Лекция 1. Системы счисления

Цель лекции:

Рассмотреть систематизированные основы знаний по Системам счисления

Учебные вопросы:

1. Системы счисления
2. Первые позиционные системы счисления
3. Современные позиционные системы
4. Перевод целых чисел из одной системы счисления в другую
5. Перевод дробных чисел из одной системы счисления в другую

1. Системы счисления

Для записи информации о количестве объектов используются числа. Числа записываются с помощью набора специальных символов.

Система счисления — способ записи чисел с помощью набора специальных знаков (алфавита), называемых цифрами.

Непозиционные системы счисления

В непозиционных системах счисления позиция, которую цифра занимает в записи числа, роли не играет.

В них вводится ряд символов для представления основных чисел, а остальные числа – результат их сложения и вычитания. Например, римская система счисления.

Натуральные числа записываются при помощи повторения этих цифр (например, II – два, III – три, XXX – тридцать, CC – двести). Если же большая цифра стоит перед меньшей цифрой, то они складываются, если наоборот – вычитаются (например, VII – семь, IX – девять).

Основные символы в римской системе счисления

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Виды систем счисления

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

ПОЗИЦИОННЫЕ

В *позиционных* системах счисления *величина*, обозначаемая цифрой в записи числа, *зависит* от её *положения* в числе (*позиции*).

Например, 211

НЕПОЗИЦИОННЫЕ

В *непозиционных* системах счисления величина, которую обозначает цифра, *не зависит* от *положения* в числе.

Например, XXI

Примеры

1. **II = 1 + 1 = 2**

   Здесь символ I обозначает 1 независимо от места в числе.

2. **Число 1988.**

   Одна тысяча M, девять сотен CM, восемьдесят LXXX, восемь VIII. Запишем их вместе: MCMLXXXVIII.

Проверка:

MCMLXXXVIII = 1000+(1000-100)+(50+10+10+10)+5+1+1+1 = 1988

Позиционные системы счисления

В позиционных системах счисления величина, обозначаемая цифрой в записи числа, зависит от её положения в числе (позиции).

Количество используемых цифр называется **основанием системы счисления.**

Например, 11 – это одиннадцать, а не два: 1 + 1 = 2 (сравните с римской системой счисления). Здесь символ 1 имеет различное значение в зависимости от позиции в числе.

2. Первые позиционные системы счисления

Самой первой такой системой, когда счетным "прибором" служили пальцы рук, была ***пятеричная***.

Некоторые племена на филиппинских островах используют ее и в наши дни, а в цивилизованных странах ее реликт, как считают специалисты, сохранился только в виде пятибалльной шкалы оценок в образовательных учреждениях.

Двенадцатеричная система счисления

Следующей после пятеричной возникла ***двенадцатеричная система*** счисления.

Возникла она в древнем Шумере.

Некоторые учёные полагают, что такая система возникала у них из подсчёта фаланг на руке большим пальцем.

Широкое распространение получила двенадцатеричная система счисления в XIX веке.

На ее широкое использование в прошлом явно указывают названия числительных во многих языках, а также сохранившиеся в ряде стран способы отсчета времени, денег и соотношения между некоторыми единицами измерения:

Год состоит из 12 месяцев, а половина суток состоит из 12 часов.

Элементом двенадцатеричной системы в современности может служить счёт дюжинами. Первые три степени числа **12** имеют собственные названия: 1 дюжина = 12 штук;

1 гросс = 12 дюжин = 144 штуки;

1 масса = 12 гроссов = 144 дюжины = 1728 штук.

Английский фунт до 1971 года состоял из 12 шиллингов.

Шестидесятеричная система счисления

Следующая позиционная система счисления была придумана еще в Древнем Вавилоне, причем вавилонская нумерация была ***шестидесятеричная***, т.е. в ней использовалось шестьдесят цифр!

В более позднее время использовалась арабами, а также древними и средневековыми астрономами. Шестидесятеричная система счисления, как считают исследователи, являет собой синтез уже вышеупомянутых пятеричной и двенадцатеричной систем.

Позиционную систему счисления называют традиционной, если ее базис образует члены геометрической прогрессии, а значения цифр есть целые неотрицательные числа.

Базис-последовательность чисел каждая из которых задает вес соответствующего разряда.

Знаменатель P геометрической прогрессии, члены которой образуют базис традиционной системы счисления, называется основанием этой системы счисления.

Традиционные системы счисления с основанием P иначе называют P- ичным.

Десятичная система счисления

Десятичная *система счисления* — позиционная система счисления по основанию 10.

Предполагается, что основание 10 связано с количеством пальцев рук у человека.

Наиболее распространённая система счисления в мире.

Для записи чисел используются символы **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9**, называемые арабскими цифрами.

Современные цифры	Арабские цифры	Индийские цифры
0	٠	०
1	١	१
2	٢	२
3	٣	३
4	٤ ۴	४
5	٥ ۵	५
6	٦ ۶	६
7	٧	७
8	٨	८
9	٩	९

3. Современные позиционные системы

В настоящее время наиболее распространены **десятичная, двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная** системы счисления.

Двоичная, восьмеричная (в настоящее время вытесняется шестнадцатеричной) и шестнадцатеричная система часто используется в областях, связанных с цифровыми устройствами, программировании и вообще компьютерной документации.

Современные компьютерные системы оперируют информацией представленной в цифровой форме. Числовые данные преобразуются в двоичную систему счисления.

Двоичная система счисления

Двоичная система счисления — позиционная система счисления с основанием 2. Используются цифры **0** и **1**.

Двоичная система используется в цифровых устройствах, поскольку является наиболее простой и удовлетворяет требованиям:

- Чем меньше значений существует в системе, тем проще изготовить отдельные элементы.
- Чем меньше количество состояний у элемента, тем выше помехоустойчивость и тем быстрее он может работать.
- Простота создания таблиц сложения и умножения — основных действий над числами.

Алфавит десятичной, двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления

Система счисления	Основание	Алфавит цифр
Десятичная	**10**	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Двоичная	**2**	0, 1
Восьмеричная	**8**	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Шестнадцатеричная	**16**	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Соответствие десятичной, двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления

p=10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
p=2	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000
p=8	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17	20
p=16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10

Количество используемых цифр называется **основанием системы счисления.**

При одновременной работе с несколькими системами счисления для их различения основание системы обычно указывается в виде нижнего индекса, который записывается в десятичной системе:

123_{10} — это число 123 в десятичной системе счисления;

1111011_2 — то же число, но в двоичной системе.

Двоичное число 1111011 можно расписать в виде: $1111011_2 = 1*2^6 + 1*2^5 + 1*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0$.

Развернутая форма записи числа

$$A_q = \pm\left(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \ldots + a_0 p^0 + a_{-1}p^{-1} + a_{-2}p^{-2} + \ldots + a_{-m}p^{-m}\right).$$

где A-само число, P-основание системы счисления, a-цифры данной системы счисления, n-число разрядов целой части числа, m-число разрядов дробной части числа.

Пример:

$$32478_{10} = 3\times10000 + 2\times1000 + 4\times100 + 7\times10 + 8 =$$

$$= 3\times10^4 + 2\times10^3 + 4\times10^2 + 7\times10^1 + 8\times10^0.$$

единицы

десятки

сотни

тысячи

4. Перевод целых чисел из одной системы счисления в другую

Чтобы перевести целое число из позиционной системы счисления с основанием **p** в десятичную, надо представить это число в виде суммы степеней **p** и произвести указанные вычисления в десятичной системе счисления.

Например, переведем число 1011_2 в десятичную систему счисления. Для этого представим это число в виде степеней двойки и произведем вычисления в десятичной системе счисления.

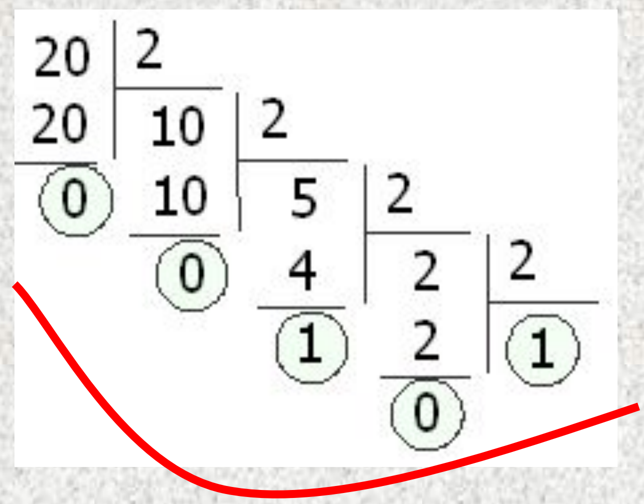
$1011_2 = 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = 1*8 + 0*4 + 1*2 + 1*1 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11_{10}$

Рассмотрим пример. Переведем число $52,74_8$ в десятичную систему счисления.

$52,74_8 = 5*8^1 + 2*8^0 + 7*8^{-1} + 4*8^{-2} = 5*8 + 2*1 + 7*1/8 +4*1/49 = 40 + 2 + 0,875 + 0,0625 = 42,9375_{10}$

Перевод **целых чисел из десятичной** системы счисления в систему счисления с основанием р осуществляется последовательным делением десятичного числа и его десятичных частных на р, а затем выписыванием последнего частного и остатков в обратном порядке.

Переведем десятичное число 20_{10} в двоичную систем счисления (основание системы счисления р=2).



В итоге получили $20_{10} = 10100_2$.

Перевод целых чисел из десятичной в другие системы счисления

Двоичная $13_{10}=X_2$

$$
\begin{array}{r|l}
13 & 2 \\
-12 & 6 \;|\; 2 \\
1 & -6 \quad 3 \;|\; 2 \\
 & 0 \quad -2 \quad 1 \\
 & \quad\quad 1
\end{array}
$$

$$13_{10}=1101_2$$

Восьмеричная $315_{10}=Y_8$

$$
\begin{array}{r|l}
315 & 8 \\
-24 & 39 \;|\; 8 \\
75 & -32 \quad 4 \\
-72 & 7 \\
3 &
\end{array}
$$

$$315_{10}=473_8$$

Шестнадцатеричная $315_{10}=Z_{16}$

$$
\begin{array}{r|l}
315 & 16 \\
-16 & 19 \;|\; 16 \\
155 & -16 \quad 1 \\
-144 & 3 \\
11 &
\end{array}
$$

(B)

$$315_{10}=13B_{16}$$

5. Перевод дробных чисел из одной системы счисления в другую

Правило перевода дробных чисел из одной системы счисления в другую:

1) *последовательно умножать данное число и получаемые дробные части произведений на основание новой системы, выраженное цифрами исходной системы, до тех пор, пока дробная часть произведения не станет равной нулю или не будет достигнута требуемая точность;*

Пример. Перевести число $0{,}25_{(10)}$ в двоичную систему счисления.

Решение.

0,	25
	*2
0	50
	*2
1	00

Пример. Перевести число $0{,}873_{(10)}$ в восьмеричную систему счисления.

Решение.

0,	837
	*8
6	696
	*8
5	568
	*8
4	544

Пример. Перевести число $0{,}27_{(10)}$ в шестнадцатеричную систему счисления.

Решение.

0,	27
	*16
4	32
	*16
5	12
	*16
1	92
	*16
14	72

Пример. Перевести с точностью в 4 значащих цифры число $0{,}27_{(10)}$ в шестнадцатеричную систему счисления

Решение.

0,	27
	*16
4	32
	*16
5	12
	*16
1	92
	*16
14	72

2) полученные целые части произведений, являющиеся цифрами числа в новой системе, выразить цифрами алфавита этой системы;

Пример. Перевести число $0{,}25_{(10)}$ в двоичную систему счисления.

Решение.

0, 25
* 2
0, 50
* 2
1, 00

Пример. Перевести число $0{,}873_{(10)}$ в восьмеричную систему счисления

Решение.

0, 837
* 8
6, 696
* 8
5, 568
* 8
4, 548

Пример. Перевести число $0{,}27_{(10)}$ в шестнадцатеричную систему счисления

Решение.

0, 27
* 16
4 32
* 16
5 12
* 16
1 92
* 16
E 72

3) составить дробную часть числа в новой системе, начиная с целой части первого произведения.

Пример. Перевести число $0{,}25_{(10)}$ в двоичную систему счисления.

Решение.

0,	25
	* 2
0	50
	* 2
1	00

т.е. $0{,}25_{(10)} = \mathbf{0{,}01}_{(2)}$

Пример. Перевести число $0{,}837_{(10)}$ в восьмеричную систему счисления

Решение.

0,	837
	* 8
6	696
	* 8
5	568
	* 8
4	548

т.е. $0{,}873_{(10)} = \mathbf{0{,}654}_{(8)}$

Пример. Перевести число $0{,}27_{(10)}$ в шестнадцатеричную систему счисления

Решение.

0,	27
	* 16
4	32
	* 16
5	12
	* 16
1	92
	* 16
E	72

т.е. $0{,}27_{(10)} = \mathbf{0.451E}_{(16)}$

Переводы в смешанных системах

Из 2-ной *системы* в 8-ную (двоично-восьмеричное изображение):

$$101{,}10111_2 = \underbrace{101}_{5_8,}\,,\underbrace{101}_{5_8}\ \underbrace{110_2}_{6_8} = 5{,}56_8;$$

из 8-ной *системы* в 2–ную (восьмерично-двоичное изображение):

$$6{,}24_8 = \underbrace{6}_{110_2,}\,,\ \underbrace{2}_{010_2}\ \underbrace{4_8}_{100_2} = 110{,}0101_2;$$

Переводы в смешанных системах

из 2-ной *системы* в 16-ную (двоично-шестнадцатеричное изображение):

$$101{,}10111_2 = \underbrace{0101}_{5_{16}}{,}\ \underbrace{1011}_{11(B)_{16}}\ \underbrace{1000_2}_{8_{16}} = 5{,}B8_{16};$$

из 16-ной *системы* в 2-ную (шестнадцатерично-двоичное изображение):

$$1A{,}F3_{16} = \underbrace{1}_{0001_2}\ \underbrace{A}_{1010_2}{,}\ \underbrace{F}_{1111_2}\ \underbrace{3_{16}}_{0011_2} = 11010{,}11110011_2.$$

Вопросы:

- Что такое система счисления?
- Какие два вида систем счисления вы знаете?
- Что такое основание системы счисления? Что такое алфавит системы счисления? Примеры.
- В какой системе счисления хранятся и обрабатываются числа в памяти компьютера?

Задания:

- Запишите число 1945 в римской системе счисления.
- Запишите в развернутом виде числа: 2007_{10}, 234_8, 10110_2 .
- Чему будут равны числа 174_8, $2E_{16}$, $101{,}101_2$ в десятичной системе счисления?
- Как будет записываться число 14_{10} в двоичной системе счисления? 100_{10} в восьмеричной?