

*Закон сохранения момента импульса
системы материальных точек*

Статика – инженерная наука, изучающая равновесие твердых тел, находящихся под действием сил. Она необходима для определения максимально допустимых нагрузок.

- Чтобы удержать тело в покое (равновесии), необходимо выполнение 2-х условий:

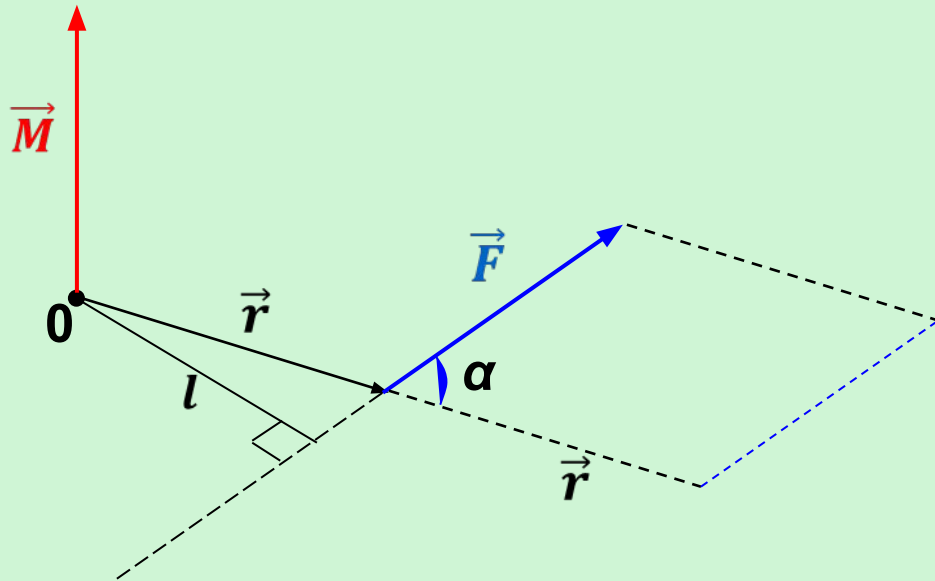
1. Векторная сумма всех сил равна 0

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

2. Векторная сумма всех моментов сил равна 0



Момент силы F относительно неподвижной точки O – физическая величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора r , проведенного из точки O в точку приложения силы, на силу F .



$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}],$$

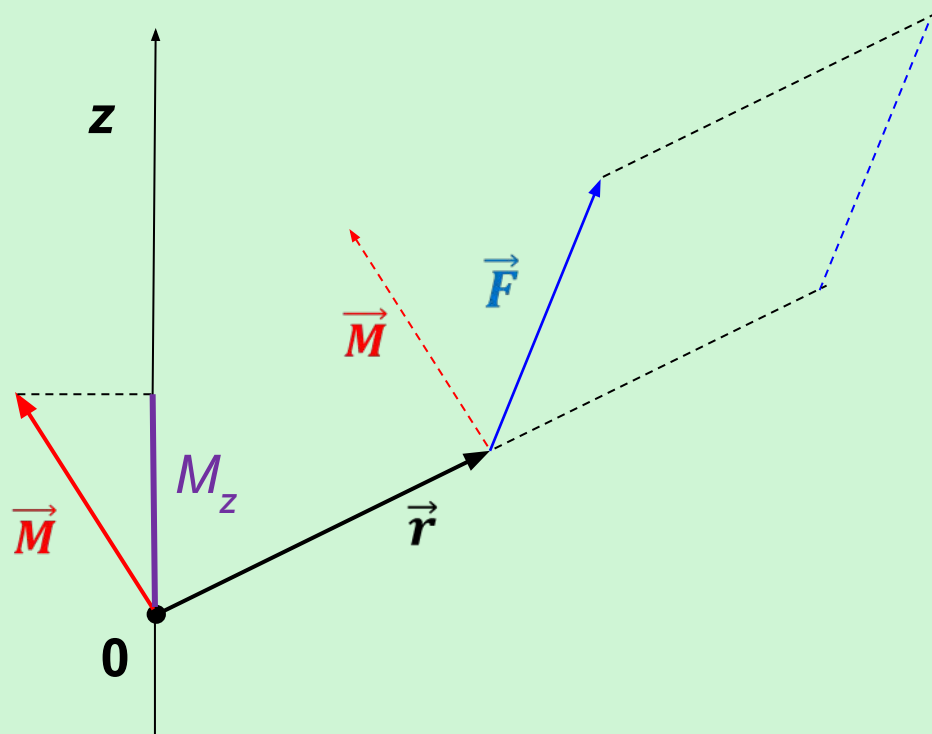
\vec{M} – псевдовектор.

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \cdot \sin \alpha,$$

$|\vec{r}| \cdot \sin \alpha = l$ – плечо силы.

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k},$$

$$M_x = |[\vec{r} \cdot \vec{F}]|_x, M_y = |[\vec{r} \cdot \vec{F}]|_y, M_z = |[\vec{r} \cdot \vec{F}]|_z.$$



Момент силы относительно неподвижной оси — скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора \vec{M} относительно произвольной точки данной оси.

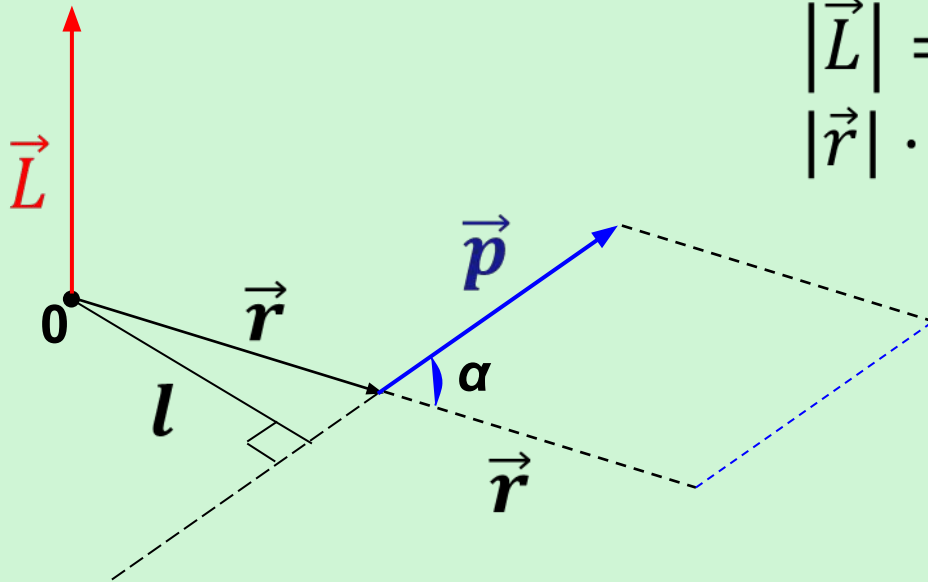
Значение M_z не зависит от выбора положения точки 0 на оси z .

Момент импульса (количества движения) материальной точки относительно неподвижной точки O – физическая величина, определяемая векторным произведением

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}] = [\vec{r} \cdot m\vec{v}].$$

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{p}| \cdot \sin \alpha,$$

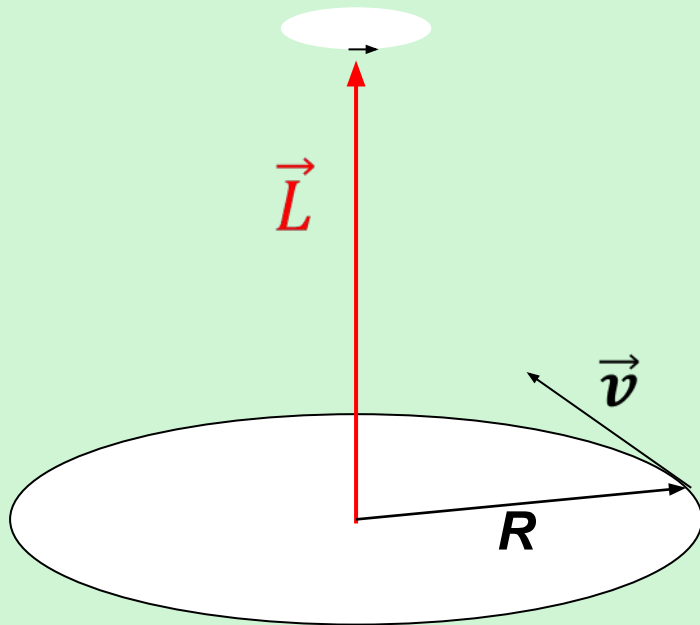
$|\vec{r}| \cdot \sin \alpha = l$ – плечо импульса.



$$\vec{L} = L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k},$$

$$L_x = |[\vec{r} \cdot \vec{p}]|_x, L_y = |[\vec{r} \cdot \vec{p}]|_y, L_z = |[\vec{r} \cdot \vec{p}]|_z.$$

Момент импульса относительно неподвижной оси – скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора \vec{L} относительно произвольной точки данной оси.



$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}].$$

Для движения по окружности:

$$\vec{L} = [\vec{R} \cdot m\vec{v}].$$

$$L = Rm v \sin \angle \underbrace{\vec{v}, \vec{R}}_{\vec{v} \perp \vec{R}} = Rm \underbrace{v}_{\omega R} = \omega m R^2.$$

Уравнение моментов

Математическая справка: $\frac{d}{dt}(x \cdot y) = \frac{dx}{dt}y + x\frac{dy}{dt}$.

$$\frac{d}{dt} \underbrace{[\vec{r} \cdot \vec{p}]_{\vec{L}}} = \left[\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \cdot \vec{p} \right] + \left[r \cdot \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{F}} \right] \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{[\vec{v} \cdot \vec{p}]_{0, \vec{v} \uparrow \uparrow \vec{p}}}_{\sin \angle \vec{v}, \vec{p} = 0} + \underbrace{[\vec{r} \cdot \vec{F}]_{\vec{M}}} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad \vec{L} \uparrow \downarrow \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Производная по времени от момента импульса относительно *точки* равна моменту силы относительно этой *точки*.

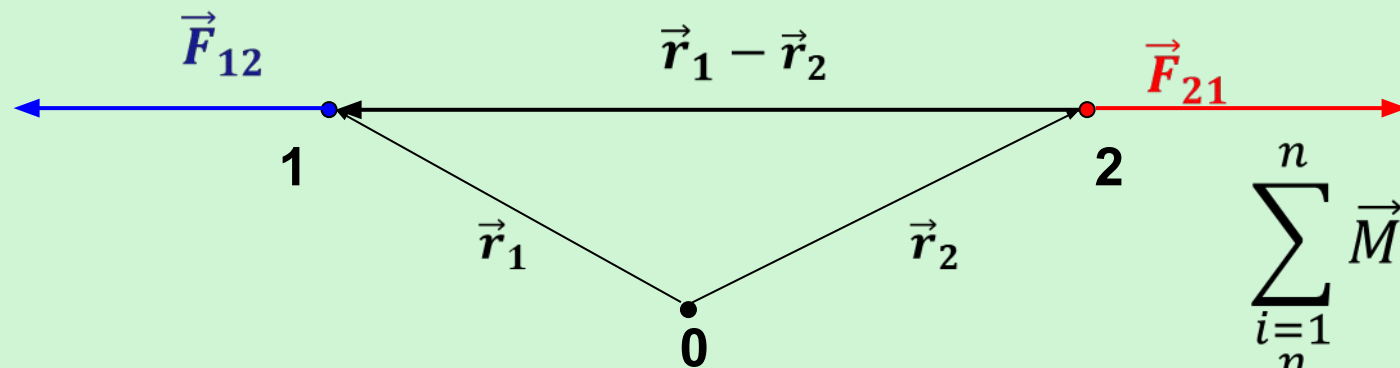
Производная по времени от момента импульса относительно *оси* равна моменту силы относительно этой *оси*.

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x, \frac{dL_y}{dt} = M_y, \frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Закон сохранения момента импульса системы материальных точек

При произвольном движении системы n материальных точек:

$$\left. \begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^n \vec{L}_i, \\ \frac{d\vec{L}_i}{dt} &= \vec{M}_{i \text{ внутр}} + \vec{M}_{i \text{ внеш}} \end{aligned} \right\} \sum_{i=1}^n \frac{dL_i}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{M}_{i \text{ внутр}} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_{i \text{ внеш}}}_{\text{резльтирующий момент}} \quad (1)$$



Действие внутренних сил сводится к парным взаимодействиям

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{i \text{ внутр}} = \vec{M}_{\text{внутр}},$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{i \text{ внеш}} = \vec{M}_{\text{внеш}}.$$

$$\vec{M}_1 = [\vec{r}_1 \cdot \vec{F}_{12}], \vec{M}_2 = [\vec{r}_2 \cdot \vec{F}_{21}],$$

3-й закон Ньютона: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

$$\vec{M}_2 = [-\vec{r}_2 \cdot \vec{F}_{12}] \Rightarrow$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{F}_{12}] = [\Delta\vec{r} \cdot \vec{F}_{12}] = 0,$$

т.к. $\Delta\vec{r} \uparrow\uparrow \vec{F}_{12}, \angle\Delta\vec{r}, \vec{F}_{12} = 0$.

Результирующий момент внутренних сил в соответствии с третьим законом Ньютона равен нулю.

$$\sum_{i=1}^n \frac{dL_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{i \text{ внутр}} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_{i \text{ внеш}} \cdot (1)$$

В уравнении (1) операции дифференцирования и суммирования можно поменять местами:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}.$$

- Если внешние силы на систему не действуют, то

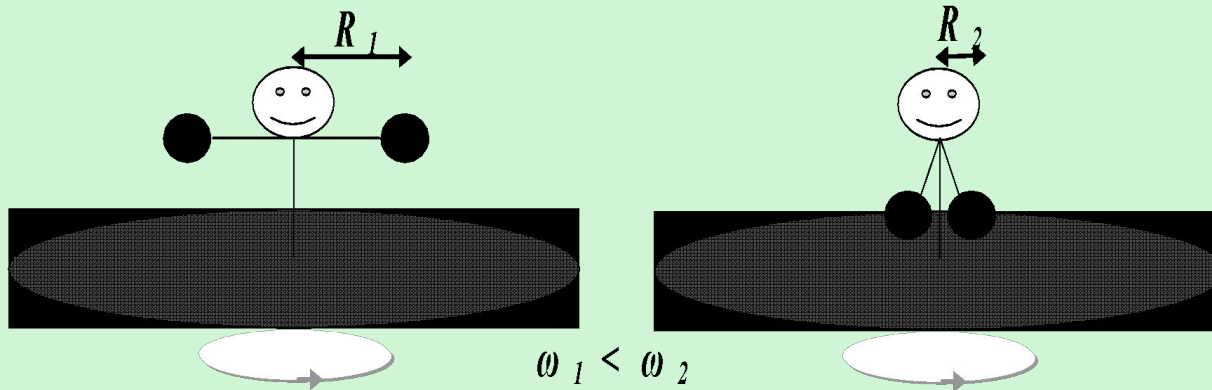
$$\vec{M}_{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}.$$

Момент импульса замкнутой системы величина постоянная, т.е. с течением времени не меняется — **закон сохранения момента импульса.**

Закон сохранения момента импульса является прямым следствием законов Ньютона и **изотропности пространства** – эквивалентности свойств пространства в различных направлениях.

Во многих задачах, связанных с вращающимися системами, угловая скорость вращения ω и момент импульса можно вычислить с помощью закона сохранения момента импульса.

Пример: скамья Жуковского, человек на вращающейся скамье держит в руках пару гантелей.



Вращается с угловой скоростью ω_1 .
Затем сжимает руки и прижимает гантели к себе:
 $\omega_1 < \omega_2$.

Пусть масса двух гантелей m и R_1 таковы, что в первоначальный момент времени момент импульса человека $L_{ч1}$ равен моменту импульса гантелей $L_{г1}$: $L_{ч1} = L_{г1}$ (1).

$$L_{r1} = R_1 m v_1 = R_1 m (\omega_1 R_1) = m \omega_1 R_1^2. (2)$$

Начальный момент импульса системы:

$$\left. \begin{aligned} L_1 = L_{q1} + m \omega_1 R_1^2. (3) \\ \text{Т.к. } L_{q1} = L_{z1} \end{aligned} \right\} L_{q1} = m \omega_1 R_1^2. (4)$$

Во втором случае: $L_2 = L_{q2} + m \omega_2 R_2^2. (5)$

По закону сохранения момента импульса (уравнение (3) равно (5)):

$$L_{q2} + m \omega_2 R_2^2 = L_{q1} + m \omega_1 R_1^2. (6)$$

$$L_{\text{ч1}} = m_{\text{ч}} \omega_1 r^2, (7)$$

$$L_{\text{ч2}} = m_{\text{ч}} \omega_2 r^2. (8)$$

Уравнение (7) делим на (8):

$$\frac{L_{\text{ч1}}}{L_{\text{ч2}}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow L_{\text{ч2}} = L_{\text{ч1}} \frac{\omega_2}{\omega_1}. (9)$$

Уравнение (9) подставляем в (6):

$$L_{\text{ч1}} \frac{\omega_2}{\omega_1} + m \omega_2 R_2^2 = L_{\text{ч1}} + m \omega_1 R_1^2. (10)$$

Уравнение (4) подставляем в (10):

$$m \omega_1 R_1^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right) = m (\omega_1 R_1^2 - \omega_2 R_2^2),$$

$$m\omega_1 R_1^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right) = m(\omega_1 R_1^2 - \omega_2 R_2^2),$$

$$\omega_2 R_1^2 - \omega_1 R_1^2 = \omega_1 R_1^2 - \omega_2 R_2^2,$$

$$\omega_2 (R_1^2 + R_2^2) = 2\omega_1 R_1^2, \quad \omega_2 = 2\omega_1 \frac{R_1^2}{(R_1^2 + R_2^2)};$$

$$R_2 < R_1 \Rightarrow \omega_2 \approx 2\omega_1.$$

Аналогичная ситуация возникает, когда фигурист прижимает руки к себе и начинает вращаться быстрее.

Гироскоп

Гироскоп – быстро вращающееся симметричное твердое тело, ось вращения которого может изменять свое направление в пространстве.

Происходит от греческого

ги́ро ско́п
⏟ ⏟
кружусь наблюдаю

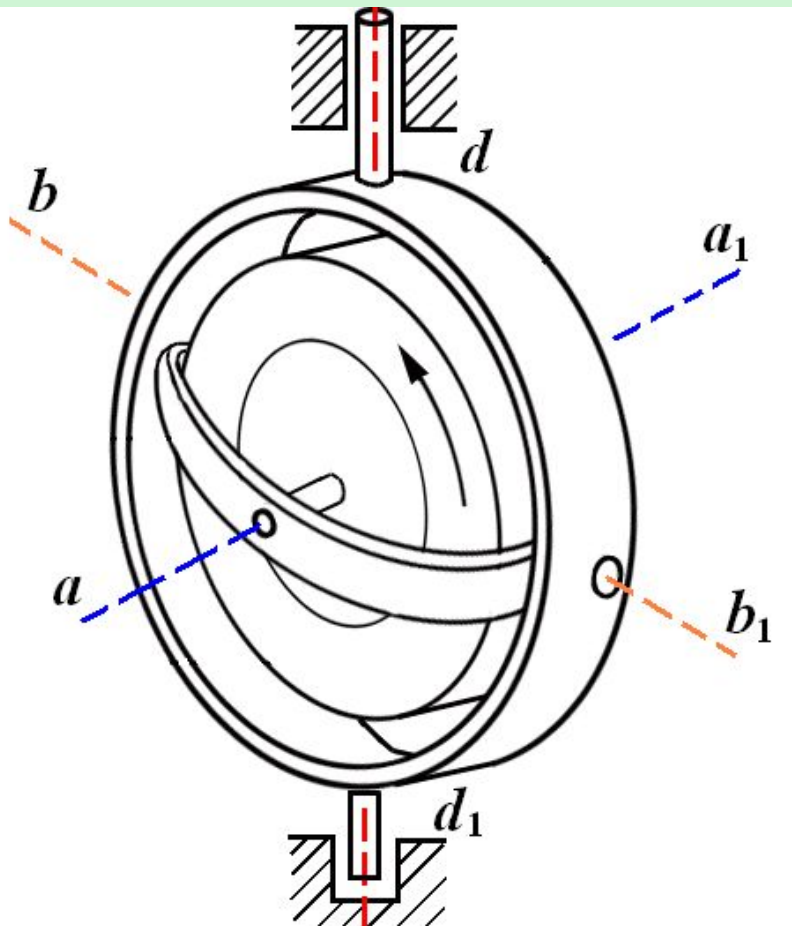
Свойства гироскопа проявляются у вращающихся небесных тел, снаряда (пули), роторов турбин, установленных на судах, волчка, юлы.

На свойствах гироскопа основаны различные приборы и устройства, применяемые в технике.

Свойства гироскопа проявляются при выполнении двух условий:

1. ось вращения гироскопа должна иметь возможность изменять своё положение в пространстве;
2. частота вращения гироскопа вокруг своей оси должна быть много больше скорости изменения направления оси в пространстве.

Для того чтобы ось гироскопа могла свободно поворачиваться в пространстве, его обычно закрепляют на кольцах, так называемая *карданова подвеса*.

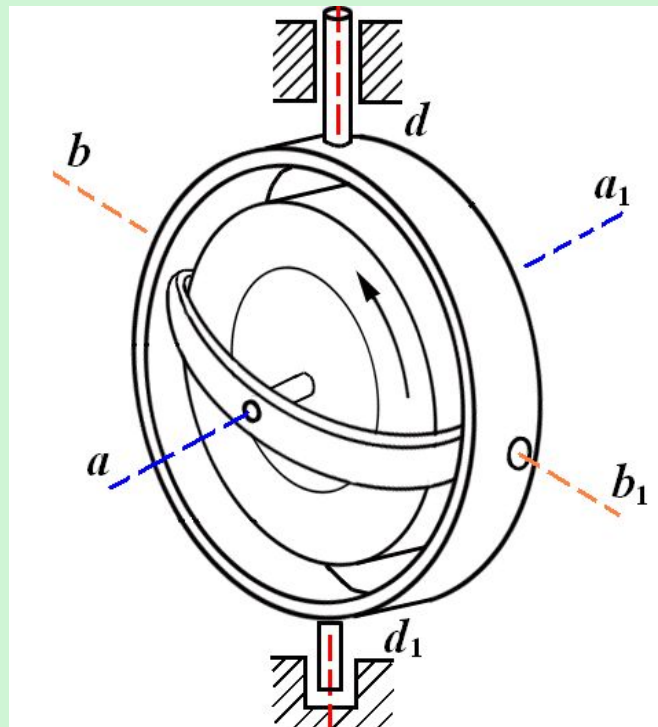


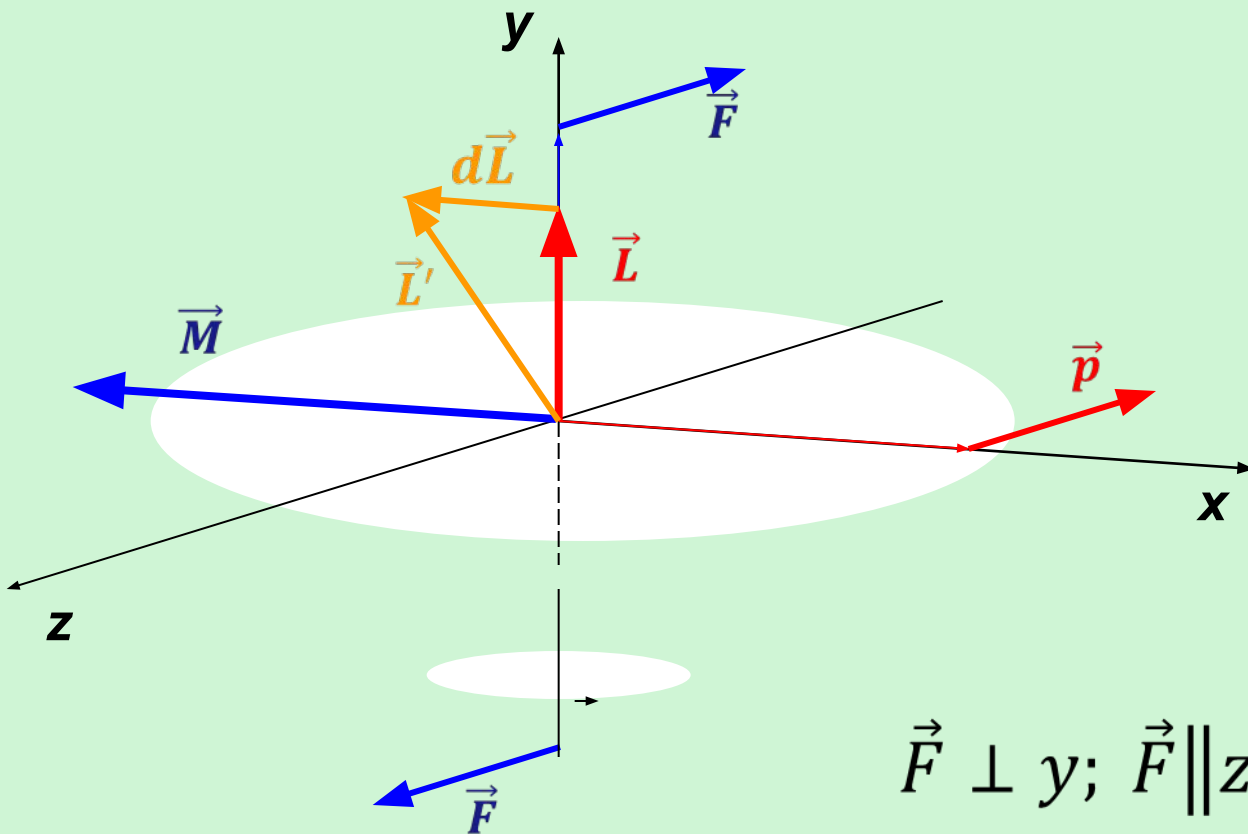
Дискообразное тело – гироскоп закреплено на оси aa_1 – ось гироскопа, которая может вращаться вокруг перпендикулярной ей горизонтальной оси bb_1 , которая, в свою очередь, может поворачиваться вокруг вертикальной оси dd_1 .

Все три оси пересекаются в одной точке, называемой *центром подвеса*. Такой гироскоп имеет 3 степени свободы и может совершать любой поворот около центра подвеса.

Силами трения в подшипниках и моментами импульса колец пренебрегаем.

Пока гироскоп неподвижен, его можно ориентировать в пространстве любым образом. Если гироскоп начинает вращаться с большой угловой скоростью ω , то при отсутствии внешних сил ($F_{внеш} = 0$) $M = 0$ и т.е. ось гироскопа сохраняет свое положение в пространстве.



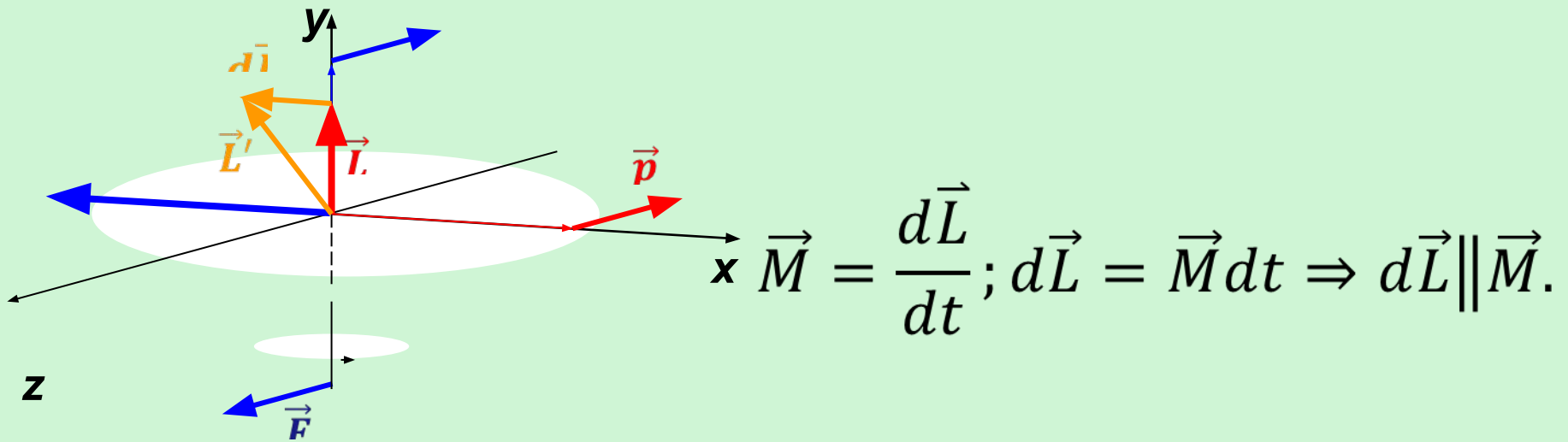


Если к оси гироскопа у приложить пару сил F , то возникает вращающий момент M .

$$\vec{F} \perp y; \vec{F} \parallel z \Rightarrow \vec{M} \parallel x \Rightarrow$$

Ось гироскопа поворачивается вокруг оси z , а не вокруг x , как это могло показаться.

Это *гироскопический эффект*.



- За время dt гироскоп получит приращение $d\vec{L}$ и станет \vec{L}'

Вектор \vec{L}' совпадает с направлением оси вращения гироскопа.

Если время воздействия мало $dt \rightarrow 0$, то даже если момент сил M велик, $d\vec{L} \rightarrow 0$, т.е.

кратковременное действие сил не приводит к изменению ориентации оси гироскопа, она будет сохранять определённое направление в пространстве.

Гироскоп

Применение:

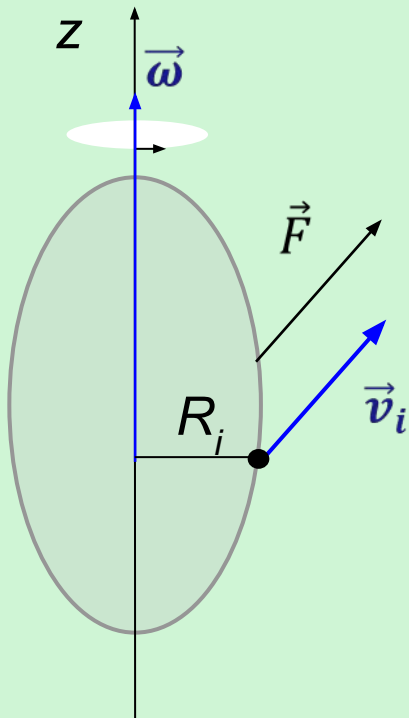
- навигационные устройства (гироскоп, гироскоп),
- поддержание заданного направления движения (автопилот).

При проектировании судов и самолетов необходимо учитывать гироскопические силы, возникающие в подшипниках массивных валов двигателей, роторов турбин, гребных валов и т.п.

**Динамика вращательного движения
абсолютно твёрдого тела
относительно
неподвижной оси.**

**Основное уравнение
динамики вращательного движения**

При вращении абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси z каждая отдельная точка движется по окружности постоянного радиуса R_i с некоторой скоростью \vec{v}_i .



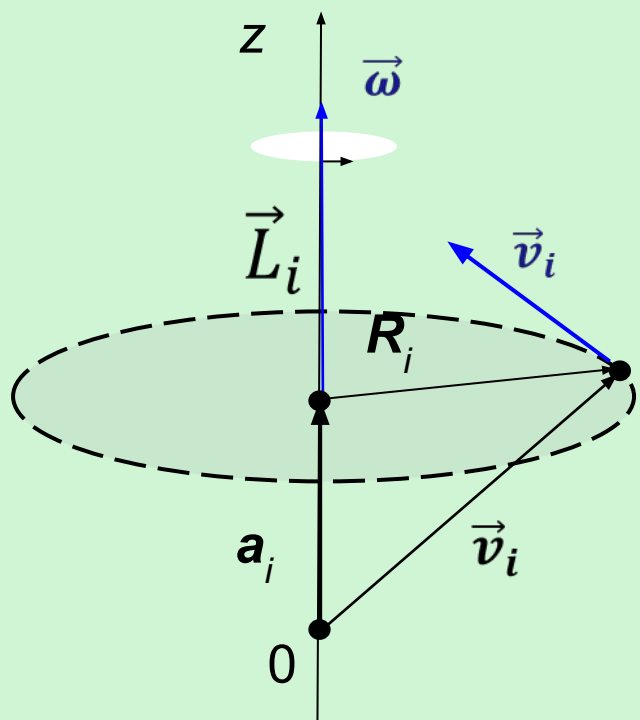
Моменты силы:

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k},$$

$$M_x \text{ и } M_y = 0 \Rightarrow$$

Закон сохранения момента
импульса:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

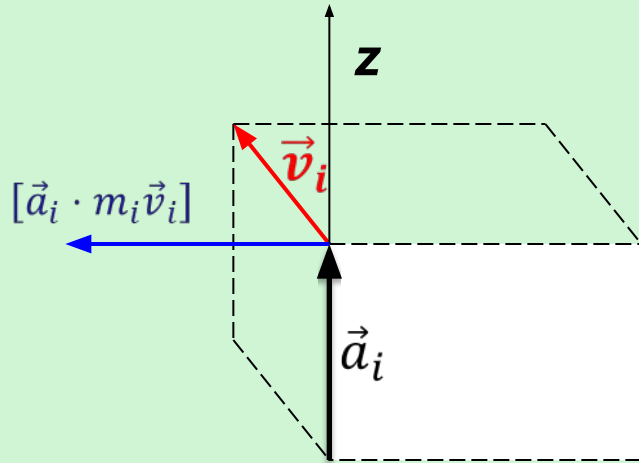


Момент импульса
относительно точки 0 для i
точки твёрдого тела:

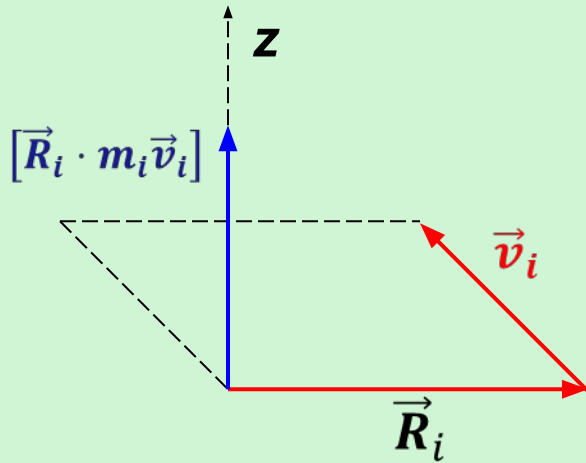
$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \cdot m_i \vec{v}_i] = [(\vec{a}_i + \vec{R}_i) \cdot m_i \vec{v}_i].$$

Проекция на ось z
относительно точки 0:

$$\begin{aligned} |\vec{L}_i|_z &= |[(\vec{a}_i + \vec{R}_i) \cdot m_i \vec{v}_i]|_z = \\ &= |[\vec{a}_i \cdot m_i \vec{v}_i]|_z + |[\vec{R}_i \cdot m_i \vec{v}_i]|_z. \end{aligned}$$



$$|[\vec{a}_i \cdot m_i \vec{v}_i]|_z = 0 \text{ т. к. } [\vec{a}_i \cdot m_i \vec{v}_i] \perp z.$$



$$|[\vec{R}_i \cdot m_i \vec{v}_i]|_z = |\vec{L}_i|_z.$$

$$L_{iz} = R_i m_i v_i,$$

$$v_i = R_i \omega. \Rightarrow L_{iz} = m_i R_i^2 \omega.$$

Твёрдое тело – система жёстко связанных материальных точек.

Следовательно, для твёрдого тела:

$$L_z = \sum_{i=1}^n L_{iz} = \sum_{i=1}^n \omega m_i R_i^2 = \omega \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 .$$

$J_i = m_i R_i^2$ - момент инерции материальной точки относительно оси z.

$J_z = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$ - момент инерции твёрдого тела относительно оси z.

$L_z = \sum_{i=1}^n L_{iz}$ - момент импульса (количества движения) твёрдого тела относительно оси z.

$$\left. \begin{aligned} L_z &= \omega J_z \\ \frac{dL_z}{dt} &= M_z \end{aligned} \right\}$$

Закон сохранения момента импульса:

$$\frac{d(\omega J_z)}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \cdot \varepsilon = M_z.$$

Т.к. координатную ось z приняли произвольно, индекс можно опустить.

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

– основное уравнение динамики вращательного движения.

В общем случае: $\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J}$

- ускорение вращения твердого тела относительно неподвижной оси прямо пропорционально моменту всех внешних сил относительно этой оси и обратно пропорционально моменту инерции твердого тела относительно этой оси.
- Физический смысл:
Момент инерции относительно оси – мера инерции твердого тела при вращательном движении относительно оси.

Момент инерции.

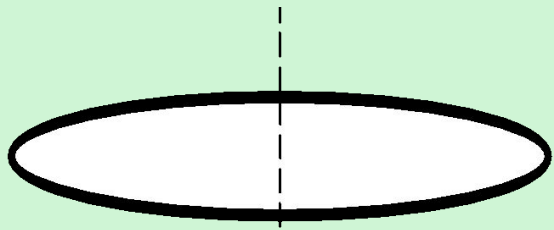
Теорема Гюйгенса-Штейнера

- Момент инерции системы тел – физическая величина равная сумме произведений m_i на r_i^2 :

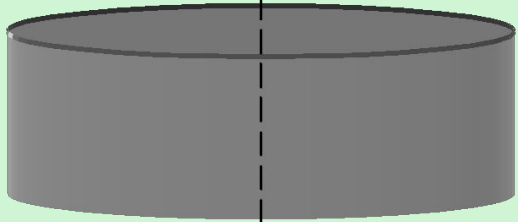
$$J = \sum m_i \cdot r_i^2$$

В случае непрерывного распределения масс сумма сводится к интегралу:

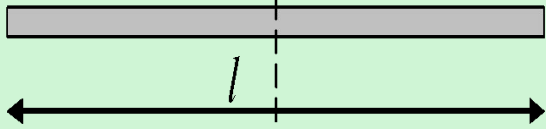
$$J = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV .$$



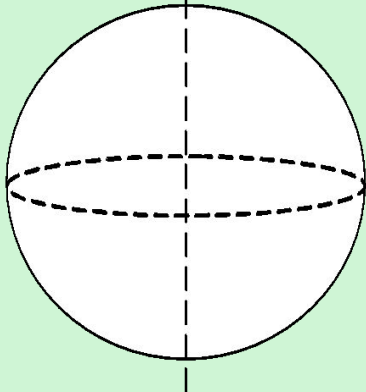
Кольцо $J = mR^2.$



Диск, цилиндр $J = \frac{mR^2}{2}.$



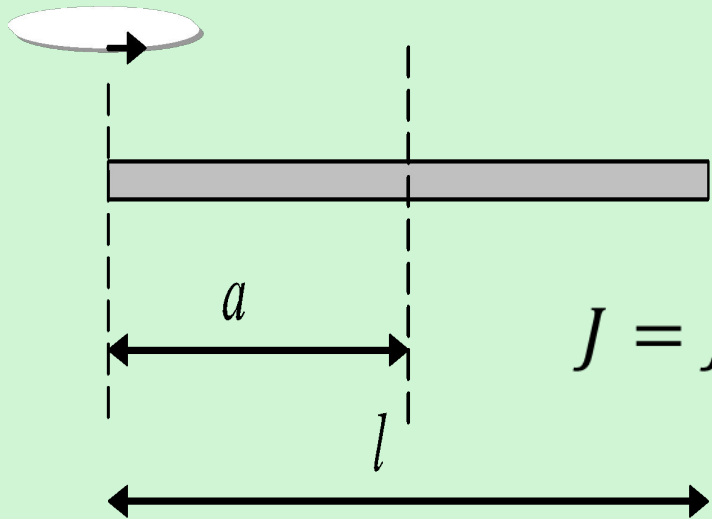
Стержень $J = \frac{ml^2}{12}.$



Шар $J = \frac{2}{5}mR^2.$

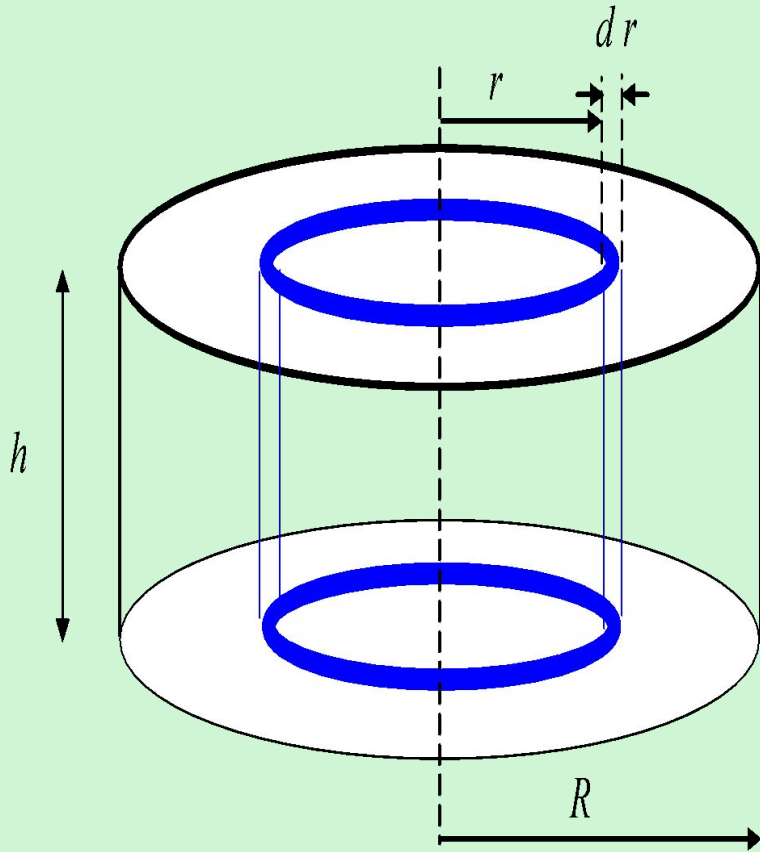
Теорема Гюйгенса-Штейнера: момент инерции относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс J_0 , сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между ними a^2 .

$$J = J_0 + ma^2.$$



$$J = J_0 + ma^2 = \frac{ml^2}{12} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

Пример: расчет момента инерции сплошного цилиндра радиуса R , высотой h .



Разобьем на полые цилиндры $r, r + dr, dr \rightarrow 0$.

$dr \ll r \Rightarrow dJ = r^2 dm$,
 dm – масса всего полого цилиндра.

$$\begin{aligned}dV &= 2\pi r h dr \Rightarrow \\dm &= 2\pi r h \rho dr \Rightarrow \\dJ &= 2\pi h \rho r^3 dr \Rightarrow\end{aligned}$$

$$J = \int dJ = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi h R^4 \rho, (V = \pi R^2 h) \Rightarrow J = \frac{m R^2}{2}$$

Закон сохранения момента импульса АТТ относительно неподвижной оси

- В общем виде $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$.
В замкнутой системе $\vec{M} = 0$. $\left. \vphantom{\frac{d\vec{L}}{dt}} \right\} \begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= 0, \\ L &= \text{const.} \end{aligned}$

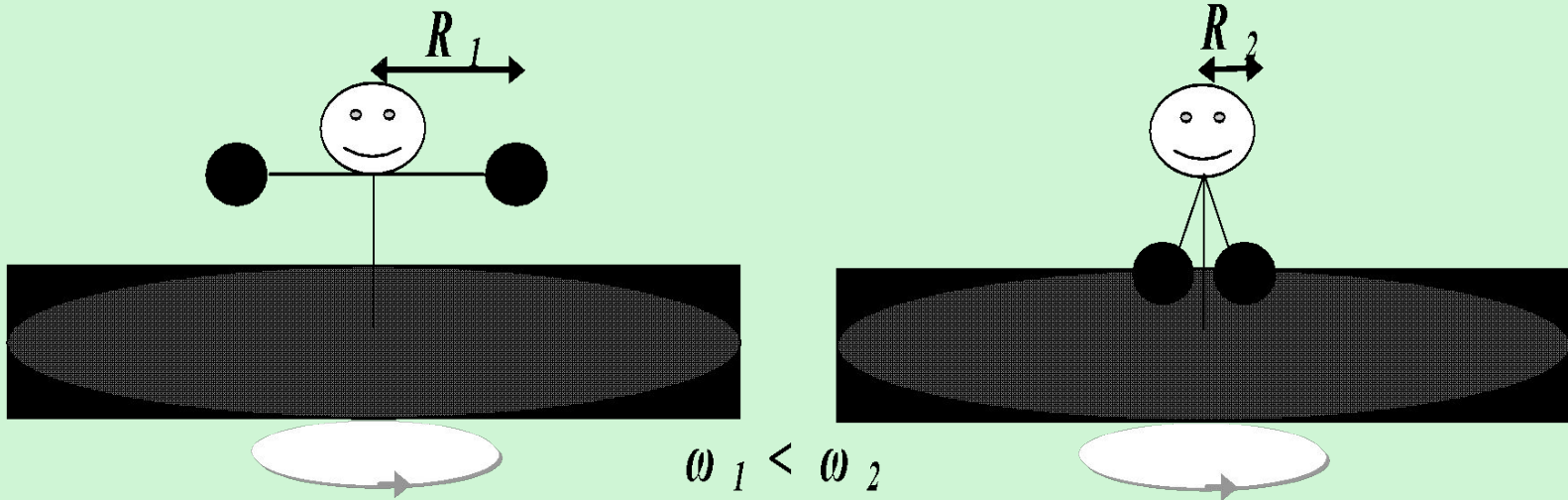
Фундаментальный закон, связан с симметрией пространства, его изотропностью, т.е. физические законы не зависят от выбора направления осей системы координат.

Скамья Жуковского

$$L = J\omega = \text{const.}$$

$$(J_0 + 2mR_1^2)\omega_1 = J_0\omega_2 = \text{const} \Rightarrow \omega_1 < \omega_2.$$

$$R_2 \rightarrow 0.$$



Кинетическая энергия при вращательном движении АТТ

Т.к. имеется АТТ, следовательно, для всех m_i
 $\omega = \text{const.}$

$$E_{\text{к}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \omega^2 R_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i R_i^2}_J = \frac{J \omega^2}{2}.$$

*Работа и мощность
при вращательном движении
относительно неподвижной оси*

Основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J}; \vec{M} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt}. (1)$$

Закон сохранения момента импульса:

$$L = J\omega = \text{const.}$$

Кинетическая энергия при вращательном движении:

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}. (2)$$

Работа при вращательном движении идёт на увеличение его кинетической энергии:

$$dA = dE_{\text{к}}. (3)$$

•

$$dA = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = J\omega d\omega. (4)$$

Из (1) следует $Jd\omega = Mdt. (5)$

Уравнение (5) подставляем в (4):

$$dA = \omega Mdt = Md\varphi. (6) \Rightarrow A = M \cdot \varphi. (7)$$

Мощность:

$$N = \frac{dA}{dt} = M \frac{d\varphi}{dt} = M \cdot \omega. (8)$$

Плоское движение твердого тела

Плоское движение – движение, при котором все участки траектории любых двух точек твёрдого тела лежат в параллельных плоскостях.

Кинетическая энергия складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения.

$$E_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2},$$

v_c – скорость центра масс,

J_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

$$\vec{r}$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \Sigma \vec{p} = \mathbf{const}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$E_K = \frac{mv^2}{2}$$

$$A = \int (\vec{F} d\vec{r});$$

$$N = Fv$$

$$\vec{\varphi}$$
$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \quad \Sigma \vec{L} = \mathbf{const}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J}$$

$$E_K = \frac{J\omega^2}{2}$$

$$A = M\varphi;$$

$$N = M\omega$$