

Лекция 1. Системы счисления

Цель лекции:

Рассмотреть систематизированные основы знаний по
Системам счисления

Учебные вопросы:

1. Системы счисления
2. Первые позиционные системы счисления
3. Современные позиционные системы
4. Перевод целых чисел из одной системы счисления в другую
5. Перевод дробных чисел из одной системы счисления в другую

1. Системы счисления

Для записи информации о количестве объектов используются числа. Числа записываются с помощью набора специальных символов.

Система счисления — способ записи чисел с помощью набора специальных знаков (**алфавита**), называемых **цифрами**.

Непозиционные системы счисления

В непозиционных системах счисления позиция, которую цифра занимает в записи числа, роли не играет.

В них вводится ряд символов для представления основных чисел, а остальные числа – результат их сложения и вычитания. Например, римская система счисления.

Натуральные числа записываются при помощи повторения этих цифр (например, II – два, III – три, XXX – тридцать, CC – двести). Если же большая цифра стоит перед меньшей цифрой, то они **складываются**, если наоборот – **вычитаются** (например, VII – семь, IX – девять).

Основные символы
в римской системе
счисления

| | |
|---|------|
| I | 1 |
| V | 5 |
| X | 10 |
| L | 50 |
| C | 100 |
| D | 500 |
| M | 1000 |

Виды систем счисления

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

```
graph TD; A[СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ] --> B[ПОЗИЦИОННЫЕ]; A --> C[НЕПОЗИЦИОННЫЕ];
```

ПОЗИЦИОННЫЕ

В позиционных системах счисления величина, обозначаемая цифрой в записи числа, *зависит* от её *положения* в числе (*позиции*).

Например, 211

НЕПОЗИЦИОННЫЕ

В непозиционных системах счисления величина, которую обозначает цифра, *не зависит* от *положения* в числе.

Например, XXI

Примеры

1. $II = 1 + 1 = 2$

Здесь символ I обозначает 1 независимо от места в числе.

2. **Число 1988.**

Одна тысяча M, девять сотен CM, восемьдесят LXXX, восемь VIII. Запишем их вместе: MCMLXXXVIII.

Проверка:

$$MCMLXXXVIII =$$

$$1000 + (1000 - 100) + (50 + 10 + 10 + 10) + 5 + 1 + 1 + 1 = 1988$$

Позиционные системы счисления

В позиционных системах счисления величина, обозначаемая цифрой в записи числа, зависит от её положения в числе (позиции).

Количество используемых цифр называется **основанием системы счисления.**

Например, 11 – это одиннадцать, а не два: $1 + 1 = 2$ (сравните с римской системой счисления). Здесь символ 1 имеет различное значение в зависимости от позиции в числе.

2. Первые позиционные системы счисления

Самой первой такой системой, когда счетным "прибором" служили пальцы рук, была *пятеричная*.



Некоторые племена на филиппинских островах используют ее и в наши дни, а в цивилизованных странах ее реликт, как считают специалисты, сохранился только в виде пятибалльной шкалы оценок в образовательных учреждениях.

Двенадцатеричная система счисления



Следующей после пятеричной возникла **двенадцатеричная система** счисления.

Возникла она в древнем Шумере.

Некоторые учёные полагают, что такая система возникала у них из подсчёта фаланг на руке большим пальцем.

Широкое распространение получила двенадцатеричная система счисления в XIX веке.

На ее широкое использование в прошлом явно указывают названия числительных во многих языках, а также сохранившиеся в ряде стран способы отсчета времени, денег и соотношения между некоторыми единицами измерения:

Год состоит из 12 месяцев, а половина суток состоит из 12 часов.

Элементом двенадцатеричной системы в современности может служить счёт дюжинами.

Первые три степени числа **12** имеют собственные названия: **1 дюжина** = 12 штук;

1 гросс = 12 дюжин = 144 штуки;

1 масса = 12 гроссов = 144 дюжины = 1728 штук.

Английский фунт до 1971 года состоял из 12 шиллингов.

Шестидесятеричная система счисления

Следующая позиционная система счисления была придумана еще в Древнем Вавилоне, причем вавилонская нумерация была *шестидесятеричная*, т.е. в ней использовалось шестьдесят цифр!

В более позднее время использовалась арабами, а также древними и средневековыми астрономами. Шестидесятеричная система счисления, как считают исследователи, является синтезом уже вышеупомянутых пятеричной и двенадцатеричной систем.

Позиционную систему счисления называют **традиционной**, если ее **базис** образует члены геометрической прогрессии, а значения цифр есть целые неотрицательные числа.

Базис-последовательность чисел каждая из которых задает вес соответствующего разряда.

Знаменатель **P** геометрической прогрессии, члены которой образуют базис традиционной системы счисления, называется основанием этой системы счисления.

Традиционные системы счисления с основанием **P** иначе называют **P -ичным**.

Десятичная система счисления

Десятичная система

счисления — позиционная система счисления по основанию 10.

Предполагается, что основание 10 связано с количеством пальцев рук у человека.

Наиболее распространённая система счисления в мире.

Для записи чисел используются символы **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**, называемые арабскими цифрами.

| Современные цифры | Арабские цифры | Индийские цифры |
|-------------------|----------------|-----------------|
| 0 | ٠ | ० |
| 1 | ١ | १ |
| 2 | ٢ | २ |
| 3 | ٣ | ३ |
| 4 | ٤ | ४ |
| 5 | ٥ | ५ |
| 6 | ٦ | ६ |
| 7 | ٧ | ७ |
| 8 | ٨ | ८ |
| 9 | ٩ | ९ |

3. Современные позиционные системы

В настоящее время наиболее распространены **десятичная, двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная** системы счисления.

Двоичная, восьмеричная (в настоящее время вытесняется шестнадцатеричной) и шестнадцатеричная система часто используется в областях, связанных с цифровыми устройствами, программировании и вообще компьютерной документации.

Современные компьютерные системы оперируют информацией представленной в цифровой форме. **Числовые данные преобразуются в двоичную систему счисления.**

Двоичная система счисления

Двоичная система счисления — позиционная система счисления с основанием 2. Используются цифры **0** и **1**.

Двоичная система используется в цифровых устройствах, поскольку является наиболее простой и удовлетворяет требованиям:

- Чем меньше значений существует в системе, тем проще изготовить отдельные элементы.
- Чем меньше количество состояний у элемента, тем выше помехоустойчивость и тем быстрее он может работать.
- Простота создания таблиц сложения и умножения — основных действий над числами.

Алфавит десятичной, двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления

| Система счисления | Основание | Алфавит цифр |
|-------------------|-----------|--|
| Десятичная | 10 | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 |
| Двоичная | 2 | 0, 1 |
| Восьмеричная | 8 | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 |
| Шестнадцатеричная | 16 | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F |

Соответствие десятичной, двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------|---|---|----|----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| p=10 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| p=2 | 0 | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | 110 | 111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 10000 |
| p=8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 20 |
| p=16 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F | 10 |

Количество используемых цифр называется основанием системы счисления.

При одновременной работе с несколькими системами счисления для их различения основание системы обычно указывается в виде нижнего индекса, который записывается в десятичной системе:

123_{10} — это число 123 в десятичной системе счисления;

1111011_2 — то же число, но в двоичной системе.

Двоичное число 1111011 можно расписать в виде: $1111011_2 = 1*2^6 + 1*2^5 + 1*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0$.

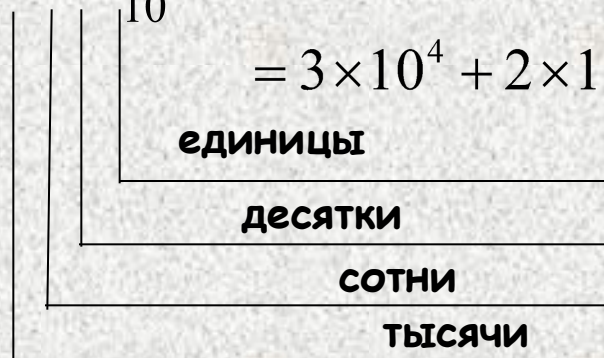
Развернутая форма записи числа

$$A_q = \pm (a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \dots + a_0p^0 + a_{-1}p^{-1} + a_{-2}p^{-2} + \dots + a_{-m}p^{-m})$$

где **A**-само число, **P**-основание системы счисления, **a**-цифры данной системы счисления, **n**-число разрядов целой части числа, **m**-число разрядов дробной части числа.

Пример:

$$32478_{10} = 3 \times 10000 + 2 \times 1000 + 4 \times 100 + 7 \times 10 + 8 = \\ = 3 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0.$$



4. Перевод целых чисел из одной системы счисления в другую

Чтобы перевести целое число из позиционной системы счисления с основанием p в десятичную, надо представить это число в виде суммы степеней p и произвести указанные вычисления в десятичной системе счисления.

Например, переведем число 1011_2 в десятичную систему счисления. Для этого представим это число в виде степеней двойки и произведем вычисления в десятичной системе счисления.

$$1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11_{10}$$

Рассмотрим пример. Переведем число $52,74_8$ в десятичную систему счисления.

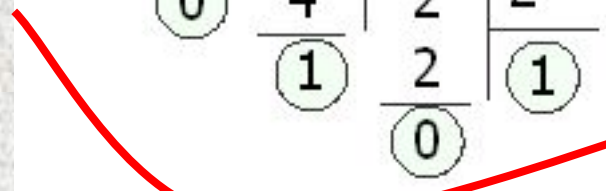
$$52,74_8 = 5 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 + 7 \cdot 8^{-1} + 4 \cdot 8^{-2} = 5 \cdot 8 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 1/8 + 4 \cdot 1/49 = 40 + 2 + 0,875 + 0,0625 = 42,9375_{10}$$

Перевод **целых чисел из десятичной** системы счисления в систему счисления с основанием **p** осуществляется последовательным делением десятичного числа и его десятичных частных на **p**, а затем выписыванием последнего частного и остатков в обратном порядке.

Переведем десятичное число 20_{10} в двоичную систему счисления (основание системы счисления **p=2**).

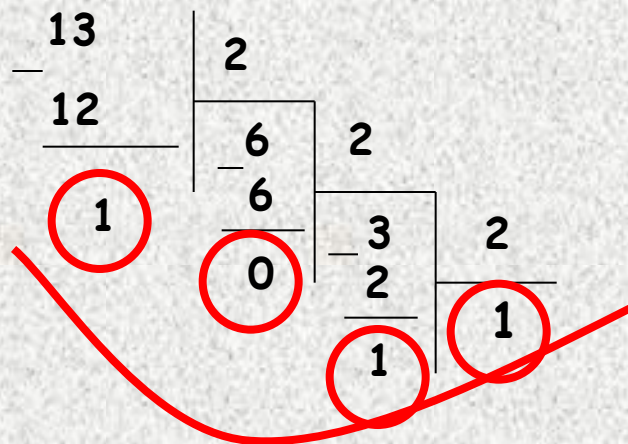
В итоге получили $20_{10} = 10100_2$.

| | | | | | | | | |
|----|--|----|--|---|--|---|--|---|
| 20 | | 2 | | | | | | |
| 20 | | 10 | | 2 | | | | |
| 0 | | 10 | | 5 | | 2 | | |
| | | 0 | | 4 | | 2 | | 2 |
| | | | | 1 | | 2 | | 1 |
| | | | | | | 0 | | |



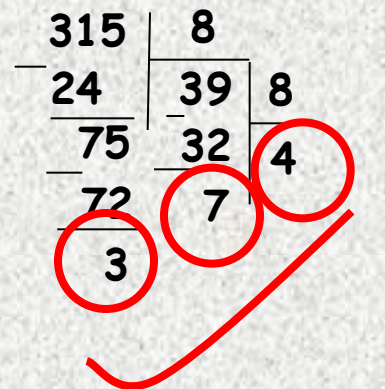
Перевод целых чисел из десятичной в другие системы счисления

Двоичная $13_{10} = X_2$



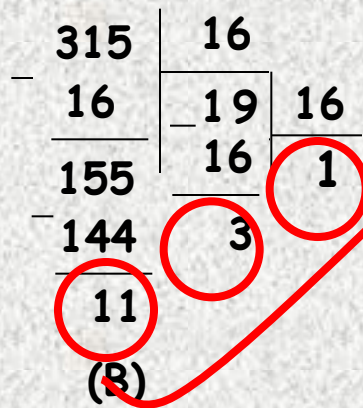
$$13_{10} = 1101_2$$

Восьмеричная $315_{10} = Y_8$



$$315_{10} = 473_8$$

Шестнадцатеричная $315_{10} = Z_{16}$



$$315_{10} = 13B_{16}$$

5. Перевод дробных чисел из одной системы счисления в другую

Правило перевода дробных чисел из одной системы счисления в другую:

- 1) последовательно умножать данное число и получаемые дробные части произведений на основание новой системы, выраженное цифрами исходной системы, до тех пор, пока дробная часть произведения не станет равной нулю или не будет достигнута требуемая точность;*

Пример. Перевести число $0,25_{(10)}$ в двоичную систему счисления.

Решение.

$$\begin{array}{r} 0,25 \\ * 2 \\ \hline 0,50 \\ * 2 \\ \hline 1,00 \\ \downarrow \end{array}$$

Пример. Перевести число $0,873_{(10)}$ в восьмеричную систему счисления.

Решение.

$$\begin{array}{r} 0,873 \\ * 8 \\ \hline 0,256 \quad 696 \\ * 8 \\ \hline 0,505 \quad 568 \\ * 8 \\ \hline 1,004 \quad 548 \\ \downarrow \end{array}$$

Пример. Перевести число $0,27_{(10)}$ в шестнадцатеричную систему счисления с точностью в 4 цифры.

Решение.

$$\begin{array}{r} 0,27 \\ * 16 \\ \hline 0,832 \\ * 16 \\ \hline 6,592 \\ * 16 \\ \hline 5,568 \\ * 16 \\ \hline 4,77 \\ * 16 \\ \hline 4,544 \\ \downarrow \end{array}$$

Пример. Перевести число $0,27_{(10)}$ в двоичную систему счисления с точностью в 4 значащих цифры.

Решение.

$$\begin{array}{r} 0,27 \\ * 2 \\ \hline 0,50 \\ * 2 \\ \hline 1,00 \\ \downarrow \end{array}$$

Пример. Перевести число $0,837_{(10)}$ в двоичную систему счисления с точностью в 4 значащих цифры.

Решение.

$$\begin{array}{r} 0,837 \\ * 2 \\ \hline 0,27 \quad 8 \\ * 2 \\ \hline 0,54 \quad 6,96 \\ * 2 \\ \hline 1,08 \quad 5,68 \\ * 2 \\ \hline 2,16 \quad 4,544 \\ * 2 \\ \hline 4,32 \quad 72 \\ \downarrow \end{array}$$

Пример. Перевести число $0,27_{(10)}$ в шестнадцатеричную систему счисления с точностью в 4 значащих цифры.

Решение.

$$\begin{array}{r} 0,27 \\ * 16 \\ \hline 4,32 \\ * 16 \\ \hline 5,12 \\ * 16 \\ \hline 1,92 \\ * 16 \\ \hline 14,72 \\ \downarrow \end{array}$$

2) полученные целые части произведений, являющиеся цифрами числа в новой системе, выразить цифрами алфавита этой системы;

Пример. Перевести число $0,25_{(10)}$ в двоичную систему счисления.

Решение.

$$\begin{array}{r} 0,25 \\ \times 2 \\ \hline 0,50 \\ \times 2 \\ \hline 1,00 \\ \downarrow \end{array}$$

Пример. Перевести число $0,873_{(10)}$ в восьмеричную систему счисления

Решение.

$$\begin{array}{r} 0,837 \\ \times 8 \\ \hline 6,696 \\ \times 8 \\ \hline 5,568 \\ \times 8 \\ \hline 4,548 \\ \downarrow \end{array}$$

Пример. Перевести число $0,27_{(10)}$ в шестнадцатеричную систему счисления

Решение.

$$\begin{array}{r} 0,27 \\ \times 16 \\ \hline 4,32 \\ \times 16 \\ \hline 5,12 \\ \times 16 \\ \hline 1,92 \\ \times 16 \\ \hline E,72 \\ \downarrow \end{array}$$

3) составить дробную часть числа в новой системе, начиная с целой части первого произведения.

Пример. Перевести число $0,25_{(10)}$ в двоичную систему счисления.

Решение.

$$\begin{array}{r|l}
 0,25 & * 2 \\
 \hline
 0 & 50 \\
 & * 2 \\
 \hline
 1 & 00 \\
 \downarrow &
 \end{array}$$

т.е.

$$0,25_{(10)} = \mathbf{0,01}_{(2)}$$

Пример. Перевести число $0,837_{(10)}$ в восьмеричную систему счисления

Решение.

$$\begin{array}{r|l}
 0,837 & * 8 \\
 \hline
 6 & 696 \\
 & * 8 \\
 \hline
 5 & 568 \\
 & * 8 \\
 \hline
 4 & 548 \\
 \downarrow &
 \end{array}$$

т.е. $0,837_{(10)} = \mathbf{0,654}_{(8)}$

Пример. Перевести число $0,27_{(10)}$ в шестнадцатеричную систему счисления

Решение.

$$\begin{array}{r|l}
 0,27 & * 16 \\
 \hline
 4 & 32 \\
 & * 16 \\
 \hline
 5 & 12 \\
 & * 16 \\
 \hline
 1 & 92 \\
 & * 16 \\
 \hline
 \mathbf{E} & 72 \\
 \downarrow &
 \end{array}$$

т.е. $0,27_{(10)} = \mathbf{0.451E}_{(16)}$

Переводы в смешанных системах

Из 2-ной системы в 8-ную (двоично-восьмеричное изображение):

$$101,10111_2 = \frac{101}{5_8}, \frac{101}{5_8} \frac{110_2}{6_8} = 5,56_8;$$

из 8-ной системы в 2-ную (восьмерично-двоичное изображение):

$$6,24_8 = \frac{6}{110_2}, \frac{2}{010_2} \frac{4_8}{100_2} = 110,0101_2;$$

Переводы в смешанных системах

из 2-ной системы в 16-ную (двоично-шестнадцатеричное изображение):

$$101,10111_2 = \underbrace{0101}_{5_{16}}, \underbrace{1011}_{11(B)_{16}} \underbrace{1000}_8_2 = 5,B8_{16};$$

из 16-ной системы в 2-ную (шестнадцатерично-двоичное изображение):

$$1A,F3_{16} = \underbrace{1}_{0001_2} \underbrace{A}_{1010_2}, \underbrace{F}_{1111_2} \underbrace{3}_{0011_2}_{16} = 11010,11110011_2.$$

Вопросы:

- Что такое система счисления?
- Какие два вида систем счисления вы знаете?
- Что такое основание системы счисления? Что такое алфавит системы счисления? Примеры.
- В какой системе счисления хранятся и обрабатываются числа в памяти компьютера?

Задания:

- Запишите число 1945 в римской системе счисления.
- Запишите в развернутом виде числа: 2007_{10} , 234_8 , 10110_2 .
- Чему будут равны числа 174_8 , $2E_{16}$, $101,101_2$ в десятичной системе счисления?
- Как будет записываться число 14_{10} в двоичной системе счисления? 100_{10} в восьмеричной?