Векторы. Линейные операции над векторами. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Приложения.

Определение. **Вектор** - это направленный отрезок, то есть отрезок, имеющий длину и определенное направление. Графически вектора изображаются в виде направленных отрезков прямой определенной длины. (рис.1)

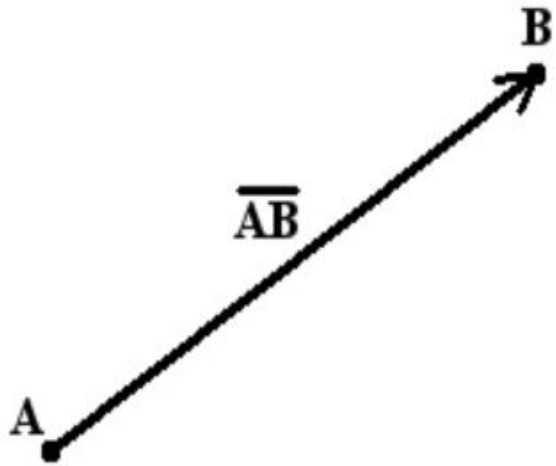


рис. 1

Вектор началом которого есть точка A, а концом - точка B, обозначается $\overline{AB}$ (рис.1). Также вектора обозначают одной маленькой буквой, например a.

Определение. Длина направленного отрезка определяет числовое значение вектора и называется **длиной вектора** или **модулем вектора** $\overline{AB}$.

Для обозначения длины вектора используются две вертикальные линии слева и справа $|\overline{AB}|$.

Определение. **Нулевым вектором** называется вектор, у которого начальная и конечная точка совпадают.

Нулевой вектор обычно обозначается как $\overline{0}$.

Длина нулевого вектора равна нулю.

Определение. Вектора, параллельные одной прямой или лежащие на одной прямой называют **коллинеарными векторами** (рис. 2).

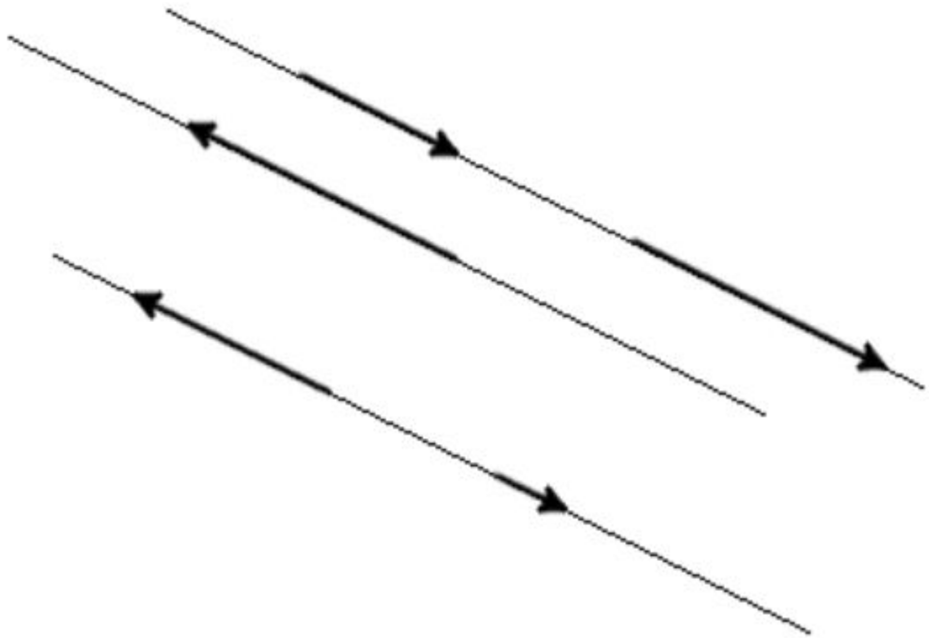


рис. 2

Определение. Два коллинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются **сонаправленными векторами**, если их направления совпадают: $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$ (рис. 3).

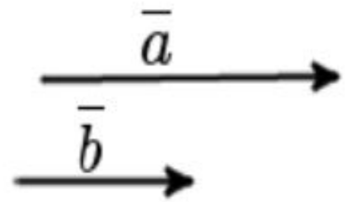


рис. 3

Определение. Два коллинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются **противоположно направленными векторами**, если их направления противоположны: $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$ (рис. 4).

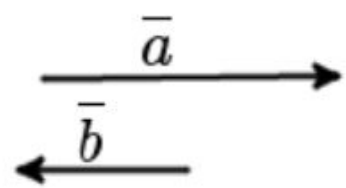


рис. 4

Определение. Вектора, параллельные одной плоскости или лежащие на одной плоскости называют **компланарными векторами**. (рис. 5).

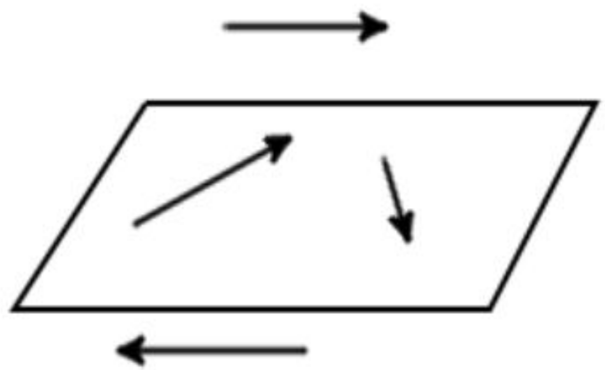


рис. 5

Всегда возможно найти плоскости параллельную двум произвольным векторам, по этому любые два вектора всегда компланарные.

Определение. Вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются равными, если они лежат на одной или параллельных прямых, их направления совпадают, а длины равны (рис. 6).

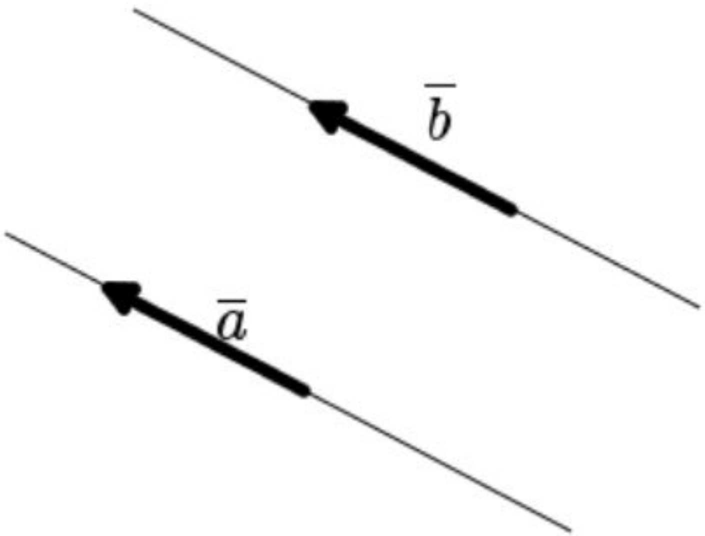


рис. 6

То есть, два вектора равны, если они коллинеарные, сонаправленые и имеют равные длины:

$\overline{a} = \overline{b}$, если $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ и $|\overline{a}| = |\overline{b}|$.

Определение. **Единичным вектором** или **ортом** - называется вектор, длина которого равна единице.

Формула определения координат вектора для плоских задач

В случае плоской задачи вектор $\overline{AB}$ заданный координатами точек $A(A_x ; A_y)$ и $B(B_x ; B_y)$ можно найти воспользовавшись следующей формулой

$$\overline{AB} = \{B_x - A_x ; B_y - A_y\}$$

Формула определения координат вектора для пространственных задач

В случае пространственной задачи вектор $\overline{AB}$ заданный координатами точек $A(A_x ; A_y ; A_z)$ и $B(B_x ; B_y ; B_z)$ можно найти воспользовавшись следующей формулой

$$\overline{AB} = \{B_x - A_x ; B_y - A_y ; B_z - A_z\}$$

Пример 1. Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если A(1; 4), B(3; 1).

Решение: $\overline{AB} = \{3 - 1; 1 - 4\} = \{2; -3\}$.

Пример 2. Найти координаты точки B вектора $\overline{AB} = \{5; 1\}$, если координаты точки A(3; -4).

Решение:

$AB_x = B_x - A_x \;\; \Rightarrow \;\; B_x = AB_x + A_x \;\; \Rightarrow \;\; B_x = 5 + 3 = 8$

$AB_y = B_y - A_y \;\; \Rightarrow \;\; B_y = AB_y + A_y \;\; \Rightarrow \;\; B_y = 1 + (-4) = -3$

Ответ: B(8; -3).

Пример 3. Найти координаты точки A вектора $\overline{AB} = \{5; 1\}$, если координаты точки B(3; -4).

Решение:

$AB_x = B_x - A_x \;\; \Rightarrow \;\; A_x = B_x - AB_x \;\; \Rightarrow \;\; A_x = 3 - 5 = -2$

$AB_y = B_y - A_y \;\; \Rightarrow \;\; A_y = B_y - AB_y \;\; \Rightarrow \;\; A_y = -4 - 1 = -5$

Ответ: A(-2; -5).

В случае пространственной задачи модуль вектора $\overline{a} = \{a_x ; a_y ; a_z\}$ можно найти воспользовавшись следующей формулой:

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

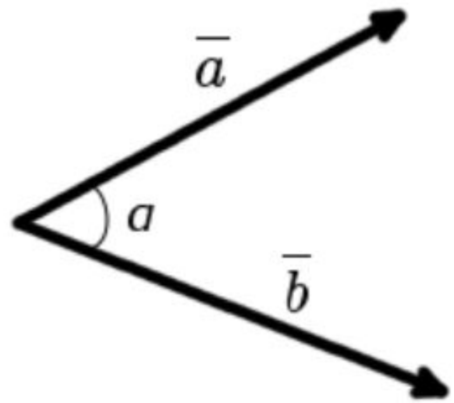
Пример 1. Найти длину вектора $\overline{a} = \{2; 4\}$.

Решение: $|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Пример Найти длину вектора $\overline{a} = \{2; 4; 4\}$.

Решение: $|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$.

Определение. **Углом между двумя векторами**, отложенными от одной точки, называется кратчайший угол, на который нужно повернуть один из векторов вокруг своего начала до положения сонаправленности с другим вектором.



$$\cos\alpha = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$$

Пример 1. Найти угол между векторами $\overline{a} = \{3; 4\}$ и $\overline{b} = \{4; 3\}$.

Решение: Найдем скалярное произведение векторов:

$\overline{a}\cdot\overline{b} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 12 + 12 = 24.$

Найдем модули векторов:

$|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
$|\overline{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

Найдем угол между векторами:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{24}{5 \cdot 5} = \frac{24}{25} = 0.96$$

Геометрическая интерпретация. **Скалярным произведением** двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ будет скалярная величина, равная произведению модулей этих векторов умноженного на косинус угла между ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos \alpha$$

В случае плоской задачи скалярное произведение векторов $\overline{a} = \{a_x ; a_y\}$ и $\overline{b} = \{b_x ; b_y\}$ можно найти воспользовавшись следующей формулой:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Свойства скалярного произведения векторов

1. Скалярное произведение вектора самого на себя всегда больше или равно нуля:
$$\overline{a} \cdot \overline{a} \geq 0$$

2. Скалярное произведение вектора самого на себя равно нулю тогда и только тогда, когда вектор равен нулевому вектору:
$$\overline{a} \cdot \overline{a} = 0 \quad <=> \quad \overline{a} = \overline{0}$$

3. Скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его модуля:
$$\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$$

4. Операция скалярного умножения коммуникативна:
$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$$

5. Если скалярное произведение двух не нулевых векторов равно нулю, то эти вектора ортогональны:
$$\overline{a} \neq 0, \overline{b} \neq 0, \overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \quad <=> \quad \overline{a} \perp \overline{b}$$

6. $(\alpha\overline{a}) \cdot \overline{b} = \alpha(\overline{a} \cdot \overline{b})$

7. Операция скалярного умножения дистрибутивна:
$$(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$$

Пример 1. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a} = \{1; 2\}$ и $\overline{b} = \{4; 8\}$.

Решение: $\overline{a} \cdot \overline{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 4 + 16 = 20.$

Пример 2. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если их длины $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 6$, а угол между векторами равен 60°.

Решение: $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \; cos\,\alpha = 3 \cdot 6 \cdot cos\,60^\circ = 9.$

Определение. **Векторным произведением** вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, длина которого численно равна площади параллелограмма построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный так, чтоб наименьшее вращение от $\overline{a}$ к $\overline{b}$ вокруг вектора $\overline{c}$ осуществлялось против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\overline{c}$ (рис. 1).

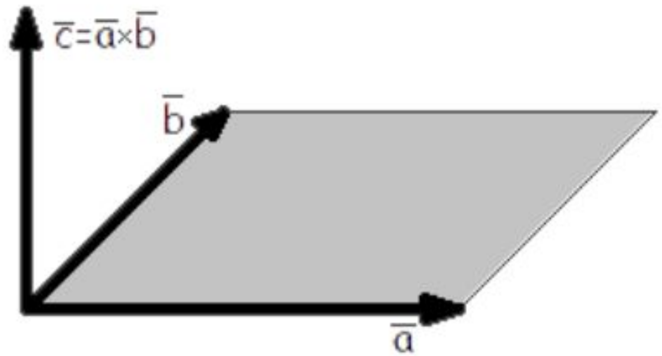


рис. 1

Векторное произведение двух векторов $\overline{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ и $\overline{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$ в декартовой системе координат - это вектор, значение которого можно вычислить, используя следующие формулы:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \boldsymbol{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \boldsymbol{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

Свойства векторного произведения векторов

- ***Геометрический смысл векторного произведения.*** Модуль векторного произведения двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен площади параллелограмма построенного на этих векторах:
$$S_{\text{парал}} = [\overline{a} \times \overline{b}]$$

- ***Геометрический смысл векторного произведения.*** Площадь треугольника построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равна половине модуля векторного произведения этих векторов:
$$S\Delta = \frac{1}{2}|\overline{a} \times \overline{b}|$$

- Векторное произведения двух не нулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда вектора коллинеарны.

- Вектор $\overline{c}$, равный векторному произведению не нулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, перпендикулярен этим векторам.

- $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$

- $(k\,\overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times (k\,\overline{b}) = k\,(\overline{a} \times \overline{b})$

- $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$

Пример 1. Найти векторное произведение векторов $\overline{a} = \{1; 2; 3\}$ и $\overline{b} = \{2; 1; -2\}$.

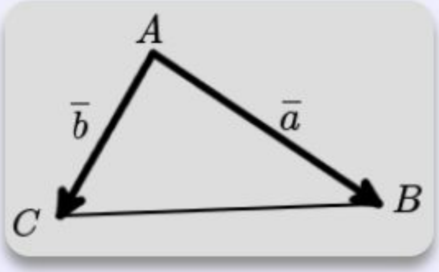
Решение:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}(2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1) - \boldsymbol{j}(1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3) + \boldsymbol{k}(1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) =$$

$$= \boldsymbol{i}(-4 - 3) - \boldsymbol{j}(-2 - 6) + \boldsymbol{k}(1 - 4) = -7\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} = \{-7; 8; -3\}$$

Пример 2. Найти площадь треугольника образованного векторами $\overline{a} = \{-1; 2; -2\}$ и $\overline{b} = \{2; 1; -1\}$.



Решение: Найдем векторное произведение этих векторов:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}(2 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1) - \boldsymbol{j}((-1) \cdot (-1) - (-2) \cdot 2) + \boldsymbol{k}((-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2) =$$

$$= \boldsymbol{i}(-2 + 2) - \boldsymbol{j}(1 + 4) + \boldsymbol{k}(-1 - 4) = -5\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k} = \{0; -5; -5\}$$

Из свойств векторного произведения:

$$S\Delta = \frac{1}{2}|\overline{a} \times \overline{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 5^2 + 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{25 + 25} = \frac{1}{2}\sqrt{50} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2.5\sqrt{2}$$

Ответ: $S\Delta = 2.5\sqrt{2}$.

Смешанное произведение векторов $\overline{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$ и $\overline{c} = \{c_x;\ c_y;\ c_z\}$ в декартовой системе координат можно вычислить, используя следующую формулу:

$$\overline{a} \cdot [\overline{b} \times \overline{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Свойства смешанного произведения векторов

- ***Геометрический смысл смешанного произведения.*** Модуль смешанного произведения трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ равен объёму параллелепипеда, образованного этими векторами:
$$V_{\text{парал}} = |\overline{a} \cdot [\overline{b} \times \overline{c}]|$$

- ***Геометрический смысл смешанного произведения.*** Объем пирамиды образованной тремя векторами $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ равен одной шестой части от модуля смешанного произведения этих векторов:
$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|\overline{a} \cdot [\overline{b} \times \overline{c}]|$$

- Если смешанного произведения трех не нулевых векторов равно нулю, то эти вектора компланарные.

- $\overline{a} \cdot [\overline{b} \times \overline{c}] = \overline{b} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{c}) - \overline{c} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b})$

- $\overline{a} \cdot [\overline{b} \times \overline{c}] = \overline{b} \cdot [\overline{c} \times \overline{a}] = \overline{c} \cdot [\overline{a} \times \overline{b}] = -\overline{a} \cdot [\overline{c} \times \overline{b}] = -\overline{b} \cdot [\overline{a} \times \overline{c}] = -\overline{c} \cdot [\overline{b} \times \overline{a}]$

- $\overline{a} \cdot [\overline{b} \times \overline{c}] + \overline{b} \cdot [\overline{c} \times \overline{a}] + \overline{c} \cdot [\overline{a} \times \overline{b}] = 0$ - **тождество Якоби**.

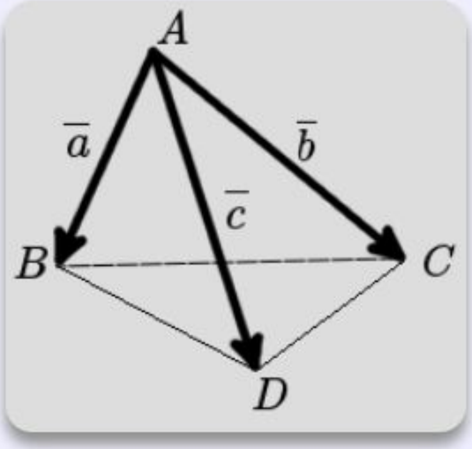
Пример 1. Найти смешанное произведение векторов $\overline{a} = \{1; 2; 3\}$, $\overline{b} = \{1; 1; 1\}$, $\overline{c} = \{1; 2; 1\}$.

Решение:

$$\overline{a} \cdot [\overline{b} \times \overline{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = 1 + 2 + 6 - 3 - 2 - 2 = 2$$

Пример 2. Найти объем пирамиды построенной на векторах $\overline{a} = \{1; 2; 3\}$, $\overline{b} = \{1; -1; 1\}$, $\overline{c} = \{2; 0; -1\}$.



Решение: Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$\overline{a} \cdot [\overline{b} \times \overline{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 0 =$$

$$= 1 + 4 + 0 + 6 + 2 - 0 = 13$$

Найдем объем пирамиды воспользовавшись свойствами:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\overline{a} \cdot [\overline{b} \times \overline{c}]| = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$$