

**Векторы. Линейные операции над векторами. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Приложения.**

**Определение.** Вектор - это направленный отрезок, то есть отрезок, имеющий длину и определенное направление. Графически вектора изображаются в виде направленных отрезков прямой определенной длины. (рис.1)

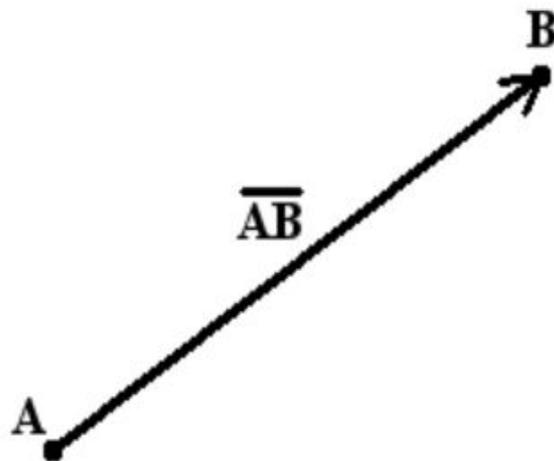


рис. 1

Вектор началом которого есть точка A, а концом - точка B, обозначается  $\overline{AB}$  (рис.1). Также вектора обозначают одной маленькой буквой, например  $a$ .

**Определение.** Длина направленного отрезка определяет числовое значение вектора и называется длиной вектора или модулем вектора  $\overline{AB}$ .

Для обозначения длины вектора используются две вертикальные линии слева и справа  $|\overline{AB}|$ .

**Определение.** Нулевым вектором называется вектор, у которого начальная и конечная точка совпадают.

Нулевой вектор обычно обозначается как  $\vec{0}$ .

Длина нулевого вектора равна нулю.



**Определение.** Вектора, параллельные одной прямой или лежащие на одной прямой называют **коллинеарными векторами** (рис. 2).

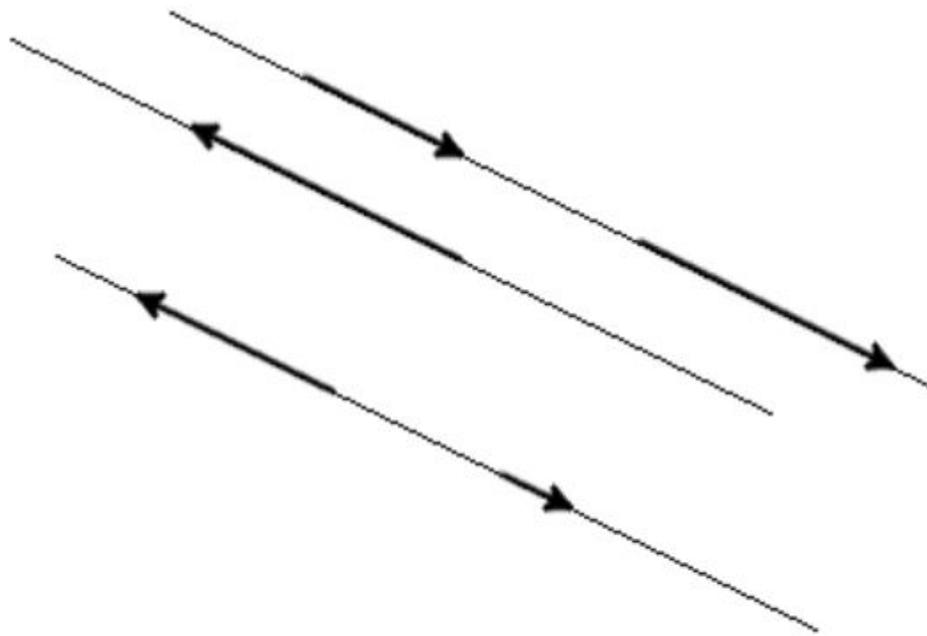
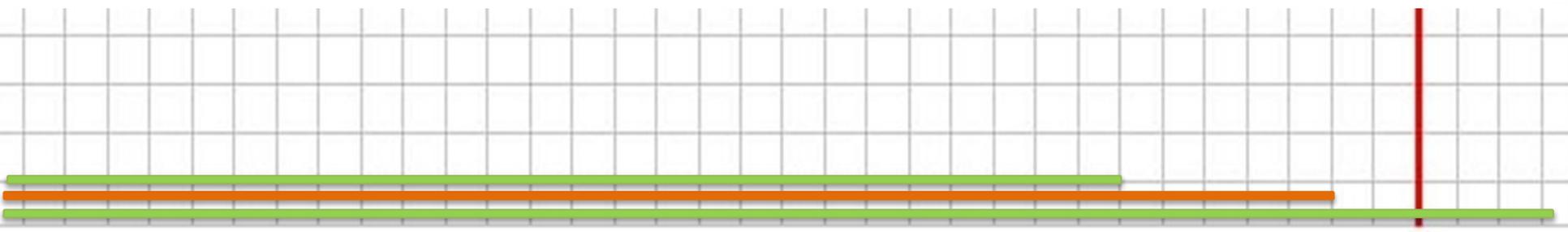


рис. 2



**Определение.** Два коллинеарных вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **сонаправленными векторами**, если их направления совпадают:  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$  (рис. 3).

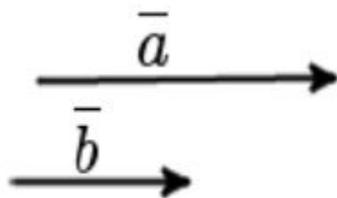


рис. 3

**Определение.** Два коллинеарных вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **противоположно направленными векторами**, если их направления противоположны:  $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$  (рис. 4).

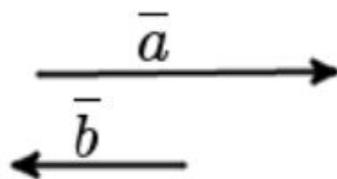


рис. 4

**Определение.** Вектора, параллельные одной плоскости или лежащие на одной плоскости называют **компланарными векторами**. (рис. 5).

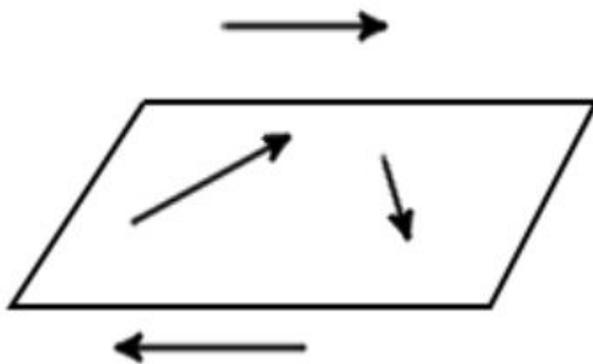


рис. 5

Всегда возможно найти плоскости параллельную двум произвольным векторам, по этому любые два вектора всегда компланарные.

**Определение.** Вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются равными, если они лежат на одной или параллельных прямых, их направления совпадают, а длины равны (рис. 6).

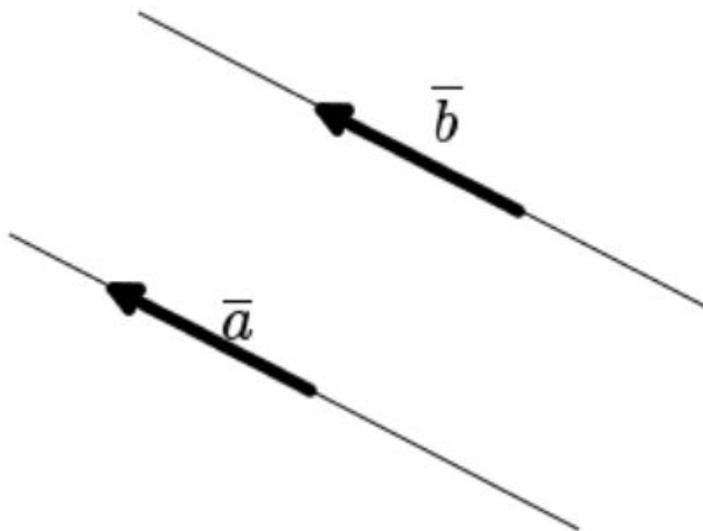


рис. 6

То есть, два вектора равны, если они коллинеарные, сонаправленные и имеют равные длины:

$$\vec{a} = \vec{b}, \text{ если } \vec{a} \uparrow \vec{b} \text{ и } |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

**Определение.** Единичным вектором или ортом - называется вектор, длина которого равна единице.

### *Формула определения координат вектора для плоских задач*

В случае плоской задачи вектор  $\overline{AB}$  заданный координатами точек  $A(A_x; A_y)$  и  $B(B_x; B_y)$  можно найти воспользовавшись следующей формулой

$$\overline{AB} = \{B_x - A_x; B_y - A_y\}$$

### *Формула определения координат вектора для пространственных задач*

В случае пространственной задачи вектор  $\overline{AB}$  заданный координатами точек  $A(A_x; A_y; A_z)$  и  $B(B_x; B_y; B_z)$  можно найти воспользовавшись следующей формулой

$$\overline{AB} = \{B_x - A_x; B_y - A_y; B_z - A_z\}$$

**Пример 1.** Найти координаты вектора  $\overline{AB}$ , если  $A(1; 4)$ ,  $B(3; 1)$ .

**Решение:**  $\overline{AB} = \{3 - 1; 1 - 4\} = \{2; -3\}$ .

**Пример 2.** Найти координаты точки  $B$  вектора  $\overline{AB} = \{5; 1\}$ , если координаты точки  $A(3; -4)$ .

**Решение:**

$$AB_x = B_x - A_x \Rightarrow B_x = AB_x + A_x \Rightarrow B_x = 5 + 3 = 8$$

$$AB_y = B_y - A_y \Rightarrow B_y = AB_y + A_y \Rightarrow B_y = 1 + (-4) = -3$$

**Ответ:**  $B(8; -3)$ .

**Пример 3.** Найти координаты точки  $A$  вектора  $\overline{AB} = \{5; 1\}$ , если координаты точки  $B(3; -4)$ .

**Решение:**

$$AB_x = B_x - A_x \Rightarrow A_x = B_x - AB_x \Rightarrow A_x = 3 - 5 = -2$$

$$AB_y = B_y - A_y \Rightarrow A_y = B_y - AB_y \Rightarrow A_y = -4 - 1 = -5$$

**Ответ:**  $A(-2; -5)$ .

В случае пространственной задачи модуль вектора  $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$  можно найти воспользовавшись следующей формулой:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

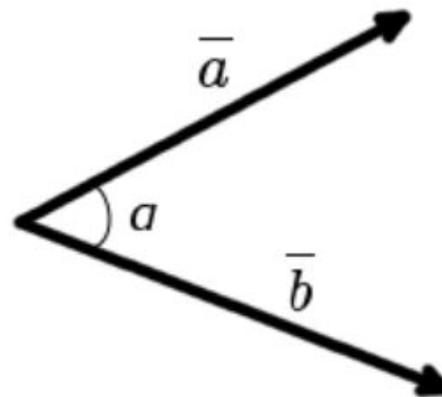
**Пример 1.** Найти длину вектора  $\vec{a} = \{2; 4\}$ .

**Решение:**  $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ .

**Пример** Найти длину вектора  $\vec{a} = \{2; 4; 4\}$ .

**Решение:**  $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$ .

**Определение.** Углом между двумя векторами, отложенными от одной точки, называется кратчайший угол, на который нужно повернуть один из векторов вокруг своего начала до положения сонаправленности с другим вектором.



$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

**Пример 1.** Найти угол между векторами  $\vec{a} = \{3; 4\}$  и  $\vec{b} = \{4; 3\}$ .

**Решение:** Найдем скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 12 + 12 = 24.$$

Найдем модули векторов:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Найдем угол между векторами:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{24}{5 \cdot 5} = \frac{24}{25} = 0.96$$

**Геометрическая интерпретация.** Скалярным произведением двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  будет скалярная величина, равная произведению модулей этих векторов умноженного на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

В случае плоской задачи скалярное произведение векторов  $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$  и  $\vec{b} = \{b_x; b_y\}$  можно найти воспользовавшись следующей формулой:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

## Свойства скалярного произведения векторов

1. Скалярное произведение вектора самого на себя всегда больше или равно нулю:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$$

2. Скалярное произведение вектора самого на себя равно нулю тогда и только тогда, когда вектор равен нулевому вектору:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$$

3. Скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его модуля:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

4. Операция скалярного умножения коммутативна:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

5. Если скалярное произведение двух не нулевых векторов равно нулю, то эти вектора ортогональны:

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

6.  $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$

7. Операция скалярного умножения дистрибутивна:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

**Пример 1.** Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} = \{1; 2\}$  и  $\vec{b} = \{4; 8\}$ .

**Решение:**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 4 + 16 = 20$ .

**Пример 2.** Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если их длины  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 6$ , а угол между векторами равен  $60^\circ$ .

**Решение:**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha = 3 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 9$ .

**Определение.** Векторным произведением вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , длина которого численно равна площади параллелограмма построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный так, чтоб наименьшее вращение от  $\vec{a}$  к  $\vec{b}$  вокруг вектора  $\vec{c}$  осуществлялось против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\vec{c}$  (рис. 1).

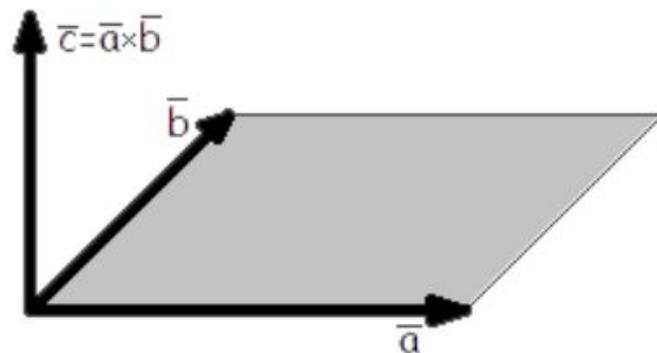


рис. 1

**Векторное произведение** двух векторов  $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$  и  $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$  в декартовой системе координат - это вектор, значение которого можно вычислить, используя следующие формулы:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \mathbf{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \mathbf{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

## Свойства векторного произведения векторов

- **Геометрический смысл векторного произведения.** Модуль векторного произведения двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен площади параллелограмма построенного на этих векторах:

$$S_{\text{парал}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

- **Геометрический смысл векторного произведения.** Площадь треугольника построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равна половине модуля векторного произведения этих векторов:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

- Векторное произведения двух не нулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равно нулю тогда и только тогда, когда **вектора коллинеарны**.

- Вектор  $\vec{c}$ , равный векторному произведению не нулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , перпендикулярен этим векторам.

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

- $(k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$

- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

**Пример 1.** Найти векторное произведение векторов  $\bar{a} = \{1; 2; 3\}$  и  $\bar{b} = \{2; 1; -2\}$ .

**Решение:**

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}(2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1) - \mathbf{j}(1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3) + \mathbf{k}(1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) =$$

$$= \mathbf{i}(-4 - 3) - \mathbf{j}(-2 - 6) + \mathbf{k}(1 - 4) = -7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k} = \{-7; 8; -3\}$$

**Пример 2.** Найти площадь треугольника образованного векторами  $\bar{a} = \{-1; 2; -2\}$  и  $\bar{b} = \{2; 1; -1\}$ .

**Решение:** Найдем векторное произведение этих векторов:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

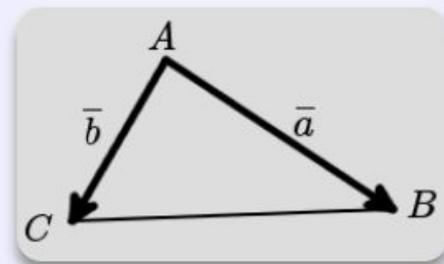
$$= \mathbf{i}(2 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1) - \mathbf{j}((-1) \cdot (-1) - (-2) \cdot 2) + \mathbf{k}((-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2) =$$

$$= \mathbf{i}(-2 + 2) - \mathbf{j}(1 + 4) + \mathbf{k}(-1 - 4) = -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k} = \{0; -5; -5\}$$

Из свойств векторного произведения:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 5^2 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{25 + 25} = \frac{1}{2} \sqrt{50} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2.5\sqrt{2}$$

**Ответ:**  $S_{\Delta} = 2.5\sqrt{2}$ .



Смешанное произведение векторов  $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ ,  $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$  и  $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$  в декартовой системе координат можно вычислить, используя следующую формулу:

$$\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

## Свойства смешанного произведения векторов

- Геометрический смысл смешанного произведения.** Модуль смешанного произведения трех векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  равен объёму параллелепипеда, образованного этими векторами:

$$V_{\text{парал}} = |\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]|$$

- Геометрический смысл смешанного произведения.** Объем пирамиды образованной тремя векторами  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  равен одной шестой части от модуля смешанного произведения этих векторов:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]|$$

- Если смешанного произведения трех не нулевых векторов равно нулю, то эти вектора **компланарные**.

- $$\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

- $$\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \vec{b} \cdot [\vec{c} \times \vec{a}] = \vec{c} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}] = -\vec{a} \cdot [\vec{c} \times \vec{b}] = -\vec{b} \cdot [\vec{a} \times \vec{c}] = -\vec{c} \cdot [\vec{b} \times \vec{a}]$$

- $$\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] + \vec{b} \cdot [\vec{c} \times \vec{a}] + \vec{c} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}] = 0$$
 - тождество Якоби.

**Пример 1.** Найти смешанное произведение векторов  $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$ ,  $\vec{b} = \{1; 1; 1\}$ ,  $\vec{c} = \{1; 2; 1\}$ .

**Решение:**

$$\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = 1 + 2 + 6 - 3 - 2 - 2 = 2$$

**Пример 2.** Найти объем пирамиды построенной на векторах  $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$ ,  $\vec{b} = \{1; -1; 1\}$ ,  $\vec{c} = \{2; 0; -1\}$ .

**Решение:** Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 0 =$$

$$= 1 + 4 + 0 + 6 + 2 - 0 = 13$$

Найдем объем пирамиды воспользовавшись свойствами:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]| = \frac{13}{6} = 2 \frac{1}{6}$$

