Степень с рациональным показателем

Степень с натуральным показателем

$$a^n = \underbrace{a * a * a *..* a * a}_{n \text{ раз}}$$

a – основание степени,

n – показатель степени.

Степень с целым показателем

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Определение

Если n – натуральное число,

$n \geq 2, m$ – целое число, то при $a > 0$ справедливо равенство:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

И обратно: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Задание № 1. Записать в виде степени с рациональным показателем

1) $\sqrt[3]{x^2} =$ $x^{\frac{2}{3}}$

2) $\sqrt{y^3} =$ $y^{\frac{3}{2}}$

3) $\sqrt{a} =$ $a^{\frac{1}{2}}$

4) $\sqrt[4]{b^3} =$ $b^{\frac{3}{4}}$

5) $\sqrt[5]{x^{-3}} =$ $x^{-\frac{3}{5}}$

6) $\sqrt[9]{y} =$ $y^{\frac{1}{9}}$

Задание № 2. Записать в виде корня из степени с целым показателем

1) $y^{\frac{5}{3}} =$ $\sqrt[3]{y^5}$

2) $x^{\frac{7}{2}} =$ $\sqrt{x^7}$

3) $b^{\frac{1}{2}} =$ $\sqrt{b}$

4) $x^{-\frac{3}{4}} =$ $\sqrt[4]{x^{-3}}$

5) $x^{-\frac{2}{3}} =$ $\sqrt[3]{x^{-2}}$

6) $y^{\frac{1}{7}} =$ $\sqrt[7]{y}$

Задание № 3. Вычислите:

1. $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27^1} = 3$

2. $64^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64^2} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 4^2 = 16$

3. $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

4. $4^{0,5} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

5. $\left(\frac{4}{25}\right)^{-1,5} = \left(\frac{25}{4}\right)^{1,5} = \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{25}{4}}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}.$

Свойства степени

с рациональным показателем

Все свойства степени с натуральным показателем верны и для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

(p и q – рациональные числа, a>0, b>0)

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$
3. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
4. $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

Свойства степеней. Примеры.

1) $3^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}} = 3^{\frac{5}{5}} = 3^1 = 3;$

2) $\frac{25^{\frac{7}{2}}}{25^3} = 25^{\frac{7}{2}-3} = 25^{\frac{7}{2}-\frac{6}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

3) $\left(7^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 7^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} = 7^1 = 7$

4) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = (4 \cdot 2)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

5) $\frac{54^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{54}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{27}^2 = 3^2 = 9.$

с рациональным показателем

(2)

Верно и обратное

(p и q – рациональные числа, a>0, b>0)

1. $a^{p+q} = a^p * a^q$
2. $a^{p-q} = a^p : a^q$
3. $a^{p \cdot q} = (a^p)^q$
4. $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$
5. $\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$

Свойства степени (2). Примеры.

1) $16^{\frac{3}{2}} = 16^{1\frac{1}{2}} = 16^{1+\frac{1}{2}} = 16^1 \cdot 16^{\frac{1}{2}} =$
$=16 \cdot \sqrt{16} = 16 \cdot 4 = 64$

2) $16^{\frac{3}{2}} = 16^{1\frac{1}{2}} = 16^{2-\frac{1}{2}} = 16^2 : 16^{\frac{1}{2}} = 256 : \sqrt{16} = 256/4$
$= 64$

3) $16^{\frac{3}{2}} = 16^{\frac{1}{2} \cdot 3} = \left(16^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{16}\right)^3 = 4^3 = 64$

4) $16^{\frac{3}{2}} = (4^2)^{\frac{3}{2}} = 4^{2 \cdot \frac{3}{2}} = 4^3 = 64$

---

1) $2^{\frac{2}{5}} \cdot 16^{\frac{2}{5}} = (2 \cdot 16)^{\frac{2}{5}} = 32^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32^2} = 2^2 = 4$

2) $32^{\frac{2}{3}} : 4^{\frac{2}{3}} = (32:4)^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 2^2 = 4.$

Задание 4. Вычислите:

1) $16^{0,75} + 2 = 16^{\frac{3}{4}} + 2 = \sqrt[4]{16^3} + 2 = 8 + 2 = 10$

2) $9^{\frac{3}{2}} - 4 = \sqrt{9^3} - 4 = 27 - 4 = 23$

3) $\left(\frac{64}{81}\right)^{-\frac{3}{2}} + 2{,}17^0 = \left(\frac{81}{64}\right)^{\frac{3}{2}} + 1 = \sqrt{\left(\frac{81}{64}\right)^3} + 1 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 + 1$
$= \frac{729}{512} + 1 = \frac{1241}{512} = 2\frac{217}{512}$

4) $\left(\frac{64}{81}\right)^{-\frac{2}{3}} + 2{,}17^0 = \left(\frac{81}{64}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 = \frac{512}{729} + 1 = 1\frac{512}{729}$

5) $2{,}25^{\frac{1}{2}} - 1^{23} = \sqrt{2{,}25} - 1 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$

Задание № 5. Записать в виде степени с рациональным показателем

1) $\sqrt{x} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}$

2) $y^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = y^{\frac{1}{2}}$

3) $a^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[10]{a} = a^{\frac{2}{5}} \cdot a^{\frac{1}{10}} = a^{\frac{2}{5}+\frac{1}{10}} = a^{\frac{1}{2}}$

4) $\sqrt[3]{b^2} : b^{\frac{5}{6}} = b^{\frac{2}{3}} : b^{\frac{5}{6}} = b^{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}} = b^{-\frac{1}{6}}$

5) $c^{\frac{4}{7}} : (c \cdot \sqrt{c}) = c^{\frac{4}{7}} : (c^1 \cdot c^{\frac{1}{2}}) = c^{\frac{4}{7}-\frac{3}{2}} = c^{-\frac{13}{14}}$

6) $a^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt[6]{a} : a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}} \cdot a^{\frac{1}{6}} : a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}+\frac{1}{6}-(-\frac{1}{2})} = a^{\frac{3}{2}}$