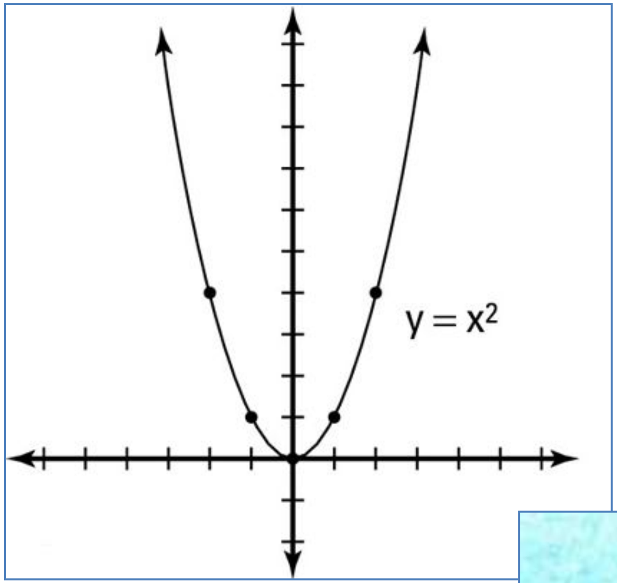
Алгебра і початки аналізу.
І курс

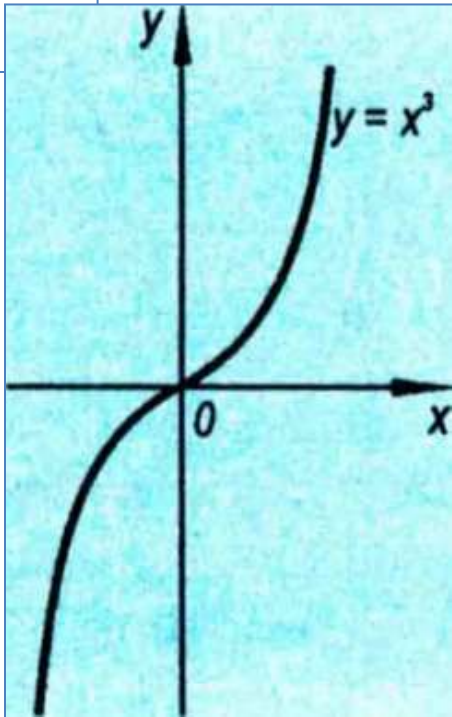
ПАРНІ І НЕПАРНІ ФУНКЦІЇ

Парні і непарні функції

Означення. Функцію *f* *називають парною, якщо для будь-якого x з області визначення f (–x) = f (x).*



Означення. Функцію *f* *називають непарною, якщо для будь-якого x з області визначення f (–x) = –f (x).*



Очевидно, що функція y = x ^{2} ***є парною, а функція y = x*** ^{3} ***— непарною.***

Парні і непарні функції

Виконання рівності $f(-x) = f(x)$ або рівності $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$. Таку множину називають симетричною відносно початку координат.

Якщо область визначення функції не є симетричною відносно початку координат, то ця функція не може бути парною (непарною).

Наприклад,

$$y = \frac{1}{x-1}$$

Областю визначення функції є множина $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, яка не є симетричною відносно початку координат. Тому ця функція не є **ні парною, ні непарною.**

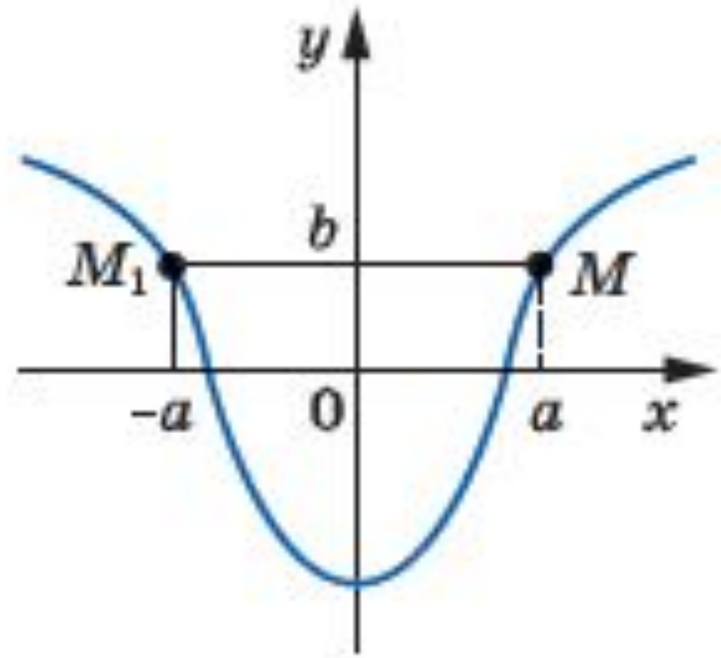


Рис. 19

Приклад 1

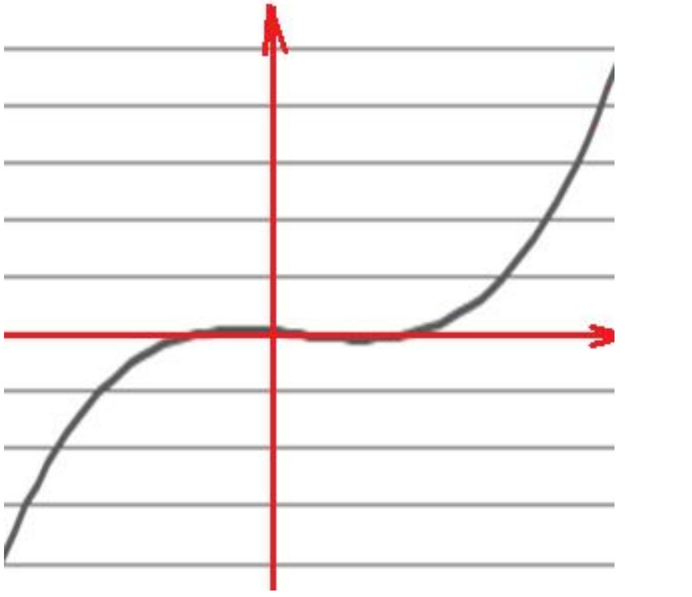
Доведіть, що функція $f(x) = x^3 - x$ є непарною.

Розв’язання.

Оскільки $D(f) = R$, то область визначення функції f симетрична відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ *маємо* $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = = -f(x)$.

Отже, функція f є непарною.



Приклад 2

Дослідіть на парність функцію

$$f(x) = \frac{|x-2|}{1+x} + \frac{|x+2|}{1-x}.$$

Розв'язання. Маємо: $D(f) = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. Отже, область визначення функції f симетрична відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо:

$$f(-x) = \frac{|-x-2|}{1-x} + \frac{|-x+2|}{1-(-x)} = \frac{|x+2|}{1-x} + \frac{|x-2|}{1+x} = f(x).$$

Отже, функція f є парною.

Теорема 4.1

Вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції.

Доведення.

Для доведення теореми достатньо показати, що коли точка M (a; b) належить графіку парної функції, то точка M_1 (–a; b) також належить її графіку. Якщо точка M (a; b) належить графіку функції f, то f (a) = b. Оскільки функція f є парною, то f (–a) = f (a) = b. Це означає, що точка M_1 (–a; b) також належить графіку функції f (рис. 19).

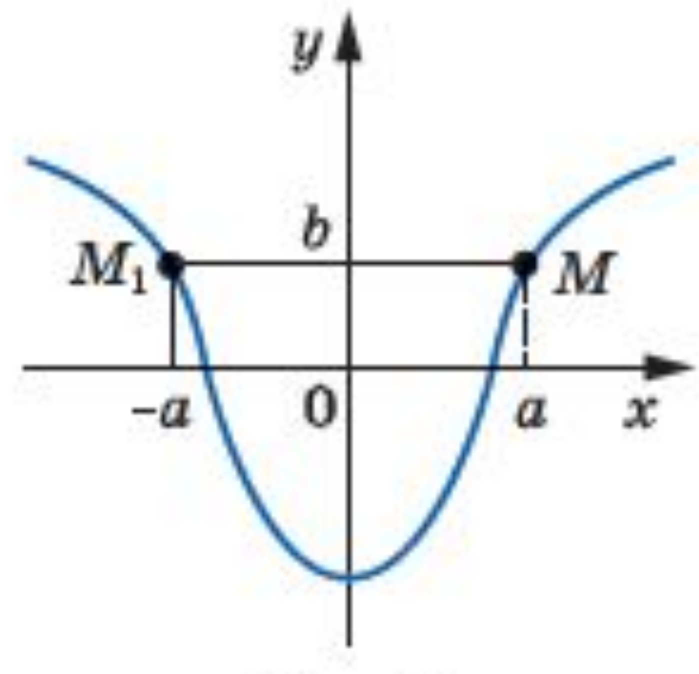


Рис. 19

Для будь-якого *$x \in D(f)$ маємо*

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = = -f(x)$.

Отже, функція f є непарною.

Теорема 4.2

Початок координат є центром симетрії графіка непарної функції.

Доведіть цю теорему самостійно (рис. 20).

Очевидно, що функція y = 0, у якої D (y) = R, одночасно є і парною, і непарною. Можна показати, що інших функцій з областю визначення R, які є одночасно і парними, і непарними, не існує.

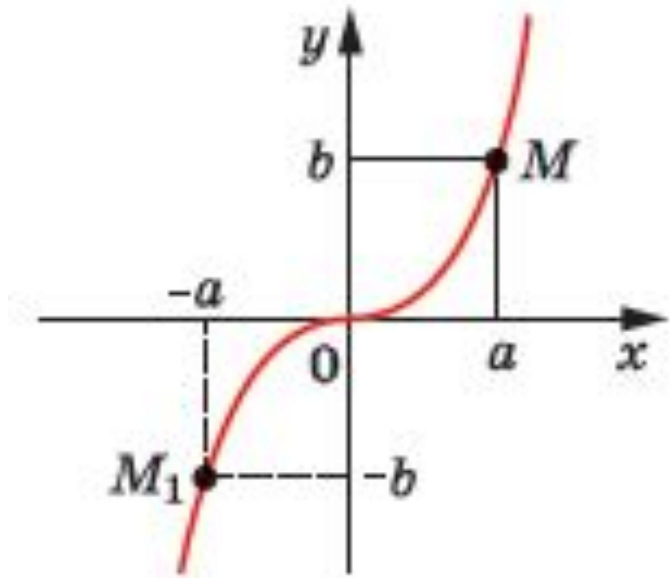
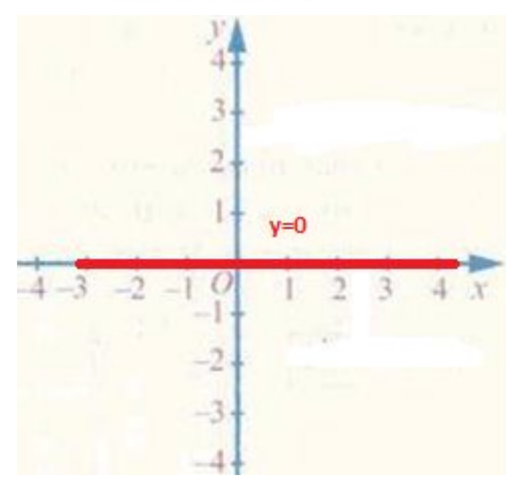


Рис. 20



Первинне закріплення теоретичного матеріалу

1. Яку функцію називають парною?
2. Яку функцію називають непарною?
3. Яку множину називають симетричною відносно початку координат?
4. Сформулюйте властивість графіка парної функції.
5. Сформулюйте властивість графіка непарної функції.

Тренувальні вправи

111.° Відомо, що $f(7) = -16$. Знайдіть $f(-7)$, якщо функція f є:
1) парною; 2) непарною.

112.° Функція f є парною. Чи може виконуватися рівність:

1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5)\,f(-5) = -2$; 3) $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 0$?

113.° Функція f є парною. Чи обов'язково виконується рівність $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 1$?

Тренувальні вправи

118.$^{\bullet}$ **Доведіть, що є непарною функція:**

1) $f(x) = 4x^7$;
2) $f(x) = 2x - 3x^5$;
3) $f(x) = x\,|\,x\,|$;
4) $f(x) = (5 - x)^5 - (5 + x)^5$;
5) $g(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}$;
6) $g(x) = \dfrac{3x+2}{x^2-x+1} + \dfrac{3x-2}{x^2+x+1}$.

120.$^{\bullet}$ **Дослідіть на парність функцію:**

1) $f(x) = \dfrac{x}{x}$;
2) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-1}$;
3) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-1}$;
4) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$;
5) $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$;
6) $f(x) = \dfrac{x^3-x^2}{x^3-x}$.

Тренувальні вправи

122.° Парною чи непарною є функція, графік якої зображено на рисунку 21?

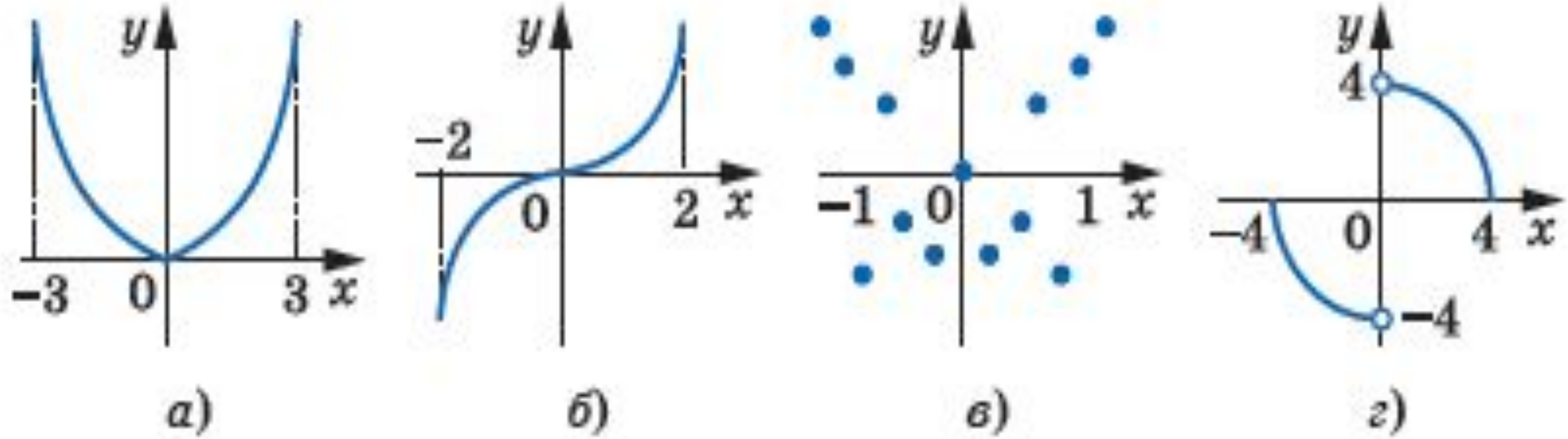


Рис. 21

123.• На рисунку 22 зображено частину графіка функції $y = f(x)$ визначеної на проміжку $[-5; 5]$. Добудуйте графік цієї функції якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

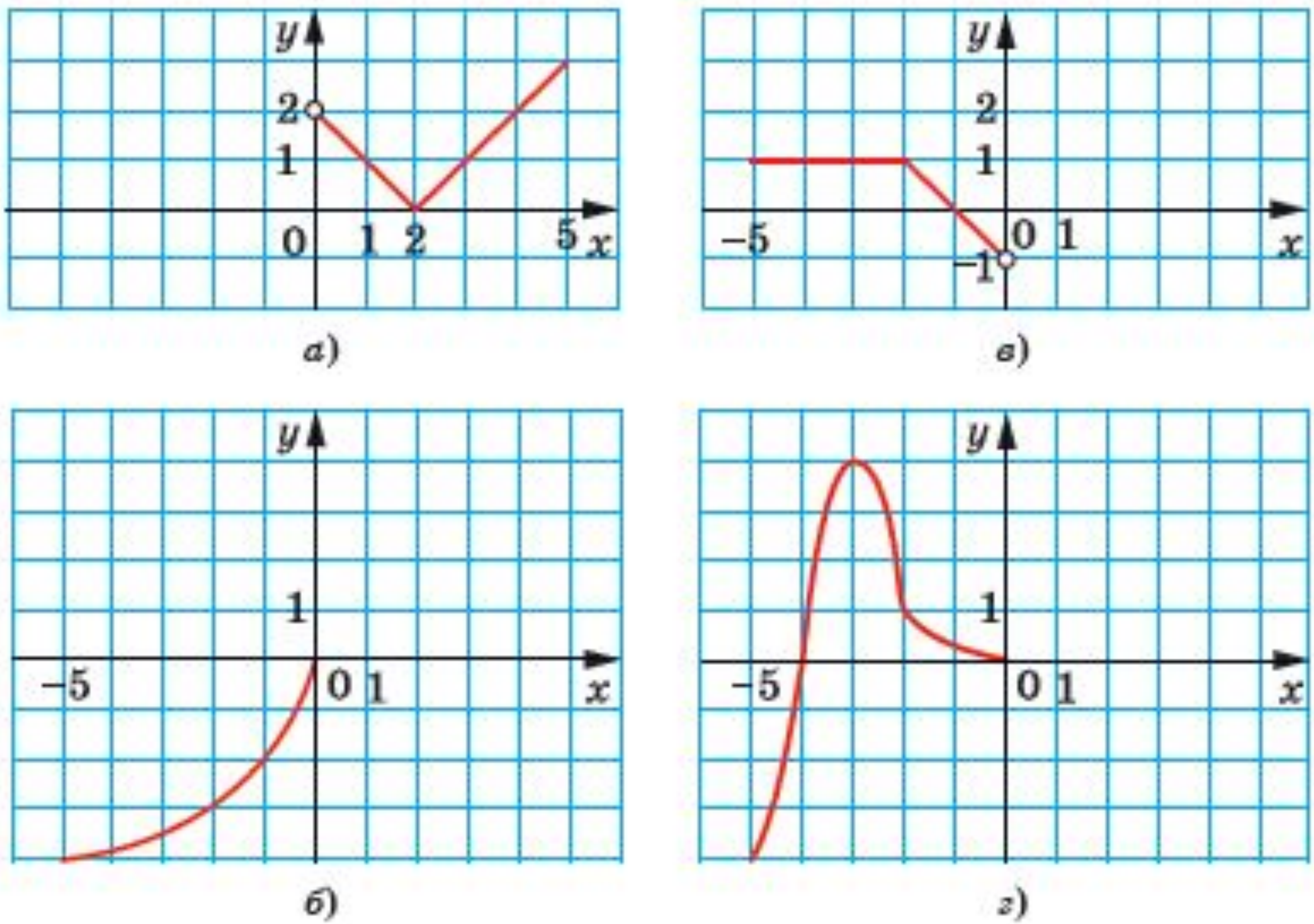


Рис. 22

Тренувальні вправи

125.* Про функцію f, яка визначена на множині $\mathbb{R}$, відомо, що $f(x) = x^2 - 4x$ при $x \geqslant 0$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

127.** Непарна функція f така, що $0 \in D(f)$. Знайдіть $f(0)$.

129.** Непарна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

Вправа для повторення

142. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y-7x=3, \\ x^2+6xy-y^2=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2-2xy=100, \\ y+x=8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y+xy=-15, \\ x^2y+xy^2=-54. \end{cases}$

Домашнє завдання

- Читати § 4
- Вивчити означення
- Готувати відповіді на контрольні запитання 1–5 (ст. 37)
- Виконати вправи №114, 117, 119, 121, 124, 126, 142 (записати розв'язок за алгоритмом, обговореним на уроці)