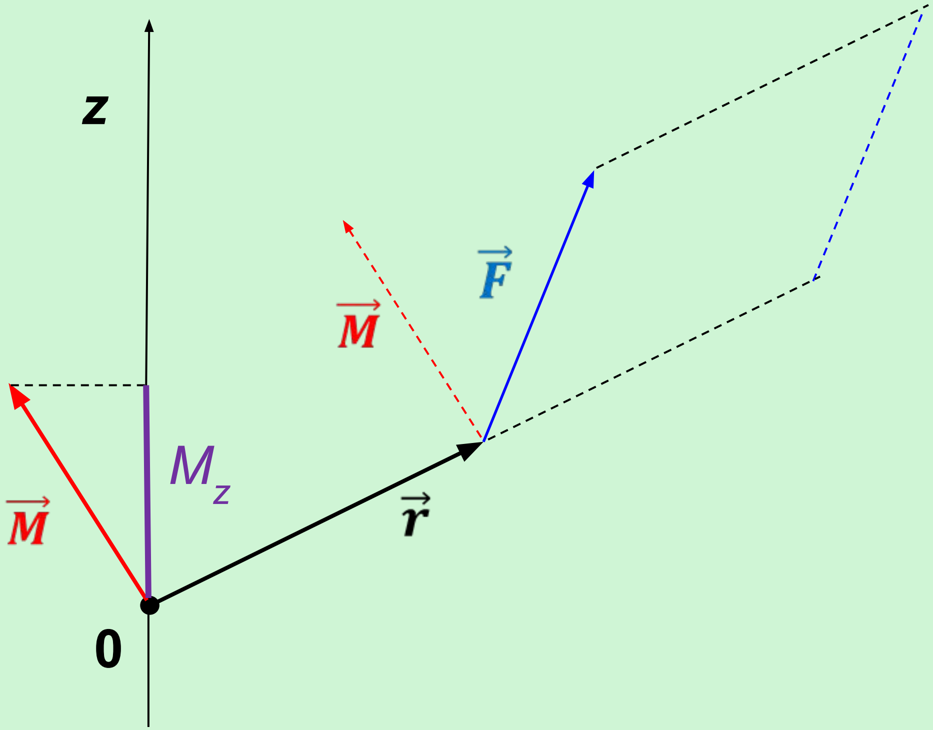
$\vec{M}$ – псевдовектор.

$|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}| \cdot \sin\alpha$,

$|\vec{r}| \cdot \sin\alpha = l$ – плечо силы.

$$\vec{M} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k},$$

$$M_x = |[\vec{r} \cdot \vec{F}]|_x, M_y = |[\vec{r} \cdot \vec{F}]|_y, M_z = |[\vec{r} \cdot \vec{F}]|_z.$$



Момент силы относительно неподвижной оси – скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора $\boldsymbol{M}$ относительно произвольной точки данной оси.

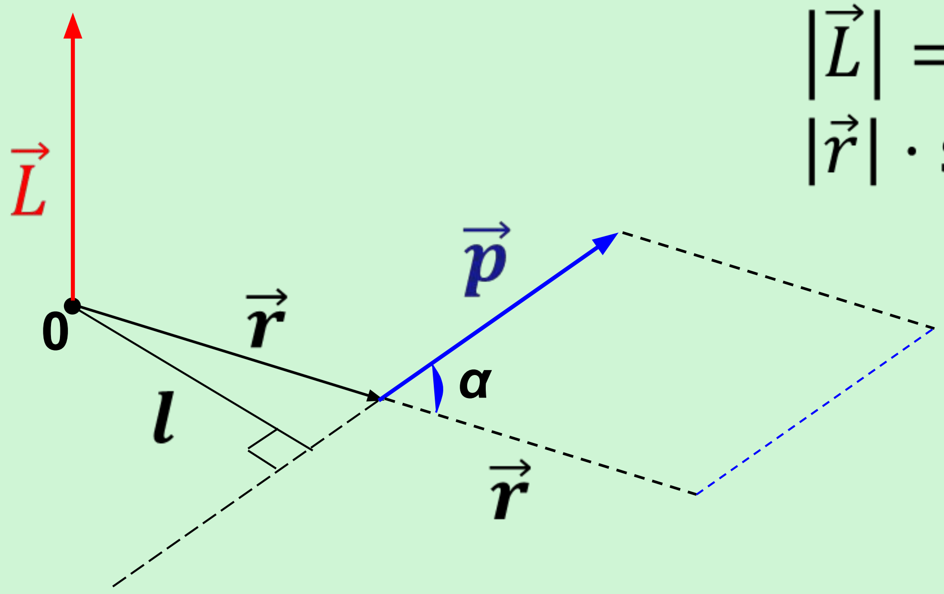
Значение M_z не зависит от выбора положения точки 0 на оси z.

Момент импульса (количества движения) материальной точки относительно неподвижной точки 0 – физическая величина, определяемая векторным произведением

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}] = [\vec{r} \cdot m\vec{v}].$$

$$|\vec{L}| = |\vec{r}||\vec{p}| \cdot \sin\alpha\,,$$

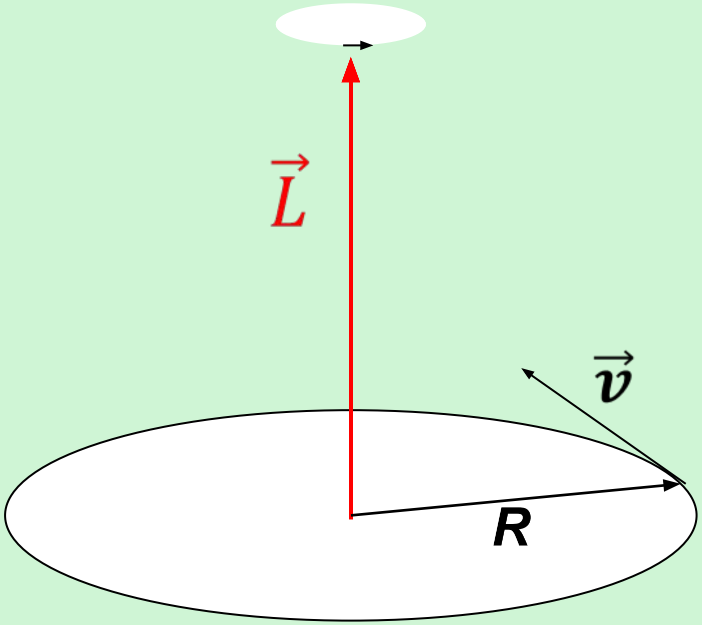
$|\vec{r}| \cdot \sin\alpha = l$ – плечо импульса.



$$\vec{L} = L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_z\vec{k},$$

$$L_x = |[\vec{r} \cdot \vec{p}]|_x, L_y = |[\vec{r} \cdot \vec{p}]|_y, L_z = |[\vec{r} \cdot \vec{p}]|_z.$$

Момент импульса относительно неподвижной оси – скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора ***L*** относительно произвольной точки данной оси.



$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}].$$

Для движения по окружности:

$$\vec{L} = [\vec{R} \cdot m\vec{v}].$$

$$L = Rmv \sin \angle \underbrace{\vec{v}, \vec{R}}_{\vec{v} \perp \vec{R}} = Rm \underbrace{v}_{\omega R} = \omega m R^2.$$

Уравнение моментов

Математическая справка: $\dfrac{d}{dt}(x \cdot y) = \dfrac{dx}{dt} y + x \dfrac{dy}{dt}.$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{[\vec{r} \cdot \vec{p}]}_{\vec{L}} = \left[\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \cdot \vec{p}\right] + \left[r \cdot \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{F}}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{[\vec{v} \cdot \vec{p}]}_{\substack{0, \vec{v}\uparrow\uparrow\vec{p} \\ \sin\angle\vec{v},\vec{p}=0}} + \underbrace{[\vec{r} \cdot \vec{F}]}_{\vec{M}} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \qquad \vec{L} \uparrow\updownarrow \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Производная по времени от момента импульса относительно *точки* равна моменту силы относительно этой *точки*.

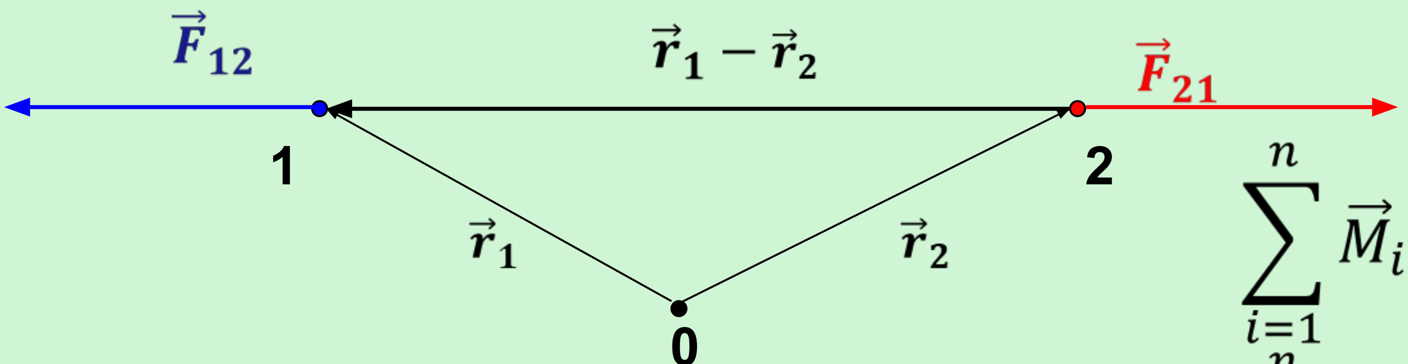
Производная по времени от момента импульса относительно *оси* равна моменту силы относительно этой *оси*.

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x, \frac{dL_y}{dt} = M_y, \frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Закон сохранения момента импульса системы материальных точек

При произвольном движении системы *n* материальных точек:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i\,, \\ &\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_{i\ \text{внутр}} + \vec{M}_{i\ \text{внеш}} \end{aligned}\right\} \sum_{i=1}^{n} \frac{dL_i}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i\ \text{внутр}} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i\ \text{внеш}}}_{\text{результирующий момент}} \quad (1)$$



Действие внутренних сил сводится к парным взаимодействиям

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i\ \text{внутр}} = \vec{M}_{\text{внутр}},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i\ \text{внеш}} = \vec{M}_{\text{внеш}}.$$

$\vec{M}_1 = [\vec{r}_1 \cdot \vec{F}_{12}], \vec{M}_2 = [\vec{r}_2 \cdot \vec{F}_{21}],$
3 з – н. Ньютона: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$

$\vec{M}_2 = [-\vec{r}_2 \cdot \vec{F}_{12}] \Rightarrow$

$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{F}_{12}] = [\Delta\vec{r} \cdot \vec{F}_{12}] = 0,$
т. к. $\Delta\vec{r} \uparrow\uparrow \vec{F}_{12}, \angle\Delta\vec{r}, \vec{F}_{12} = 0.$

Результирующий момент внутренних сил в соответствии с третьим законом Ньютона равен нулю.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dL_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i\ \text{внутр}} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i\ \text{внеш}}. \quad (1)$$

В уравнении (1) операции дифференцирования и суммирования можно поменять местами:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}.$$

- Если внешние силы на систему не действуют, то

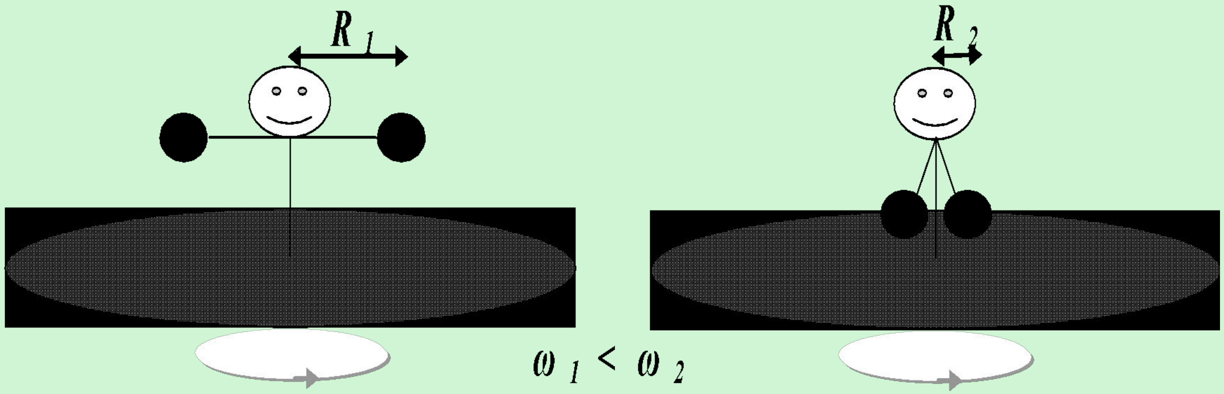
$$\vec{\mathrm{M}}_{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const.$$

Момент импульса замкнутой системы величина постоянная, т.е. с течением времени не меняется – **закон сохранения момента импульса**.

Закон сохранения момента импульса является прямым следствием законов Ньютона и изотропности пространства – эквивалентности свойств пространства в различных направлениях.

Во многих задачах, связанных с вращающимися системами, угловая скорость вращения ω и момент импульса можно вычислить с помощью закона сохранения момента импульса.

Пример: скамья Жуковского, человек на вращающейся скамье держит в руках пару гантелей.



Вращается с угловой скоростью ω_1.
Затем сжимает руки и прижимает гантели к себе:

$$\omega_1 < \omega_2.$$

Пусть масса двух гантелей m и R_1 таковы, что в первоначальный момент времени момент импульса человека $L_{ч1}$ равен моменту импульса гантелей $L_{г1}$: $L_{ч1} = L_{г1}$ (1).

$$L_{\text{г}1} = R_1 m v_1 = R_1 m(\omega_1 R_1) = m\omega_1 R_1^2. \, (2)$$

Начальный момент импульса системы:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = L_{\text{ч}1} + m\omega_1 R_1^2. \, (3) \\ \text{Т.к. } L_{ч1} = L_{г1} \end{array}\right\} \quad L_{\text{ч}1} = m\omega_1 R_1^2. \, (4)$$

Во втором случае: $L_2 = L_{\text{ч}2} + m\omega_2 R_2^2. \, (5)$

По закону сохранения момента импульса (уравнение (3) равно (5)):

$$L_{\text{ч}2} + m\omega_2 R_2^2 = L_{\text{ч}1} + m\omega_1 R_1^2. \, (6)$$

$$L_{ч1} = m_ч \omega_1 r^2, (7)$$

$$L_{ч2} = m_ч \omega_2 r^2. (8)$$

Уравнение (7) делим на (8):

$$\frac{L_{ч1}}{L_{ч2}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow L_{ч2} = L_{ч1} \frac{\omega_2}{\omega_1}. (9)$$

Уравнение (9) подставляем в (6):

$$L_{ч1} \frac{\omega_2}{\omega_1} + m\omega_2 R_2^2 = L_{ч1} + m\omega_1 R_1^2. (10)$$

Уравнение (4) подставляем в (10):

$$m\omega_1 R_1^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right) = m(\omega_1 R_1^2 - \omega_2 R_2^2),$$

$$m\omega_1 R_1^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}-1\right)=m(\omega_1 R_1^2-\omega_2 R_2^2),$$

$$\omega_2 R_1^2-\omega_1 R_1^2=\omega_1 R_1^2-\omega_2 R_2^2,$$

$$\omega_2(R_1^2+R_2^2)=2\omega_1 R_1^2,\ \omega_2=2\omega_1\frac{R_1^2}{(R_1^2+R_2^2)};$$

$$R_2<R_1\Rightarrow\omega_2\approx 2\omega_1.$$

Аналогичная ситуация возникает, когда фигурист прижимает руки к себе и начинает вращаться быстрее.

Гироскоп

Гироскоп – быстро вращающееся симметричное твердое тело, ось вращения которого может изменять свое направление в пространстве.

Происходит от греческого $\underbrace{\text{гиро}}_{\text{кружусь}}$ $\underbrace{\text{скоп}}_{\text{наблюдаю}}$

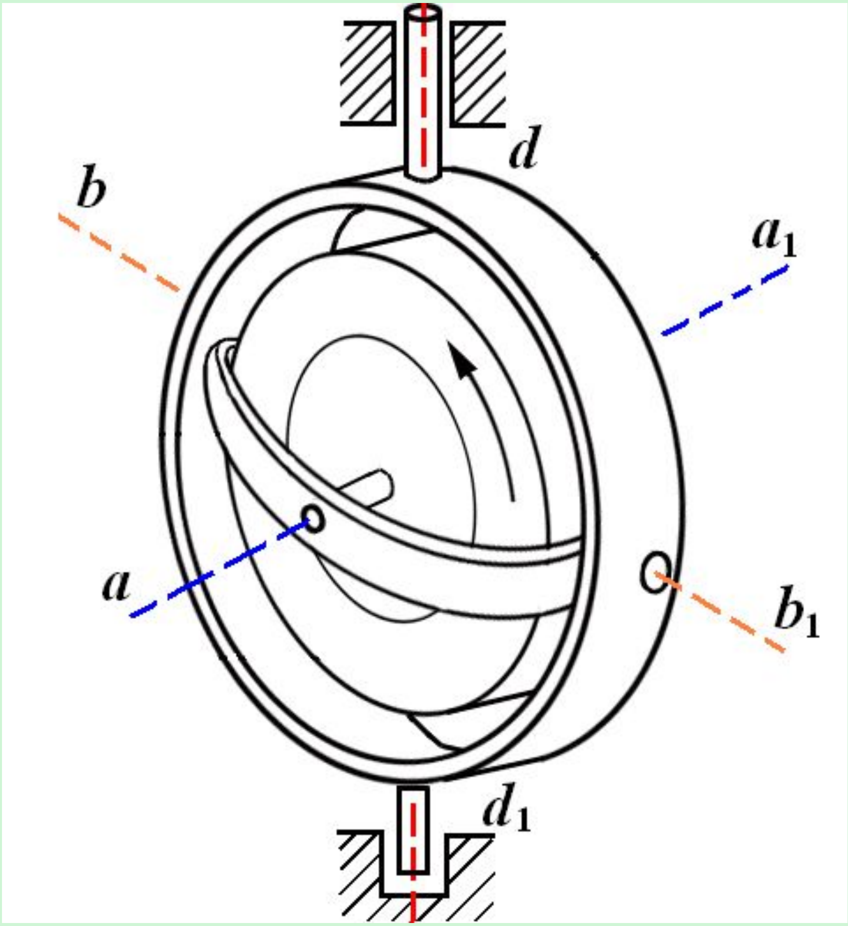
Свойства гироскопа проявляются у вращающихся небесных тел, снаряда (пули), роторов турбин, установленных на судах, волчка, юлы.

На свойствах гироскопа основаны различные приборы и устройства, применяемые в технике.

Свойства гироскопа проявляются при выполнении двух условий:

1. ось вращения гироскопа должна иметь возможность изменять своё положение в пространстве;
2. частота вращения гироскопа вокруг своей оси должна быть много больше скорости изменения направления оси в пространстве.

Для того чтобы ось гироскопа могла свободно поворачиваться в пространстве, его обычно закрепляют на кольцах, так называемая *карданова подвеса*.



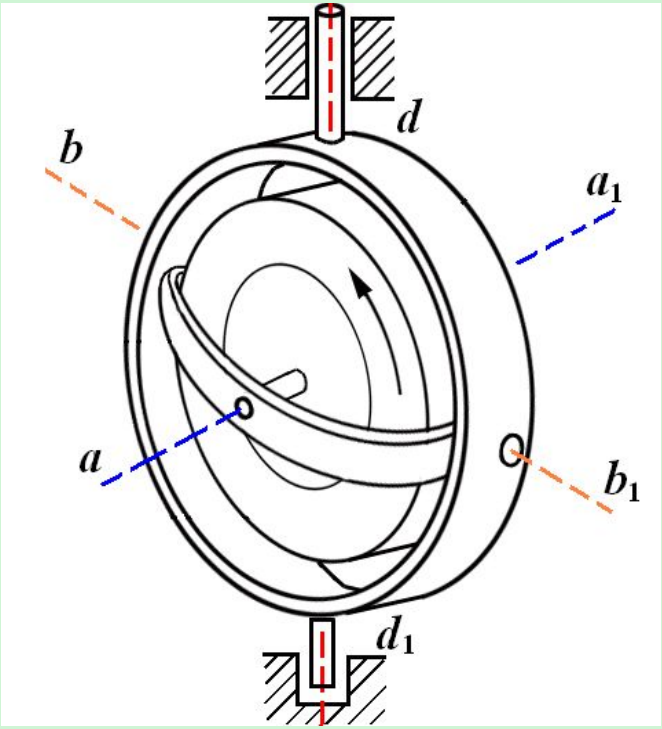
Дискообразное тело – *гироскоп* закреплено на оси aa_1 – *ось гироскопа*, которая может вращаться вокруг перпендикулярной ей горизонтальной оси bb_1, которая, в свою очередь, может поворачиваться вокруг вертикальной оси dd_1.

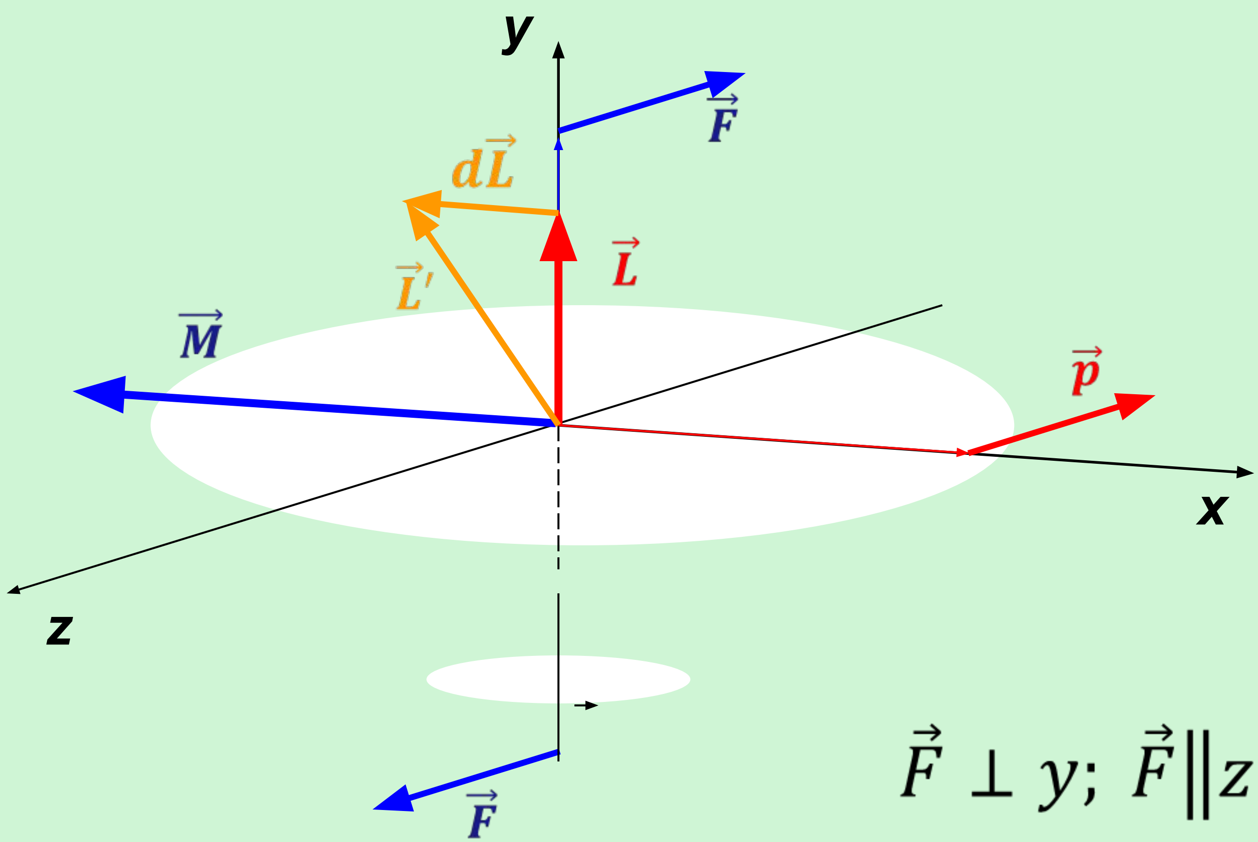
Все три оси пересекаются в одной точке, называемой *центром подвеса*. Такой гироскоп имеет 3 степени свободы и может совершать любой поворот около центра подвеса.

Силами трения в подшипниках и моментами импульса колец пренебрегаем.

Пока гироскоп неподвижен, его можно ориентировать в пространстве любым образом.

Если гироскоп начинает вращаться с большой угловой скоростью ω, то при отсутствии внешних сил ($\boldsymbol{F}_{внеш}$ =0) $\boldsymbol{M}$ = 0 и т.е. ось гироскопа сохраняет свое положение в пространстве.

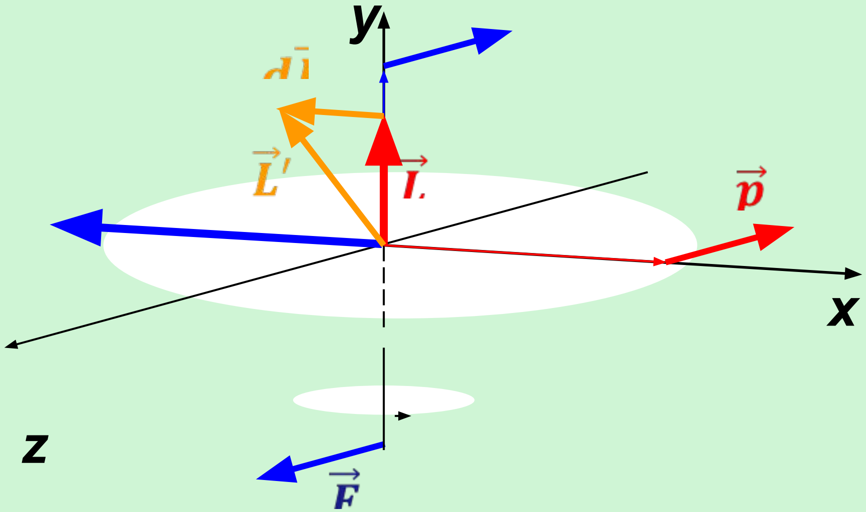




Если к оси гироскопа у приложить пару сил ***F***, то возникает вращающий момент ***M***.

$$\vec{F} \perp y;\ \vec{F} \| z \Rightarrow \vec{M} \| x \Rightarrow$$

Ось гироскопа поворачивается вокруг оси *z*, а не вокруг *x*, как это могло показаться. Это *гироскопический эффект.*



$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt};\, d\vec{L} = \vec{M}dt \Rightarrow d\vec{L} \| \vec{M}.$$

- За время *dt* гироскоп получит приращение ***dL*** и станет $\vec{L}'$

Вектор $\vec{L}'$ совпадает с направлением оси вращения гироскопа.

Если время воздействия мало $dt \to 0$, то даже если момент сил ***M*** велик, ***dL*** $\to 0$, т.е. кратковременное действие сил не приводит к изменению ориентации оси гироскопа, она будет сохранять определённое направление в пространстве.

Гироскоп

Применение:

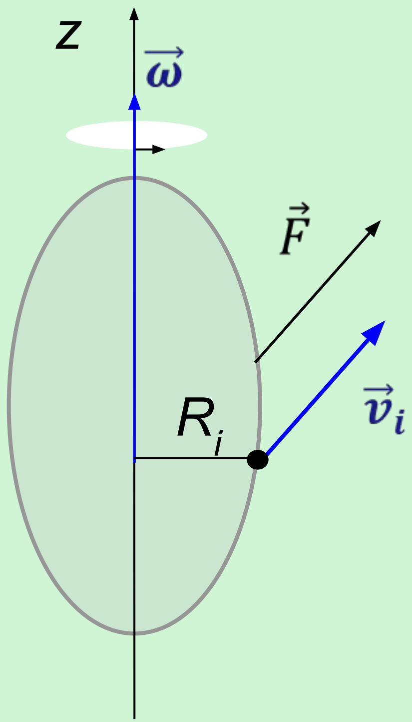
- навигационные устройства (гирокомпас, гирогоризонт),
- поддержание заданного направления движения (автопилот).

При конструировании судов и самолетов необходимо учитывать гироскопические силы, возникающие в подшипниках массивных валов двигателей, роторов турбин, гребных валов и т.п.

Динамика вращательного движения абсолютно твёрдого тела относительно неподвижной оси.

Основное уравнение динамики вращательного движения

При вращении абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси z каждая отдельная точка движется по окружности постоянного радиуса R_i с некоторой скоростью $\vec{v}_i$.



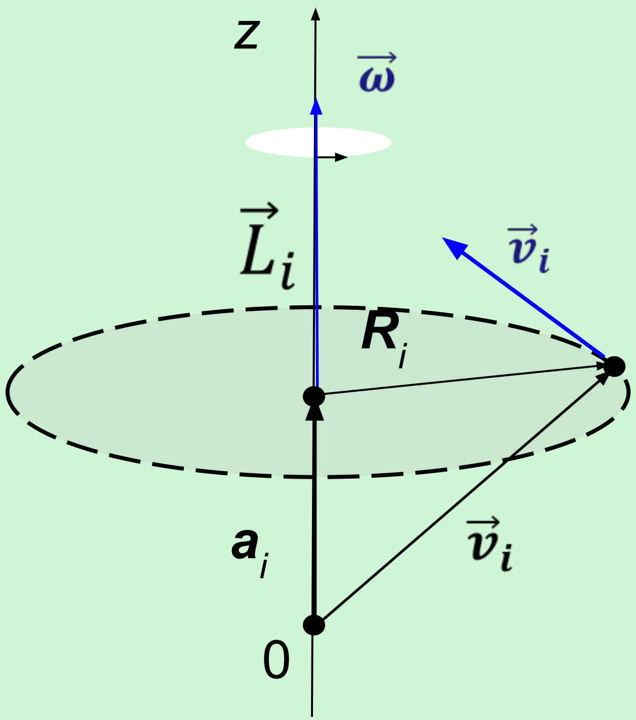
Моменты силы:

$$\vec{M} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k},$$

$$M_x \text{ и } M_y = 0 \Rightarrow$$

Закон сохранения момента импульса:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$



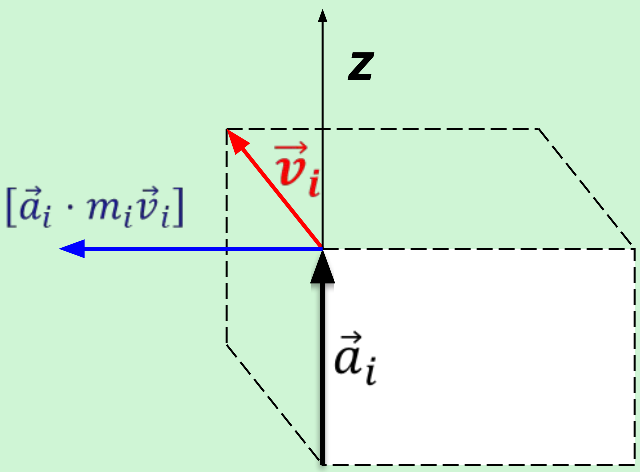
Момент импульса относительно точки 0 для i точки твёрдого тела:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \cdot m_i \vec{v}_i] = \left[\left(\vec{a}_i + \vec{R}_i\right) \cdot m_i \vec{v}_i\right].$$

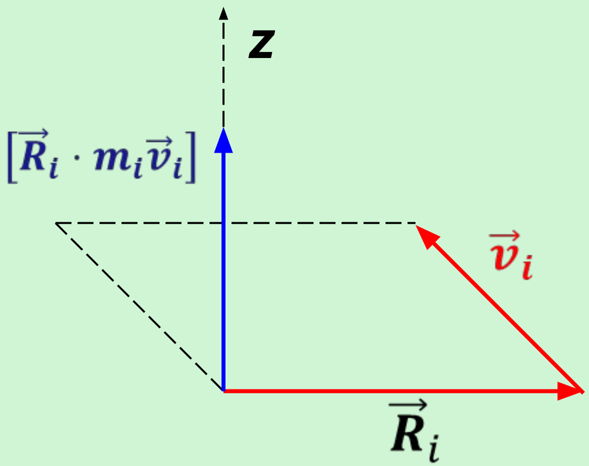
Проекция на ось z относительно точки 0:

$$\left|\vec{L}_i\right|_z = \left|\left[\left(\vec{a}_i + \vec{R}_i\right) \cdot m_i \vec{v}_i\right]\right|_z =$$

$$= |[\vec{a}_i \cdot m_i \vec{v}_i]|_z + \left|\left[\vec{R}_i \cdot m_i \vec{v}_i\right]\right|_z.$$



$$|[\vec{a}_i \cdot m_i\vec{v}_i]|_z = 0 \text{ т. к. } [\vec{a}_i \cdot m_i\vec{v}_i] \perp z.$$



$$\left|[\vec{R}_i \cdot m_i\vec{v}_i]\right|_z = \left|\vec{L}_i\right|_z.$$

$$L_{iz} = R_i m_i v_i,$$

$$v_i = R_i\omega. \Rightarrow L_{iz} = m_i R_i^2 \omega.$$

Твёрдое тело – система жёстко связанных материальных точек.

- Следовательно, для твёрдого тела:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{iz} = \sum_{i=1}^{n} \omega m_i R_i^2 = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \,.$$

$J_i = m_i R_i^2$ - момент инерции материальной точки относительно оси z.

$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$ - момент инерции твердого тела относительно оси z.

$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{iz}$ - момент импульса (количества движения) твердого тела относительно оси z.

$$\left.\begin{array}{c} L_z = \omega J_z \\ \dfrac{dL_z}{dt} = M_z \end{array}\right\}$$

Закон сохранения момента импульса:

$$\frac{d(\omega J_z)}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \cdot \varepsilon = M_z.$$

Т.к. координатную ось *z* приняли произвольно, индекс можно опустить.

$$\boxed{I\vec{\varepsilon} = \overrightarrow{\mathrm{M}}}$$

– основное уравнение динамики вращательного движения.

В общем случае: $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\vec{M}}{J}$

– ускорение вращения твердого тела относительно неподвижной оси прямо пропорционально моменту всех внешних сил относительно этой оси и обратно пропорционально моменту инерции твердого тела относительно этой оси.

- Физический смысл:

  Момент инерции относительно оси – мера инерции твердого тела при вращательном движении относительно оси.

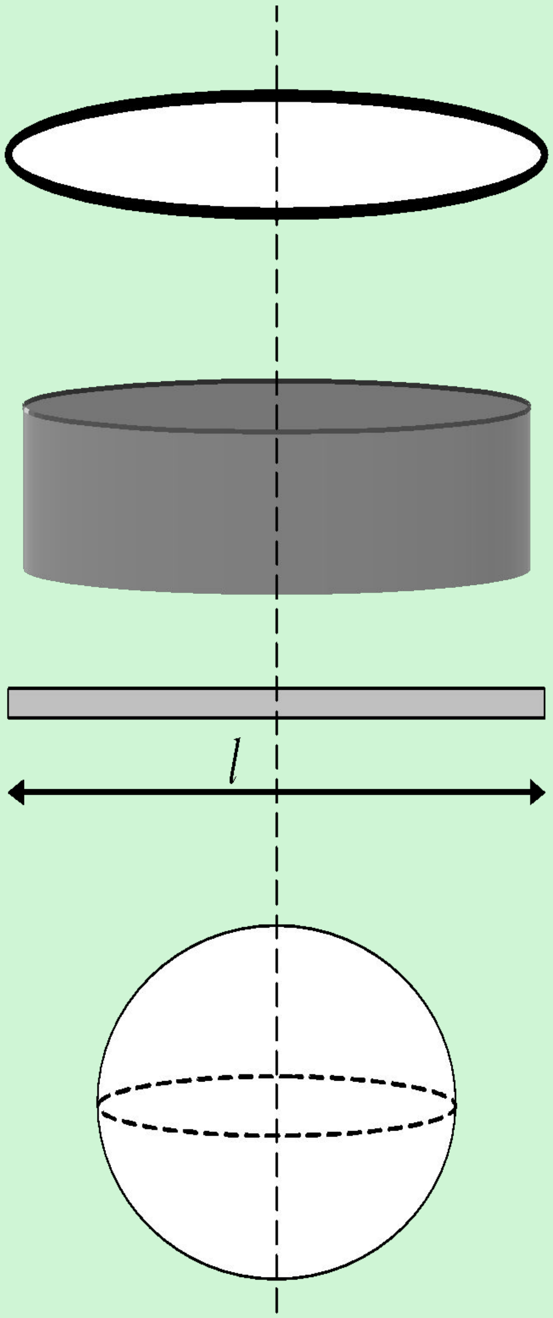
Момент инерции. Теорема Гюйгенса-Штейнера

- Момент инерции системы тел – физическая величина равная сумме произведений m_i на r_i^2:

$$J = \sum m_i \cdot r_i^2$$

В случае непрерывного распределения масс сумма сводится к интегралу:

$$J = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV .$$



Кольцо $J = mR^2.$

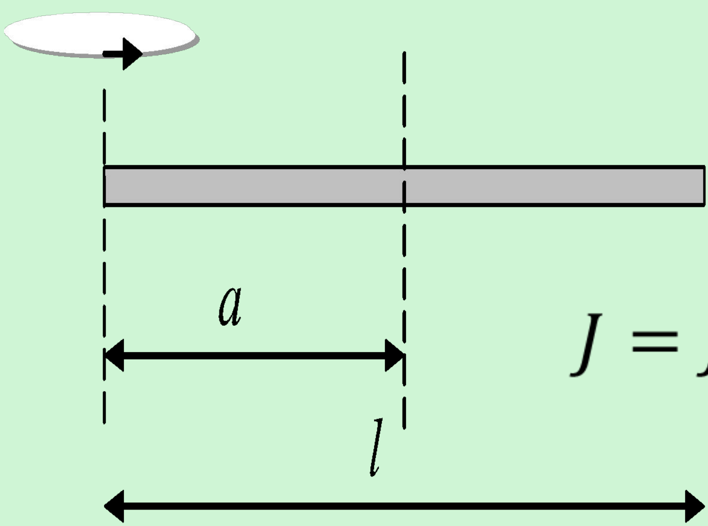
Диск, цилиндр $J = \frac{mR^2}{2}.$

Стержень $J = \frac{ml^2}{12}.$

Шар $J = \frac{2}{5} mR^2.$

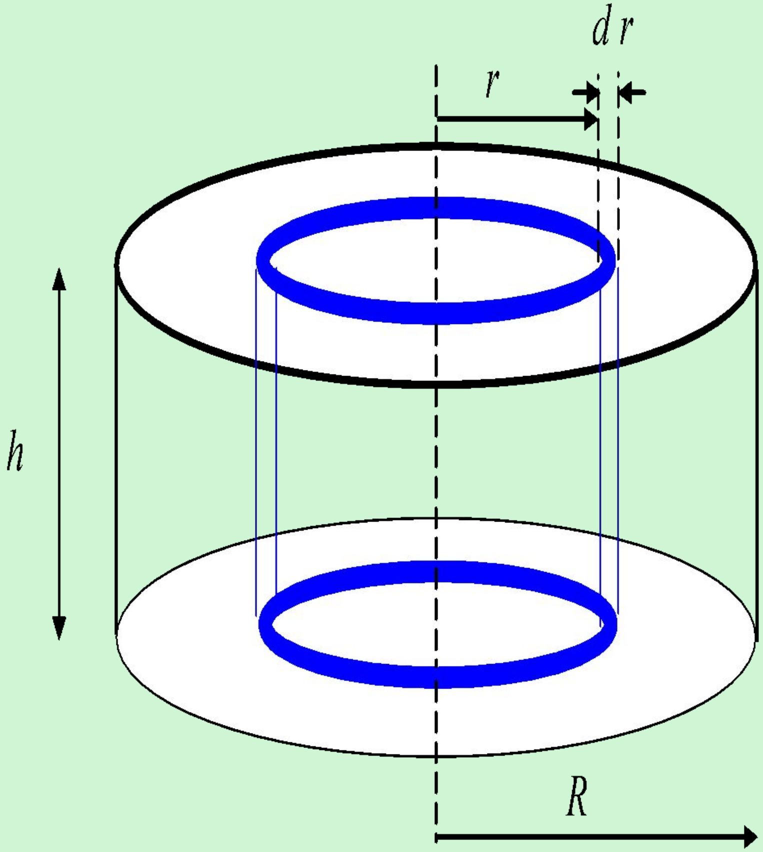
Теорема Гюйгенса-Штейнера: момент инерции относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс J_0, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между ними a^2.

$$J = J_0 + ma^2.$$



$$J = J_0 + ma^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2.$$

Пример: расчет момента инерции сплошного цилиндра радиуса *R*, высотой *h*.



Разобьем на полые цилиндры *r*, *r* + *dr*, *dr*→0.

$$dr << r \Rightarrow dJ = r^2 dm,$$

dm – масса всего полого цилиндра.

$$dV = 2\pi rhdr \Rightarrow$$
$$dm = 2\pi rh\rho dr \Rightarrow$$

$$dJ = 2\pi h\rho r^3 dr \Rightarrow$$

$$J = \int dJ = 2\pi h\rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi hR^4\rho, (V = \pi R^2 h) \Rightarrow \quad J = \frac{mR^2}{2}$$

Закон сохранения момента импульса АТТ относительно неподвижной оси

- В общем виде $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$.

  В замкнутой системе $\overrightarrow{\mathrm{M}} = 0$.

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad L = const.$$

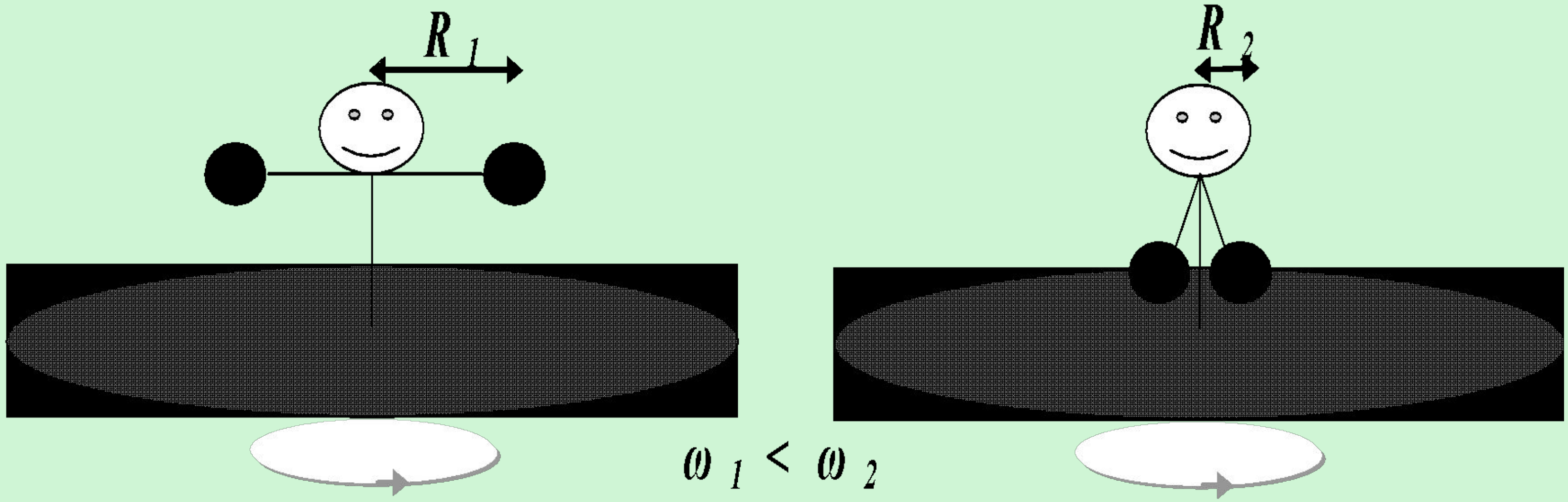
Фундаментальный закон, связан с симметрией пространства, его изотропностью, т.е. физические законы не зависят от выбора направления осей системы координат.

Скамья Жуковского

$$L = J\omega = const.$$

$$(J_0 + 2mR_1^2)\omega_1 = J_0\omega_2 = const \Rightarrow \omega_1 < \omega_2.$$

$$R_2 \to 0.$$



Кинетическая энергия при вращательном движении АТТ

Т.к. имеется АТТ, следовательно, для всех m_i $\omega = \text{const}$.

$$\text{E}_\text{к} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} \omega^2 R_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2}_{J} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Работа и мощность при вращательном движении относительно неподвижной оси

Основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J}; \ \vec{M} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt}. (1)$$

Закон сохранения момента импульса:

$$L = J\omega = const.$$

Кинетическая энергия при вращательном движении:

$$\text{E}_{\text{к}} = \frac{J\omega^2}{2}. (2)$$

Работа при вращательном движении идёт на увеличение его кинетической энергии:

$$dA = dE_к. (3)$$

- $$dA = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = J\omega d\omega. (4)$$

Из (1) следует $J d\omega = M dt.$ (5)

Уравнение (5) подставляем в (4):

$$dA = \omega M dt = M d\varphi. (6) \Rightarrow A = M \cdot \varphi. (7)$$

Мощность:

$$N = \frac{dA}{dt} = M\frac{d\varphi}{dt} = M \cdot \omega. \quad (8)$$

Плоское движение твердого тела

Плоское движение – движение, при котором все участки траектории любых двух точек твёрдого тела лежат в параллельных плоскостях.

Кинетическая энергия складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения.

$$\text{Е}_{\text{к}} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2},$$

v_c – скорость центра масс,

J_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

$\vec{r}$ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{\varphi}$ $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
$\vec{p} = m\vec{v}$ $\sum \vec{p} =$**const**	$\vec{L} = J\vec{\omega}$ $\sum \vec{L} =$**const**
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$	$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J}$
$E_к = \frac{mv^2}{2}$	$E_к = \frac{J\omega^2}{2}$
$A = \int (\vec{F} d\vec{r})$;	$A = M\varphi$;
$N = Fv$	$N = M\omega$