

Векторы. Линейные операции над векторами. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Приложения.

Определение. Вектор - это направленный отрезок, то есть отрезок, имеющий длину и определенное направление. Графически вектора изображаются в виде направленных отрезков прямой определенной длины. (рис.1)

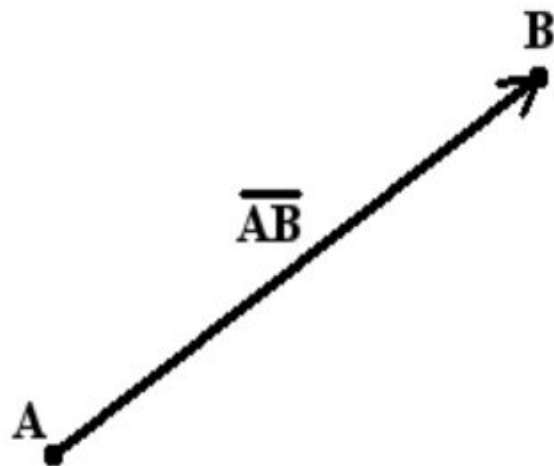


рис. 1

Вектор началом которого есть точка A, а концом - точка B, обозначается \overline{AB} (рис.1). Также вектора обозначают одной маленькой буквой, например a .

Определение. Длина направленного отрезка определяет числовое значение вектора и называется длиной вектора или модулем вектора \overline{AB} .

Для обозначения длины вектора используются две вертикальные линии слева и справа $|\overline{AB}|$.

Определение. Нулевым вектором называется вектор, у которого начальная и конечная точка совпадают.

Нулевой вектор обычно обозначается как $\vec{0}$.

Длина нулевого вектора равна нулю.



Определение. Вектора, параллельные одной прямой или лежащие на одной прямой называют **коллинеарными векторами** (рис. 2).

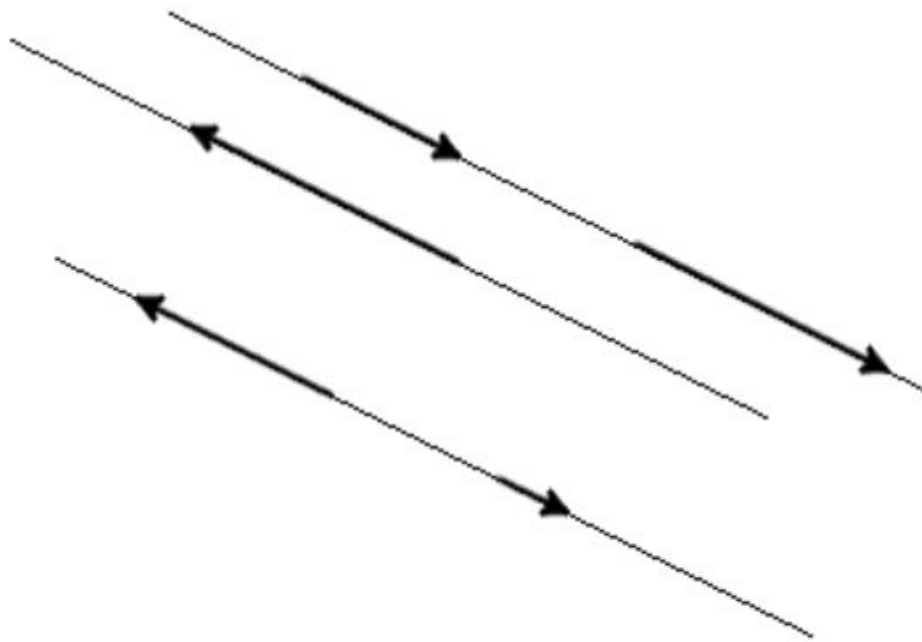
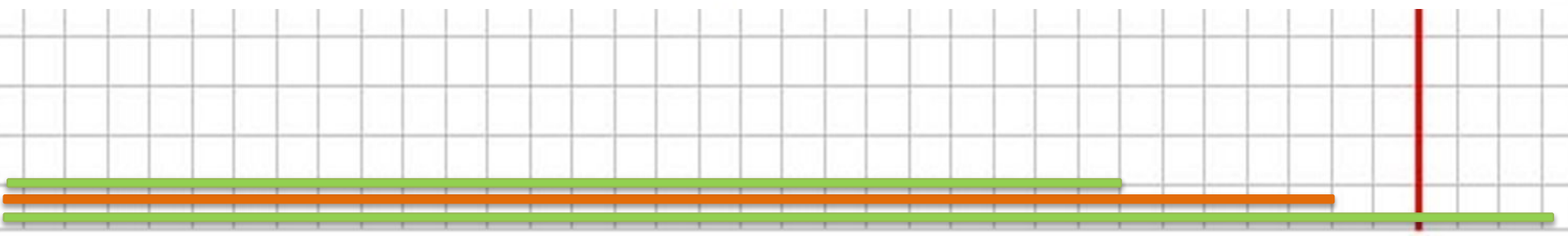


рис. 2



Определение. Два коллинеарных вектора \vec{a} и \vec{b} называются **сонаправленными векторами**, если их направления совпадают: $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ (рис. 3).

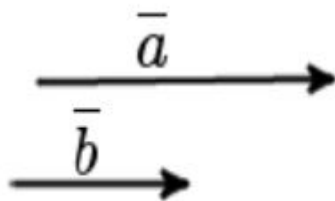


рис. 3

Определение. Два коллинеарных вектора \vec{a} и \vec{b} называются **противоположно направленными векторами**, если их направления противоположны: $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$ (рис. 4).

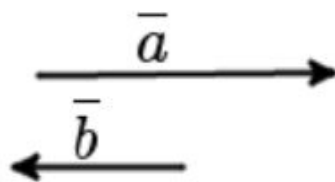


рис. 4

Определение. Вектора, параллельные одной плоскости или лежащие на одной плоскости называют **компланарными векторами**. (рис. 5).

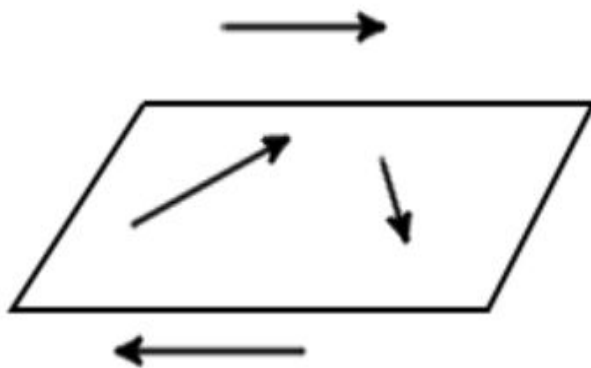


рис. 5

Всегда возможно найти плоскости параллельную двум произвольным векторам, по этому любые два вектора всегда компланарные.

Определение. Вектора \vec{a} и \vec{b} называются равными, если они лежат на одной или параллельных прямых, их направления совпадают, а длины равны (рис. 6).

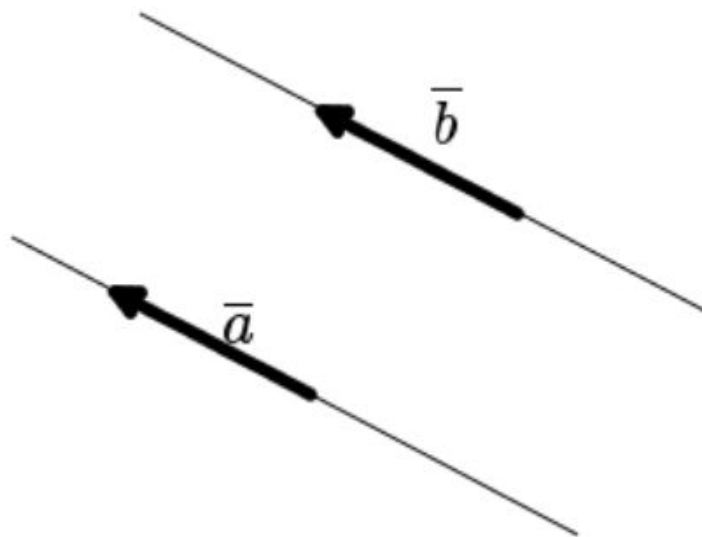


рис. 6

То есть, два вектора равны, если они коллинеарные, сонаправленные и имеют равные длины:

$$\vec{a} = \vec{b}, \text{ если } \vec{a} \uparrow \vec{b} \text{ и } |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

Определение. Единичным вектором или ортом - называется вектор, длина которого равна единице.

Формула определения координат вектора для плоских задач

В случае плоской задачи вектор \overline{AB} заданный координатами точек $A(A_x; A_y)$ и $B(B_x; B_y)$ можно найти воспользовавшись следующей формулой

$$\overline{AB} = \{B_x - A_x; B_y - A_y\}$$

Формула определения координат вектора для пространственных задач

В случае пространственной задачи вектор \overline{AB} заданный координатами точек $A(A_x; A_y; A_z)$ и $B(B_x; B_y; B_z)$ можно найти воспользовавшись следующей формулой

$$\overline{AB} = \{B_x - A_x; B_y - A_y; B_z - A_z\}$$

Пример 1. Найти координаты вектора \overline{AB} , если $A(1; 4)$, $B(3; 1)$.

Решение: $\overline{AB} = \{3 - 1; 1 - 4\} = \{2; -3\}$.

Пример 2. Найти координаты точки B вектора $\overline{AB} = \{5; 1\}$, если координаты точки $A(3; -4)$.

Решение:

$$AB_x = B_x - A_x \Rightarrow B_x = AB_x + A_x \Rightarrow B_x = 5 + 3 = 8$$

$$AB_y = B_y - A_y \Rightarrow B_y = AB_y + A_y \Rightarrow B_y = 1 + (-4) = -3$$

Ответ: $B(8; -3)$.

Пример 3. Найти координаты точки A вектора $\overline{AB} = \{5; 1\}$, если координаты точки $B(3; -4)$.

Решение:

$$AB_x = B_x - A_x \Rightarrow A_x = B_x - AB_x \Rightarrow A_x = 3 - 5 = -2$$

$$AB_y = B_y - A_y \Rightarrow A_y = B_y - AB_y \Rightarrow A_y = -4 - 1 = -5$$

Ответ: $A(-2; -5)$.

В случае пространственной задачи модуль вектора $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ можно найти воспользовавшись следующей формулой:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

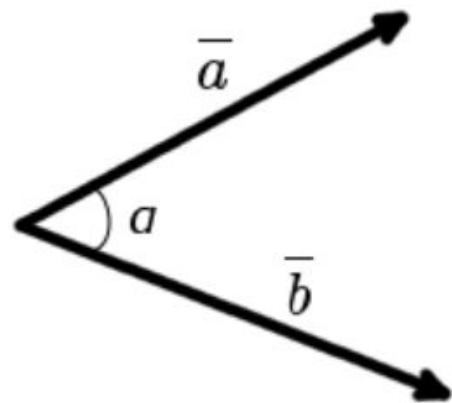
Пример 1. Найти длину вектора $\vec{a} = \{2; 4\}$.

Решение: $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Пример Найти длину вектора $\vec{a} = \{2; 4; 4\}$.

Решение: $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$.

Определение. Углом между двумя векторами, отложенными от одной точки, называется кратчайший угол, на который нужно повернуть один из векторов вокруг своего начала до положения сонаправленности с другим вектором.



$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Пример 1. Найти угол между векторами $\vec{a} = \{3; 4\}$ и $\vec{b} = \{4; 3\}$.

Решение: Найдем скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 12 + 12 = 24.$$

Найдем модули векторов:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Найдем угол между векторами:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{24}{5 \cdot 5} = \frac{24}{25} = 0.96$$

Геометрическая интерпретация. Скалярным произведением двух векторов \vec{a} и \vec{b} будет скалярная величина, равная произведению модулей этих векторов умноженного на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

В случае плоской задачи скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y\}$ можно найти воспользовавшись следующей формулой:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Свойства скалярного произведения векторов

1. Скалярное произведение вектора самого на себя всегда больше или равно нулю:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$$

2. Скалярное произведение вектора самого на себя равно нулю тогда и только тогда, когда вектор равен нулевому вектору:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$$

3. Скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его модуля:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

4. Операция скалярного умножения коммутативна:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

5. Если скалярное произведение двух не нулевых векторов равно нулю, то эти вектора ортогональны:

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

6. $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$

7. Операция скалярного умножения дистрибутивна:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Пример 1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{1; 2\}$ и $\vec{b} = \{4; 8\}$.

Решение: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 4 + 16 = 20$.

Пример 2. Найти скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} , если их длины $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$, а угол между векторами равен 60° .

Решение: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha = 3 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 9$.

Определение. Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор \vec{c} , длина которого численно равна площади параллелограмма построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный так, чтоб наименьшее вращение от \vec{a} к \vec{b} вокруг вектора \vec{c} осуществлялось против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \vec{c} (рис. 1).

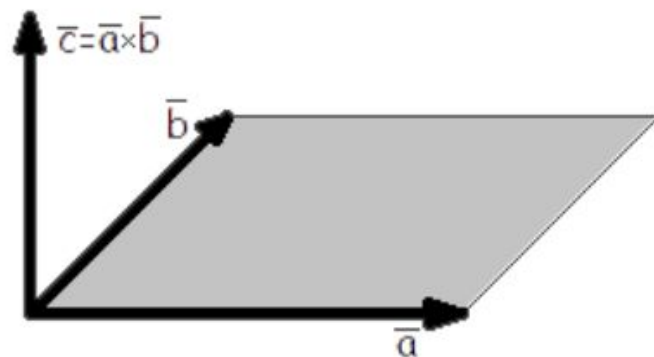


рис. 1

Векторное произведение двух векторов $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ в декартовой системе координат - это вектор, значение которого можно вычислить, используя следующие формулы:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \mathbf{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \mathbf{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

Свойства векторного произведения векторов

- **Геометрический смысл векторного произведения.** Модуль векторного произведения двух векторов \vec{a} и \vec{b} равен площади параллелограмма построенного на этих векторах:

$$S_{\text{парал}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

- **Геометрический смысл векторного произведения.** Площадь треугольника построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} равна половине модуля векторного произведения этих векторов:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

- Векторное произведение двух не нулевых векторов \vec{a} и \vec{b} равно нулю тогда и только тогда, когда вектора коллинеарны.

- Вектор \vec{c} , равный векторному произведению не нулевых векторов \vec{a} и \vec{b} , перпендикулярен этим векторам.

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

- $(k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$

- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Пример 1. Найти векторное произведение векторов $\bar{a} = \{1; 2; 3\}$ и $\bar{b} = \{2; 1; -2\}$.

Решение:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}(2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1) - \mathbf{j}(1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3) + \mathbf{k}(1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) =$$

$$= \mathbf{i}(-4 - 3) - \mathbf{j}(-2 - 6) + \mathbf{k}(1 - 4) = -7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k} = \{-7; 8; -3\}$$

Пример 2. Найти площадь треугольника образованного векторами $\bar{a} = \{-1; 2; -2\}$ и $\bar{b} = \{2; 1; -1\}$.

Решение: Найдем векторное произведение этих векторов:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

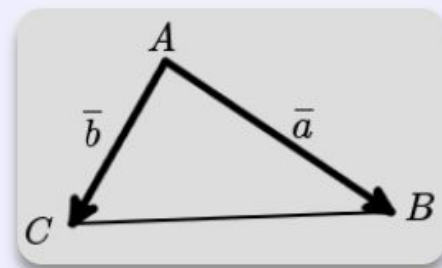
$$= \mathbf{i}(2 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1) - \mathbf{j}((-1) \cdot (-1) - (-2) \cdot 2) + \mathbf{k}((-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2) =$$

$$= \mathbf{i}(-2 + 2) - \mathbf{j}(1 + 4) + \mathbf{k}(-1 - 4) = -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k} = \{0; -5; -5\}$$

Из свойств векторного произведения:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 5^2 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{25 + 25} = \frac{1}{2} \sqrt{50} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2.5\sqrt{2}$$

Ответ: $S_{\Delta} = 2.5\sqrt{2}$.



Смешанное произведение векторов $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ и $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$ в декартовой системе координат можно вычислить, используя следующую формулу:

$$\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Свойства смешанного произведения векторов

- Геометрический смысл смешанного произведения.** Модуль смешанного произведения трех векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} равен объёму параллелепипеда, образованного этими векторами:

$$V_{\text{парал}} = |\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]|$$

- Геометрический смысл смешанного произведения.** Объем пирамиды образованной тремя векторами \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} равен одной шестой части от модуля смешанного произведения этих векторов:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]|$$

- Если смешанного произведения трех не нулевых векторов равно нулю, то эти **вектора компланарные**.

- $$\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

- $$\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \vec{b} \cdot [\vec{c} \times \vec{a}] = \vec{c} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}] = -\vec{a} \cdot [\vec{c} \times \vec{b}] = -\vec{b} \cdot [\vec{a} \times \vec{c}] = -\vec{c} \cdot [\vec{b} \times \vec{a}]$$

- $$\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] + \vec{b} \cdot [\vec{c} \times \vec{a}] + \vec{c} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}] = 0$$
 - тождество Якоби.

Пример 1. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$, $\vec{b} = \{1; 1; 1\}$, $\vec{c} = \{1; 2; 1\}$.

Решение:

$$\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = 1 + 2 + 6 - 3 - 2 - 2 = 2$$

Пример 2. Найти объем пирамиды построенной на векторах $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 1\}$, $\vec{c} = \{2; 0; -1\}$.

Решение: Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 0 =$$

$$= 1 + 4 + 0 + 6 + 2 - 0 = 13$$

Найдем объем пирамиды воспользовавшись свойствами:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]| = \frac{13}{6} = 2 \frac{1}{6}$$

